ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

Б. М. ЕДИГАРЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОЛУГРУППЫ КВАДРАТНЫХ МАТРИЦ РАНГА ОДИН НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

1°. Теорема. Пусть A—квадратная матрица порядка n ранга r над произвольным полем K. Тогда существуют две прямоугольные матрицы B и C размеров $(n\times r)$ и $(r\times n)$ и ранга r такие, что $A=BC$. Такое разложение однозначно с точностью до умножения B справа на невырожденную матрицу M размера $r\times r$ и одновременного умножения C слева на обратную.

$$A=BC=(BM)\,(M^{-1}\,C).$$

Пусть G—полугруппа всех квадратных матриц порядка n. Двусторонние идеалы этой полугруппы образованы матрицами ранга $\leqslant r$, где r—любое число от 1 до n. Поэтому они образуют простую структуру

$$G\supset G_{n-1}\supset\cdots G_1\supset 0.$$

Изучим строение структуры одночленных (главных) идеалов, т. е. таких, которые порождаются одним элементом.

Пусть r—ранг порождающей матрицы A. Тогда в силу теоремы

$$A=BC,$$

где B и C матрицы размеров $(n\times r)$, $(n\times n)$ ранга r. Идеал, порожденный матрицей A, составляет множество $B\,(CX)=BC'$, где B фиксированное, а C состоит из всех матриц размера $r\times n$.

Матрица B определяется с точностью до умножения справа на невырожденную матрицу. Поэтому, если идеалу сопоставить подпространство размерности r, натянутое на столбцы матрицы B, оно не меняется при умножении B справа на невырожденную матрицу и будет однозначно соответствовать идеалу.

Обратно для любого r-мерного подпространства найдется соответствующий идеал (в качестве B можно взять матрицу, столбцы которой составляют базис подпространства).

Итак между одночленными идеалами и подпространствами n-мерного пространства имеется взаимно однозначное соответствие. Это соответствие есть структурный изоморфизм: вложению идеалов соответствует вложение подпространств. Число одночленных идеалов (при конечном поле K) ранга r равно числу подпространств размерности r n-мерного пространства над полем K. Как известно, оно равно

$$\frac{(q^n-1)(q^n-q)\cdots(q^n-q^{r-1})}{(q^r-1)(q^r-q)\cdots(q^r-q^{r-1})}=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-r+1}-1)}{(q^r-1)(q^{r-1}-1)\cdots(q-1)},$$

здесь q—число элементов поля.

Число элементов в идеале равно числу матриц C' и равно q^{nr}.

Исследуем с какой матрицей связаны два подпространства n-мерного пространства строк и столбцов размерности r (имеются ввиду пространство, натянутое на столбцы и пространство, натянутое на строки).

Пусть A такая матрица, R_A — пространство столбцов, L_A—пространство строк.

Для любых двух подпространств размерности r можно найти матрицу A, для которой эти подпространства будут R_A и L_A.

Именно, пусть

$$C=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & \cdots & C_{nr} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

где столбцы матрицы C составляют базис пространства R, а строки матрицы B составляют базис пространства L.

Положим

$$A=CMB,$$

где M—любая невырожденная матрица порядка r. Тогда

$$R_A=R,\ L_A=L.$$

Это есть общий вид таких матриц, так что при фиксированных R и L имеется взаимно однозначное соответствие с невырожденными матрицами M порядка r.

Выберем базис для каждого подпространства. Над конечным полем будет конечное число подпространств $N_{r,n}$.

Пусть B_i и C_j — матрицы, соответствующие выбранным базисам i-го подпространства R_i и j-го подпространства L_j ($i=1,\cdots,N$; $j=1,\cdots,N$).

Пусть

$$A_1=B_iM_1C_j,\ A_2=B_kM_2C_l.$$

Тогда

$$A_1A_2=B_i(M_1C_jB_kM_2)\,C_l=B_iM_3C_l,$$

где

$$M_3=M_1P_{jk}M_2,$$

$$P_{jk}=C_jB_k.$$

В том случае, когда C_jB_k—вырожденная матрица, заменим ее нулем, если мы рассматриваем полугруппу матриц ранга r „с точностью до матриц меньшего ранга“, т. е. „склеиваем“ их с нулем.

Для каждого подпространства R пространства столбцов существует „ортогональное“ к нему подпространство R^* в пространстве строк. Если размерность R равна r, то размерность R^* равна $n-r$.

Для того чтобы матрица $C_j B_k$ была невырожденной, необходимо и достаточно, чтобы

$$R_j^* \cap R_k = 0.$$

Отметим, что

1. Число невырожденных матриц порядка r равно

$$S_r = (q^r - 1)(q^r - q) \cdots (q^r - q^{r-1}).$$

2. Число прямоугольных матриц $n \times r$ ранга r равно

$$A_{n,r} = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{r-1}).$$

3. Число подпространств n-мерного пространства размерности r равно

$$C_{n,r} = \frac{A_{n,r}}{S_r} = \frac{(q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{r-1})}{(q^r - 1)(q^r - q) \cdots (q^r - q^{r-1})}.$$

4. Число матриц порядка n и ранга r равно

$$C^2_{n,r} \cdot S_r,$$

где $C_{n,r}$ есть число строк и столбцов определяющей матрицы $P = \|C_j B_k\|$, а S_r есть число элементов группы невырожденных матриц.

2°. Этот пункт посвящен исследованию матрицы P.

Пусть $N = \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$, $L_1, \cdots, L_N$ — все одномерные подпространства n-мерного пространства над полем K из q элементов, $Z_1, \cdots, Z_n$ — какие-либо ненулевые векторы, содержащиеся, соответственно, в $L_1, \cdots, L_N$. Выберем их следующим образом (координаты расположены в столбцах);

$$\begin{matrix}
\cdots 1 & \cdots 0 \cdots & 0 & 0 \\
\cdots z_{i_2} & \cdots 1 \cdots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdots z_{j_3} & \cdot & \cdot \\
\cdot & & \cdot & \cdot \\
\cdot & & 1 & \cdot \\
\cdots z_{i_n} & \cdots z_{j_n} \cdots & z_{j_n} & 1.
\end{matrix}$$

Это множество векторов обозначим через $\mathfrak{M}$. Выбор такой, что первая отличная от нуля координата равна 1. Тогда остальные, независимо друг от друга, пробегают все значения в поле.

Матрицы ранга 1 имеют вид $Z_j C Z_i'$, где Z_j, Z_i' независимо пробегают все множество $\mathfrak{M}$, $c \in K$, $c \neq 0$. Умножение таких матриц осуществляется по формуле

$$Z_j c_1 Z_i', \ Z_k c_2 Z_l' = Z_j (c_1 Z_i' Z_k c_2) Z_l' = Z_j c_3 Z_l',$$

где

$$c_3 = c_1 c_2 Z_i' Z_k.$$

Поэтому нас интересует матрица $P = (P_{ik})$, составленная из „скалярных“ произведений $P_{ik} = Z_i' Z_k$, рассматриваемая в групповой алгебре мультипликативной группы поля над полем комплексных чисел.

Пусть $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$—все характеры мультипликативной группы, χ_0—главный характер. Через $\chi(p)$ обозначим матрицу, получающуюся из матрицы P посредством замены каждого ее элемента значением характера χ, причем полагаем $\chi(0)=0$. Покажем, что $\det \chi(p) \neq 0$. Для этого рассмотрим

$$|\det \chi(p)|^2 = |\det \chi(p) \bar{\chi}(p')|,$$

здесь P'—матрица, транспонированная к p, $\bar{\chi}$—характер, сопряженный с χ.

Элемент i-ой строки и κ-го столбца матрицы $\chi(p)\bar{\chi}(p')$ равен

$$\psi(Z_i, Z_k) = \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_i' U) \bar{\chi}(u' Z_k).$$

Пусть T—невырожденное преобразование основного пространства. Если U пробегает все векторы совокупности $\mathfrak{M}$, то TU пробегает все векторы совокупности $\mathfrak{M}$ с точностью до скалярного множителя

$$TU_l = \alpha_{l,T} \cdot U_{l(T)}.$$

Поэтому

$$\psi(TZ_i, TZ_k) = \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_i' T' U) \bar{\chi}(U' T Z_k) =$$

$$= \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_i' U \cdot \alpha_{U,T'}) \bar{\chi}(\alpha_{U,T'} \cdot U' Z_k) =$$

$$= \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_i' U) \chi(\alpha_{U,T'}) \bar{\chi}(\alpha_{U,T'}) \bar{\chi}(U' Z_k) =$$

$$= \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_i' U) \bar{\chi}(U' Z_k) = \Psi(Z_i, Z_k).$$

Но любую пару векторов можно перевести линейным невырожденным преобразованием в любую другую пару векторов.

Поэтому как все диагональные элементы матрицы $\chi(p)\bar{\chi}(p')$, так и все недиагональные элементы равны между собой. Достаточно подсчитать $\Psi(Z_1, Z_2)$ и $\psi(Z_1, Z_1)$,
где

$$Z_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что

$$\Psi(Z_1, Z_1) = \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_1' U) \bar{\chi}(U' Z_1) = q^{n-1}.$$

Если характер $\chi \neq \chi_0$, то $\Psi(Z_1, Z_2) = 0$, а для главного характера $\chi = \chi_0$

$$\Psi(Z_1, Z_2) = \sum_{U \in \mathfrak{M}} \chi(Z_1' U) \overline{\chi}(U', Z_2) = q^{n-1} - q^{n-2}.$$

Соответственно, для $\chi \neq \chi_0$ имеем

$$|\det \chi(p)|^2 = \begin{vmatrix} q^{n-1}, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & q^{n-1}, & \cdots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot, \\ 0, & 0, & \cdots, & q^{n-1} \end{vmatrix},$$

отсюда

$$\det \chi(p)| = q^{\frac{1}{2}(n-1)\frac{q^n-1}{q-1}}$$

и

$$|\det \chi_0(p)| = \begin{vmatrix} q^{n-1}, & q^{n-1} - q^{n-2}, & \cdots, & q^{n-1} - q^{n-2} \\ q^{n-1} - q^{n-2}, & q^{n-1}, & \cdots, & q^{n-1} - q^{n-2} \\ \cdot & & \cdots, & q^{n-1} \\ \cdot & & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q^{n-1} - q^{n-2}, & q^{n-1} - q^{n-2}, & \cdots, & q^{n-1} \end{vmatrix},$$

откуда

$$|\det \chi_0(p)| = q^{\frac{1}{2}\left[(n-2)\frac{q^n-1}{q-1}+n\right]}.$$

3°. Полугрупповая алгебра над полем комплексных чисел C полугруппы матриц ранга $\leqslant 1$ с элементами из K образована формальными суммами

$$\sum a_{jlc} Z_j c \ Z_l'.$$

где $a_{jlc} \in C$, $c \in K$. Будем считать, что при $c=0$ соответствующие слагаемые равны нулю (bC), то есть нуль полугруппы считаем нулем полугрупповой алгебры. Элементы полугрупповой алгебры можно представить в виде

$$\sum_{l,\,j} b_{jl} Z_j \ Z_l',$$

где

$$b_{lj} = \sum a_{jlc}\, c$$

— элементы групповой алгебры для групп K^* ненулевых элементов поля K.

Умножение осуществляется по правилу

$$(*) \quad \sum_{l,\,j} b_{jl} Z_j \ Z_l' \cdot \sum_{k,\,l} b_{kl} Z_k \ Z_l' = \sum b_{jl}\, p_{lk}\, b_{kl}\, Z_j \, Z_l' \cdot$$

Если ввести обозначение $B = (b_{lk})$, то в терминах этих матриц правило (*) умножения имеет вид

$$B_1 \circ B_2 = B_1 p B_2,$$

где через $\circ$ обозначено умножение по правилу (*).

Так как P—невырожденная матрица как доказано в 2 полугрупповая алгебра изоморфна алгебре матриц над групповой алгеброй группы K^*. Поэтому она вполне приводима и все представления естественно продолжают представления $\chi_0, \chi_1, \cdots, \chi_{q-2}$ мультипликативной группы K^* поля K.

Результат настоящей работы является конкретизацией результатов А. Клиффорда [1] и И. С. Понизовского [2], [3].

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю, член-корреспонденту АН СССР, профессору Д. К. Фаддееву за помощь и ценные советы.

Ереванский государственный
университет

Поступило 18.X.1968

Բ. Մ. ԵԴԻԳԱՐՅԱՆ. Վերջավոր դաշտի վրա մեկ ռանգի քառակուսային մատրիցների կիսախմբերի ներկայացումներ *(ամփոփում)*

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ վերջավոր դաշտի վրա մեկ ռանգի քառակուսային մատրիցների կիսախմբերի բոլոր ներկայացումները կոմպլեքս թվերի դաշտի վրա լրիվ բերելի են և այդպիսի կիսախմբի բոլոր ներկայացումների համար տրվում է սպառիչ պատասխան։

B. M. EDIGARIAN. *Representation of the semigroup of square matricies of rang 1 over the finite field* (summary)

The paper establishes, that all representations of the semigroup mentioned in the heading are entirely reducable. The full answer is given for all representations of the semigroup.

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. H. Clifford.* Matrix representations of completely simple semigroups, Amer. Journ. Math., 64, 1942, 327—342.
2. *И. С. Понизовский.* О матричных представлениях ассоциативных систем, Матем. сб., 38, 1956, 241—260.
3. *И. С. Понизовский.* О матричных неприводимых представлениях конечных полугрупп, УМН, 13, 1958, 139—144.