ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Введение

В работе изучаются краевые задачи для уравнений эллиптико-параболического типа, имеющих вид

$$\mathfrak{M}(u)\equiv P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right)u+L(t, x, D)\,u = h(t, x), \tag{0.1}$$

где

$$P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right)u\equiv\sum_{q=0}^{s}a_q(t, x)\,u^{(q)},\quad u^{(q)}\equiv\frac{\partial^q u}{\partial t^q},\quad a_s=\pm 1,\quad s\geqslant 1;$$

$$L(t, x, D)\,u\equiv\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha(t, x)\,D^\alpha u$$

—эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$ ($s\geqslant 1$ и $m\geqslant 1$ произвольны).

Напомним (см. [6]—[8]), что оператор $\mathfrak{M}(u)$ называется эллиптико-параболическим в области Q, если для любой точки $(t, x)\in Q$

$$a_s(i\tau)^s+L_{2m}(t, x, i\xi)\neq 0,$$

где произвольные вещественные τ и ξ таковы, что $|\tau|+|\xi|\neq 0$. (L_{2m} — означает главную часть оператора L).

В цитированных работах [6]—[8] для эллиптико-параболических уравнений изучались краевые задачи в неограниченном цилиндре $Q=G\times[0, \infty)$, а также периодические решения по t. Здесь изучаются общие краевые задачи для уравнений (0,1) в ограниченном цилиндре $Q=G\times[0, T]$. Ввиду того, что эллиптико-параболические уравнения некорректны в смысле Адамара-Петровского [6] (исключение составляет лишь случай $P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right)\equiv\frac{\partial}{\partial t}$, т. е. параболическое уравнение), прежде всего возникает вопрос о постановке задачи по времени, т. е. вопрос о числе условий, которые следует в дополнение к уравнению (0.1) задавать при $t=0$ и при $t=T$. Как выяснилось число таких условий при $t=0$ и при $t=T$, вообще говоря, различно. Именно, если s нечетно и $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]}a_s>0$, то при $t=0$ требуется $s-k$ условий, где $k = \left[\frac{s}{2}\right]$, а при $t = T$ оно равно k. Если же $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} a_s < 0$, то плоскости $t = 0$ и $t = T$ меняются ролями. В случае же четных $s = 2k$ число условий при $t = 0$ и $t = T$ одинаково и равно k.

(В связи с этим отметим, что простейшие краевые задачи, рассмотренные в [7] для уравнения (0,1), являются сопряженными друг к другу в том смысле, что при изменении знака t при нечетном s они меняются ролями, а при четном s остаются инвариантными. Это свойство является весьма важным и во всей теории эллиптико-параболических уравнений).

Как показано в настоящей работе для эллиптико-параболических уравнений справедлив принцип локальности, т. е. принцип „замораживания" коэффициентов, широко используемый в настоящее время при изучении эллиптических и параболических уравнений. Как известно, этот принцип состоит в локальном изучении задачи внутри области и вблизи границы и последующем свертывании с помощью разбиения единицы. Следуя этой схеме, мы устанавливаем в § 1 разрешимость краевой задачи для уравнения (0.1) вначале в бесконечном цилиндре $Q = G \times \mathbf{R}^1$ в пространствах типа $L_2(Q)$. Затем в § 2 устанавливается аналогичная теорема о разрешимости краевой задачи по t в полуограниченном цилиндре $Q = G \times [0, \infty)$. При этом доказываются точные двусторонние оценки.

Теорема в § 3, касающаяся малых возмущений оператора $L(t, x, D)$, носит вспомогательный характер. Основные теоремы о фредгольмовости поставленных задач получены в §§ 4 и 5. Отметим, что нами рассмотрен здесь случай, когда оператор $L(t, x, D)$ является самосопряженным (§ 4) или полуограниченным снизу (более точно см. § 5). Дело в том, что при изучении краевых задач в цилиндрической области необходимо возникают вопросы согласования начальных условий при $t = 0$ и $t = T$ (заметим, что при переходе через верхнюю или нижнюю кромку цилиндра Q, меняется число граничных условий, т. е. меняется индекс факторизации символа оператора $\mathfrak{M}(u)$ (см. [4]). Условия согласования для рассматриваемых в §§ 5 и 6 задач состоят в возможности разложения начальных условий и правой части уравнения $h(t, x)$ в ряды Фурье по собственным функциям оператора $L(t, x, D)$. В случае же общего эллиптического оператора $L(t, x, D)$ эти условия могут иметь иной характер. Вопрос согласования начальных и граничных условий при переходе через угловые точки цилиндра Q есть, по существу, вопрос о правильном понимании в этих точках известного условия Шапиро-Лопатинского или условия дополнительности (см., например, [1], [4]). Изучение этого вопроса требует иного подхода и выходит за рамки настоящей работы.

В заключительном § 6 более детально изучается краевая задача, аналогичная задаче Дирихле для эллиптических уравнений, в частности получена теорема единственности. В конце параграфа приведены примеры.

§ 1. Краевая задача в неограниченном цилиндре

Пусть $Q = G \times \mathbf{R}^1$ — неограниченный цилиндр с боковой поверхностью $S = \partial G \times \mathbf{R}^1$, $G \subset \mathbf{R}^n$. Рассмотрим в цилиндре Q уравнение

$$\mathfrak{M}(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(x, D)\, u = h(t, x) \tag{1.1}$$

при условиях

$$B_j(x, D)\, u|_S = 0, \; j = 1, \cdots, m. \tag{1.2}$$

Здесь

$$L(x, D)\, u \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha(x) D^\alpha u, \; a_\alpha(x) \in C^\infty$$

—эллиптический дифференциальный оператор порядка $2m$ с гладкими комплексными коэффициентами. Напомним, что оператор $L(x, D)$ называется эллиптическим в области $G \subset \mathbf{R}^n$, если для любого $x = (x_1, \cdots, x_n) \in G$ и любых вещественных $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$

$$L_{2m}(x, i\xi) \neq 0, \; |\xi| \neq 0.$$

Допустим, что граничные дифференциальные операторы

$$B_j(x, D)\, u \equiv \sum_{|\beta| \leq m_j} b_{j\beta}(x) D^\beta u, \; m_j \leq 2m-1, \; j = 1, \cdots, m$$

определяют для оператора $L(x, D)$ полуограниченную самосопряженную задачу (о необходимых и достаточных условиях справедливости этого требования см., например, [2], [12], [13]). Пусть $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$ —система собственных функций этой задачи с собственными значениями $\lambda_0 < \lambda_1 \leqslant \cdots$. В дальнейшем условимся говорить о функциях $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$ как о собственных функциях оператора $L(x, D)$.

Введем необходимые для дальнейшего пространства. Пусть $H^l \equiv H^l(G)$, где $l \geqslant 0$ — вещественное число,—пространство Соболева-Слободецкого (см. [11], [10] или [5]). Напомним, что при целых l норма в H^l равна

$$\|u\|_l^2 = \sum_{|\alpha| \leq l} \int_G |D^\alpha u|^2\, dx.$$

Обозначим далее через $H(r, l)$ ($r \geqslant 0$ — целое число) пространство функций $u(t, x)$, заданных в цилиндре $Q = I \times G$, где $I \subset \mathbf{R}^1$ есть либо вся ось (к § 1), либо полуось $[0, \infty)$ (к § 2), либо отрезок $[0, T]$ (к § 4), с нормой

$$\|u\|_{r, l}^2 = \int_I \left(\|u\|_l^2 + \|u^{(r)}\|_0^2\right) dt.$$

Определим теперь пространство $H^l\{B_j\}$ как пространство рядов Фурье по собственным функциям оператора $L(x, D)$. Более точно, функция $u(x) \in H^l\{B_j\}$ тогда и только тогда, когда $u(x)$ представима в виде ряда

$$u(x) = c_0\omega_0(x) + c_1\omega_1(x) + \cdots,$$

сходящегося в метрике пространства H^l. Как известно (см., например, [2], [3]) $H^0\{B_j\}\equiv L_2(G)$, а при $l=2m$ пространство $H^{2m}\{B_j\}$ есть подпространство функций $u(x)\in H^{2m}$, удовлетворяющих условиям

$$B_j(x, D)\,u|_{\partial G}=0,\; j=1,\cdots, m.$$

При $l>2m$ пространство $H^l\{B_j\}$ уже указанного подпространства.

Наконец, $H(r, l)\{B_j\}$ означает пространство рядов Фурье, сходящихся в метрике $H(r, l)$, т. е. функция $u(t, x)\in H(r, l)\{B_j\}$ тогда и только тогда, когда $u(t, x)$ представима в виде ряда

$$u(t, x)=c_0(t)\,\omega_0(x)+c_1(t)\,\omega_1(x)+\cdots,$$

сходящегося в $H(r, l)$. Пространство $H(r, l)\{B_j\}$ в дальнейшем есть пространство решений задачи (1.1), (1.2).

Теорема 1. *Если s нечетно и среди собственных чисел оператора $L(x, D)$ нет нуля, т. е. $\lambda_i\neq 0$, $i=0, 1,\cdots$, то отображение*

$$\mathfrak{M}(u): H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}\to H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$$

есть изоморфизм. При этом справедлива двусторонняя оценка:

$$\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}\leqslant C_1\left(\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}}+\bar{\lambda}^{-\frac{r}{s}}\|u\|_{0,0}\right)\leqslant C_2\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.3}$$

где $C_1>0$, $C_2>0$ — постоянные, $\bar{\lambda}=\min|\lambda_i|$, $i=0, 1,\cdots$.

Доказательство. В прямую сторону утверждение теоремы очевидно. Докажем обратное, т. е., что для любой функции $h\in H_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}\{B_j\}$ существует единственное решение задачи (1.1), (1.2) $u\in H_{r, r\frac{2m}{s}}\{B_j\}$, причем имеет место неравенство (1.3). Будем искать решение $u(t, x)$ в виде ряда

$$u(t, x)=\sum_{i=0}^{\infty} c_i(t)\,\omega_i(x). \tag{1.4}$$

Подставляя ряд (1.4) в уравнение (1.1), убеждаемся, что функции $c_i(t)$ должны удовлетворять системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_s c_i^{(s)}(t)+\lambda_i c_i(t)=h_i(t), \tag{1.5}$$

где

$$h_i(t)=(h, \omega_i)\equiv\int_G h(t, x)\,\omega_i(x)\,dx.$$

Лемма 1. *Если s нечетно и $\lambda\neq 0$, то для любой функции $h(t)\in H^{r-s}(\mathbf{R}^1)$ уравнение*

$$a_s u^{(s)}(t)+\lambda u(t)=h(t) \tag{1.6}$$

имеет единственное решение $u(t) \in H^r(\mathbf{R}^1)$, *причем справедливо неравенство*

$$\|h^{(r-s)}\| + |\lambda|^{\frac{r-s}{s}} \|h\| \leqslant C_1 (\|u^{(r)}\| + |\lambda|^{\frac{r}{s}} \|u\|) \leqslant C_2 (\|h^{(r-s)}\| + |\lambda|^{\frac{r-s}{s}} \|h\|), \tag{1.7}$$

где $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — *постоянные*, $\|u\|^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |u|^2 \, dt$.

Доказательство. Общее решение уравнения (1.6) можно записать в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^{s-1} e^{\mu_j t} \left(B_j + \frac{W_j}{W} \int\limits_0^t e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau \right), \tag{1.8}$$

где $\mu_j(\lambda)$ — корни характеристического полинома $a_s \mu^s + \lambda = 0$, b_j — произвольные постоянные, W — определитель Вандермонда из чисел μ_j, W_j — алгебраические дополнения последней строки W. Пусть корни $\mu_0, \cdots, \mu_{k-1}$ таковы, что $\operatorname{Re} \mu_j > 0$ $(i = 0, \cdots, k-1)$, а $\operatorname{Re} \mu_k < 0, \cdots, \operatorname{Re} \mu_{s-1} < 0$. Положим для $j = 0, \cdots, k-1$

$$B_j = -\frac{W_j}{W} \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau,$$

а для $j = k, \cdots, s-1$

$$B_j = \frac{W_j}{W} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau.$$

Осталось показать, что для $h(t) \in H^{r-s}$ так определенное решение (2.7) $u(t) \in H^r$ и справедливо неравенство (1.7). Имеем

$$u(t) = -\sum_{j=0}^{k-1} \frac{W_j}{W} e^{\mu_j t} \int\limits_t^{\infty} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau + \sum_{j=k}^{s-1} \frac{W_j}{W} e^{\mu_j t} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{-\mu_j \tau} \, h(\tau) \, d\tau,$$

или, что то же,

$$u(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{W_j}{W} \int\limits_0^{\infty} e^{-\mu_j \tau} \, h(t+\tau) \, d\tau + \sum_{j=k}^{s-1} \frac{W_j}{W} \int\limits_0^{\infty} e^{\mu_j \tau} \, h(t-\tau) \, d\tau,$$

откуда, используя известное неравенство Минковского и тот факт, что $|\mu_j| = |\lambda|^{\frac{1}{s}}$, получаем оценку

$$|\lambda| \cdot \|u\| \leqslant C \|h\|.$$

После этого, из уравнения (1.6) последовательно по r получаем оценку (1.7). Лемма доказана.

Возвращаемся к доказательству теоремы 1. Рассмотрим ряд (1.4), где функции $c_l(t)$ являются решениями уравнений (1.5), найденными в лемме 1. Покажем, что так определенный ряд сходится в $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$

и является искомым решением. Пусть $u_n(t, x) = \sum_{l=0}^{n} c_l(t)\,\omega_l(x)$ — частичная сумма ряда (1.4). Очевидно $u_n(t, x)$ можно представить в виде

$$u_n(t, x) = \sum_{\lambda_l<0} c_l(t)\,\omega_l(x) + \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} c_l(t)\,\omega_l(x) \equiv u_n^-(t, x) + u_n^+(t, x).$$

Получим вначале оценку для составляющей $u_n^-(t, x)$. Поскольку система собственных функций $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$ ортонормирована, то из неравенства леммы (1.7) получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|u_n^{-(r)}\|_0^2\,dt + \sum_{\lambda_l<0} |\lambda_l|^{\frac{2r}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |c_l|^2\,dt \leqslant C_2\Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} \|h_-^{(r-s)}\|_0^2\,dt +$$

$$+ \sum_{\lambda_l<0} |\lambda_l|^{\frac{2(r-s)}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |h_l|^2\,dt\Bigr),$$

где $h_-(t, x) = \sum_{\lambda_l<0} h_l(t)\,\omega_l(x)$.

Ввиду того, что функция $u_n^-(t, x)$ порождается конечным числом функций $\omega_l(x)$, $\lambda_l<0$, то последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\|u_n^-\|_{r,\, r\frac{2m}{s}} + \bar{\lambda}^{\frac{r}{s}} \|u_n^-\|_{0,\,0} \leqslant C_3 \|h_-\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим теперь составляющую $u_n^+(t, x)$. Из неравенства (1.7), как и раньше, получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|u_n^{+(r)}\|_0^2\,dt + \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} |\lambda_l|^{\frac{2r}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |c_l|^2\,dt \leqslant C_2\Bigl(\int_{-\infty}^{\infty} \|P_n h_+^{(r-s)}\|_0^2\,dt +$$

$$+ \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} |\lambda_l|^{\frac{2(r-s)}{s}} \int_{-\infty}^{\infty} |h_l|^2\,dt\Bigr), \tag{1.10}$$

где $P_n h_+ = \sum_{0<\lambda_l<\lambda_n} h_l(t)\,\omega_l(x)$.

Заметим теперь, что сужение оператора $L(x, D)$ на подпространство $H_+^{2m}\{B_j\} \subset H^{2m_1}\{B_j\}$, порожденное собственными функциями $\omega_l(x)$, у которых $\lambda_l > 0$, есть самосопряженный оператор, который обозначим L_+. Поскольку оператор L_+ положителен, то определена его степень L_+^{α} для любого вещественного $\alpha>0$. Учитывая сказанное и ортонормированность системы $\omega_0(x)$, $\omega_1(x), \cdots$, замечаем, что неравенство (1.10) можно представить в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\|u_n^{+(r)}\|_0^2+\frac{\bar{\lambda}^{\frac{r}{s}}}{2}\|u_n^+\|_0+\frac{1}{2}\|L_+^{\frac{r}{s}}u_n^+\|_0^2\right)dt < C_2\int_{-\infty}^{\infty}(\|P_nh_+^{(r-s)}\|_0^2+\|L_+^{\frac{r-s}{s}}P_nh_+\|_0^2)\,dt$$

или, что то же,

$$\|u_n^+\|_{r,\,r\frac{2m}{s}}+\bar{\lambda}^{\frac{r}{s}}\|u_n^+\|_{0,0} < C_3\|P_n h_+\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.11}$$

ибо

$$\|u_n^+\|_{r\frac{2m}{s}}\leqslant C_4\|L^{\frac{r}{s}}u_n^+\|_0\leqslant C_5\|u_n^+\|_{r\frac{2m}{s}}.$$

Полученное неравенство (1.11) вместе с неравенством (1.9) приводит к основной оценке частичной суммы $u_n(t, x)$

$$\|u_n\|_{r,\,r\frac{2m}{s}}+\bar{\lambda}^{\frac{r}{s}}\|u_n\|_{0,0}\leqslant C_6\|P_n h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}},$$

где $P_nh=\sum_{l=0}^{n}h_l(t)\,\omega_l(x)$. Из этой оценки немедленно вытекает, что последовательность $u_n(t, x)$ фундаментальна в $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ как только $h(t, x)\in H\left(r-s,\ (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. Следовательно, ряд (1.4) сходится в пространстве $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. Нетрудно видеть, что $u_n(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$a_s u_n^{(s)}+L(x, D)\,u_n=P_n\,h(t, x),$$

откуда, устремляя $n\to+\infty$, находим, что сумма ряда (1.4) $u(t, x)\in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ является решением уравнения (1.1).

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь случай четного s.

Теорема 2. *Пусть* $s=2k$ *и* $(-1)^k a_{2k}>0$. *Тогда, если собственные числа* $\lambda_0, \lambda_1, \cdots$ *оператора* L *положительны, т. е.* $\lambda_0>0$, *то оператор* $\mathfrak{M}(u)$ *отображает пространство* $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ *на пространство* $H\left(r-s,\ (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ *изоморфно. При этом справедливо неравенство*

$$\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}\leqslant C_1(\|u\|_{r,\,r\frac{2m}{s}}+\lambda_0^{\frac{r}{s}}\|u\|_{0,\,0}) < C_2\|\mathfrak{M}(u)\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.12}$$

где $C_1>0$, $C_2>0$ — *постоянные.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

В заключение этого параграфа укажем другой вариант теоремы разрешимости задачи (1.1), (1.2) в цилиндре $Q=G\times(-\infty,\infty)$.

Нижеследующая теорема для нечетных s менее точна, чем теорема 1, однако здесь задача (1.1), (1.2) изучается в пространствах $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, отличающихся от пространств $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ тем, что элементы этих пространств не связаны с разложениями по собственным функциям оператора $L(x, D)u$. Этот результат будет использован в § 5.

Определение 1. Оператор $\mathfrak{M}(u)$ называется эллиптико-параболическим, если для вещественных $\tau\in\mathbf{R}^1$ и $\xi\in\mathbf{R}^n$ таких, что $|\tau|+|\xi|\neq 0$

$$a_s(i\tau)^s+L_{2m}(x, i\xi)\neq 0, \tag{1.13}$$

где $L_{2m}(x, i\xi)\equiv\sum\limits_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x)(i\xi)^\alpha$ — главная часть полинома $L(x, i\xi)$.

Обозначение. Допустим, что оператор $L(x, D)u$ полуограничен снизу (самосопряженность не требуется). Тогда положим

$$\lambda_0=\inf_{u\in H^{2m}\{B_j\}}\frac{\operatorname{Re}(L(x, D)u, \bar{u})}{(u, \bar{u})}. \tag{1.14}$$

Очевидно, в случае самосопряженности оператора $L(x, D)u$ λ_0 есть первое собственное число.

Теорема 3. *Пусть оператор* $\mathfrak{M}(u)$ *эллиптико-параболичен и* $\lambda_0>0$. *Тогда для любой правой части* $h(t, x)\in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$ *существует единственное решение задачи* (1.1), (1.2) $u(t, x)\in H\left(r, r\frac{2m}{t}\right)$, *причем справедливо неравенство*

$$\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}\leqslant C_1\left(\|u\|_{r,\,r\frac{2m}{s}}+\lambda_0^{\frac{r}{s}}\|u\|_{0,0}\right)\leqslant C_2\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{1.15}$$

где $C_1>0$, $C_2>0$ — *постоянные, не зависящие от* $u(t, x)$ *и* λ_0.

Доказательство. Перейдем в задаче (1.1), (1.2) к преобразованию Фурье по t. Тогда получим, что функция $\tilde{u}(\tau, x)=F_{t\to\tau}[u(t, x)]$ удовлетворяет соотношению

$$\tilde{\mathfrak{M}}(\tilde{u})\equiv[a_s(i\tau)^s+L(x, D)]\,\tilde{u}(\tau, x)=\tilde{h}(\tau, x), \tag{1.16}$$

$$B_j(x, D)\,\tilde{u}(\tau, x)|_S=0,\ j=1,\cdots, m, \tag{1.17}$$

где $\tilde{h}(\tau, x)=F_{t\to\tau}[h(t, x)]$.

Поскольку оператор $\mathfrak{M}(u)$ является эллиптико-параболическим, то при любом τ задача (1.16), (1.17) есть эллиптическая задача с параметром, меняющимся на вещественной оси. Как доказано в работе [1] эта задача при любом $\tau \in \mathbf{R}^1$ фредгольмова, а при $|\tau| \gg 1$ однозначно разрешима. Кроме того, при больших по модулю τ имеет место оценка

$$\|\tilde{h}\|_{(r-s)\frac{2m}{s}} + |\tau|^{r-s} \|\tilde{h}\|_0 \leqslant C_1 (\|\tilde{u}\|_{r\frac{2m}{s}} + |\tau|^r \|\tilde{u}\|_0) \leqslant C_2 (\|\tilde{h}\|_{(r-s)\frac{2m}{s}} + |\tau|^{r-s} \|\tilde{h}\|_0). \tag{1.18}$$

С другой стороны, из неравенства

$$(\mathfrak{M}(\tilde{u}),\ \tilde{\tilde{u}}) \geqslant \lambda_0 \|\tilde{u}\|_0^2 \tag{1.19}$$

(напомним, что $\lambda_0 > 0$) вытекает, что всегда имеет место единственность решения. Значит в силу фредгольмовости задача (1.16), (1.17) однозначно разрешима при любом $\tau \in \mathbf{R}^1$ и для любой правой части $\tilde{h}(\tau, x) \in H^{(r-s)\frac{2m}{s}}(G)$. Легко видеть теперь, что и оценка (1.18) имеет место для любого τ. Следовательно, функция $u(t, x) = F^{-1}_{\tau\to t}[\tilde{u}(\tau, x)]$ определяет искомое решение задачи (1.1), (1.2). Оценка (1.15) следует из оценки (1.18) и неравенства (1.19) (по существу (1.15) есть известная оценка резольвенты эллиптического оператора). Теорема 3 доказана.

§ 2. Краевая задача в полуограниченном цилиндре

Пусть $Q = G \times [0, \infty)$ — полуограниченный цилиндр с боковой поверхностью $S = \partial G \times [0, \infty)$. Рассмотрим в цилиндре Q эллиптико-параболическое уравнение

$$\mathfrak{M}(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(x, D)\, u = h(t, x) \tag{2.1}$$

при граничных и начальных условиях

$$B_j(x, D)\, u|_S = 0,\ j = 1, \cdots, m, \tag{2.2}$$

$$u^{(n_i)}(0, x) = \varphi_i(x),\ i = 0, \cdots, s-1-k,\ n_i \geqslant 0, \tag{2.3}$$

где число k определяется следующим образом:

а) $k = \left[\frac{s}{2}\right]$, если s нечетно и $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} a_s > 0$,

б) $k = \left[\frac{s}{2}\right] + 1$, если s нечетно и $(-1)^{\left[\frac{s}{2}\right]} a_s < 0$,

в) $k = \frac{s}{2}$, если s четно.

Как и в § 1 считаем, что граничные условия (2.2) самосопряженны. Кроме того, допустим, что выполнено следующее условие (аналог условия Шапиро-Лопатинского в теории эллиптических задач).

Условие 1. *Для любого* $\lambda>0$ определитель

$$\det\|\mu_j^{n_i}(\lambda)\|\neq 0,\ i,\ j=0,\cdots,\ s-1-k,$$

где $\mu_j(\lambda)$ — корни алгебраического уравнения $a_s\mu^s+\lambda=0$ такие, что $\operatorname{Re}\mu_j(\lambda)<0$.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие* 1 *и первое собственное число* $\lambda_0>0$. *Тогда для любой функции* $h(t,x)\in H\left(r-s,(r-s)\frac{2m}{s}\right)\times\times\{B_j\}$ *и любой системы начальных значений* $\varphi_i(x)\in H^{l_i}\{B_j\}$, $l_i=(r-n_i)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}$ *существует единственное решение задачи* (2.1)—(2.3) *и* $(t,x)\in H\left(r,r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. *При этом справедлива двусторонняя априорная оценка*

$$\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}+\sum_{l=0}^{s-1-k}\|\varphi_l\|_{l_l}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\left(\|u\|_{r,\,r\frac{2m}{s}}+\lambda_0^{\frac{r}{s}}\|u\|_{0,\,0}\right)\leqslant C_2\left(\|h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}}+\sum_{l=0}^{s-1-k}\|\varphi_l\|_{l_l}\right),\tag{2.4}$$

где $C_1>0$, $C_2>0$ — *постоянные*, $r\geqslant\max(s,n_l+1)$.

Доказательство. Первое неравенство в оценке (2.4) очевидно. Докажем теорему существования и вторую часть оценки (2.4). Будем искать решение задачи (2.1)—(2.3) в виде ряда

$$u(t,x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}c_\nu(t)\,\omega_\nu(x),\tag{2.5}$$

где функции $c_\nu(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$a_s c_\nu^{(s)}(t)+\lambda_\nu c_\nu(t)=h_\nu(t),\ \nu=0,1,\cdots\tag{2.6}$$

при условиях

$$c_\nu^{(n_i)}(0)=\varphi_{i\nu},\ i=0,\cdots,\ s-1-k,\tag{2.7}$$

где $h_\nu(t)=(h,\omega_\nu)$, $\varphi_{l\nu}=(\varphi_l,\omega_\nu)$.

Лемма 2. *Пусть* $\lambda_\nu>0$ *и выполнено условие* 1. *Тогда для любой функции* $h_\nu(t)\in H^{r-s}(0,\infty)$ *существует единственное решение* $c_\nu(t)\in H^r(0,\infty)$ *уравнения* (2.6) *с условиями* (2.7).

При этом справедлива оценка

$$\|c_\nu^{(r)}\|+\lambda_\nu^{\frac{r}{s}}\|c_\nu\|\leqslant C_3\left(\|h_\nu^{(r-s)}\|+\lambda_\nu^{\frac{r-s}{s}}\|h_\nu\|+\sum_{l=0}^{s-1-k}\lambda_\nu^{\frac{1}{s}(r-n_l)-\frac{1}{2s}}|\varphi_{l\nu}|\right),\tag{2.8}$$

где $C_3>0$, $\|c_\nu\|$ — *норма в* $L_2(0,\infty)$, $r>\max(s,n_l+1)$.

Доказательство. Общее решение уравнения (2.6) имеет вид

$$c_\nu(t) = \sum_{j=0}^{s-1} e^{\mu_{j\nu}t}\left(B_{j\nu} + \frac{W_{j\nu}}{W}\int_0^t e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\,d\tau\right), \tag{2.9}$$

где $B_{j\nu}$ — произвольные постоянные. Обозначим через $\mu_{0\nu}, \cdots, \mu_{s-1-k,\nu}$ (k — число, указанное в начале параграфа) такие корни характеристического уравнения, у которых $\operatorname{Re}\mu_{j\nu} < 0$; остальные корни $\mu_{j\nu}$, $j = s-k, \cdots, s-1$, имеют $\operatorname{Re}\mu_{j\nu} > 0$. Ввиду этого положим для $j = s-k, \cdots, s-1$

$$B_{j\nu} = e^{\mu_{j\nu}t} \cdot \frac{W_{j\nu}}{W}\int_0^\infty e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\,d\tau.$$

Остальные неизвестные постоянные определяются из начальных условий (2.9)

$$\sum_{j=0}^{s-1-k} \mu_{j\nu}^{n_i} B_{j\nu} = \varphi_{i\nu} + \alpha_{i\nu}, \quad i = 0, \cdots, s-1-k, \tag{2.10}$$

где

$$\alpha_{i\nu} = \frac{d^{n_i}}{dt^{n_i}}\left(\sum_{j=s-k}^{s-1} \frac{W_{j\nu}}{W} e^{\mu_{j\nu}t}\int_t^\infty e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\,d\tau\right)\Bigg|_{t=0} -$$

$$-\frac{d^{n_i}}{dt^{n_i}}\left(\sum_{j=0}^{s-1-k} \frac{W_{j\nu}}{W} e^{\mu_{j\nu}t}\int_0^t e^{-\mu_{j\nu}\tau} h_\nu(\tau)\,d\tau\right)\Bigg|_{t=0}.$$

Поскольку по условию $\det \|\mu_{j\nu}^{n_i}(\lambda)\| \neq 0$, то система (2.10) имеет единственное решение

$$B_{j\nu} = \sum_{i=0}^{s-1-k} \beta_{ij\nu}(\varphi_{i\nu} + \alpha_{i\nu}),$$

где $\beta_{ij\nu} \equiv \beta_{ij\nu}(\lambda)$ — однородные функции порядка $\operatorname{ord}\beta_{ij\nu} = -\frac{n_i}{s}$. Тем самым найдено искомое решение задачи (2.6), (2.7). К оценке (2.8) теперь приводят непосредственные вычисления. Лемма 2 доказана.

Покажем теперь, что ряд (2.5), где коэффициенты $c_\nu(t)$ определены в лемме 2, сходится в пространстве $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ и определяет решение исходной задачи (2.1)—(2.3). Действительно, для частичной суммы $u_n(t, x) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu(t)\,\omega_\nu(x)$ неравенство (2.8) приводит к оценке

$$\|u_n\|_{r,0} + \|L^{\frac{r}{s}} u_n\|_{0,0} + \lambda_0^{\frac{r}{s}}\|u_n\|_{0,0} \leqslant C_1\left(\|P_n h\|_{r-s,0} + \|L^{\frac{r-s}{s}} P_n h\|_{0,0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=0}^{s-1-k} \|L^{\frac{1}{s}(r-n_i)-\frac{1}{2s}} P_n\varphi_i\|_0\right),$$

где $L^\alpha \equiv L^\alpha(x, D)$ — степень α положительно определенного эллиптического оператора $L(x, D)$; $P_n h = \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu(t)\,\omega_\nu(x)$, то же $P_n \varphi_l$. Поскольку для любого $\alpha > 0$

$$\|L^\alpha u_n\|_0 \leqslant C_5 \|u_n\|_{2m\alpha} \leqslant C_6 \|L^\alpha u_n\|_0,$$

то последнее неравенство эквивалентно тому, что

$$\|u_n\|_{r,\, r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}} \|u_n\|_{0,\,0} \leqslant C_7 \Big(\|P_n h\|_{r-s,\,(r-s)\frac{2m}{s}} + \sum_{l=0}^{s-1-k} \|P_n \varphi_l\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s} - \frac{m}{s}}\Big).$$

Полученная оценка означает, что ряд (2.5) сходится в пространстве $H\left(r, r\dfrac{2m}{s}\right)\{B_j\}$ и поскольку

$$a_s u_n^{(s)} + L(x, D)\, u_n = P_n h,$$

то функция $u(t, x) = c_0(t)\,\omega_0(x) + \cdots$ есть решение уравнения (2.1). Очевидно для $u(t, x)$ справедлива оценка (2.4). Теорема доказана.

Замечание. Если самосопряженный оператор $L(x, D)$ не положителен, но полуограничен снизу, то задача (2.1)—(2.2) нормально разрешима, т. е. имеет конечномерное ядро и коядро. В частности, для однозначной разрешимости, очевидно, достаточно, чтобы правая часть $h(t, x)$ была ортогональна корневому подпространству оператора $L(x, D)$, порожденному собственными функциями с неположительными собственными значениями.

§ 3. Малые возмущения оператора $L(x, D)$ и

1. Рассмотрим в цилиндре $Q = G \times \mathrm{R}^1$ уравнение

$$\mathfrak{M}(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(t, x, D)\, u = h(t, x), \tag{3.1}$$

где

$$L(t, x, D)\, u \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(t, x)\, D^\alpha u$$

—эллиптический дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами. Для уравнения (3.1) вновь ставится задача отыскания решения, удовлетворяющего на боковой поверхности $S = \partial G \times \mathrm{R}^1$ условиям

$$B_j(x, D)\, u|_S = 0, \quad j = 1, \cdots, m. \tag{3.2}$$

Теорема 5. *Пусть в некоторой точке $(x_0, t_0) \in Q$ оператор $L(t_0, x_0, D)$ с граничными условиями (3.2) является полуограниченным эллиптическим оператором. Пусть далее в Q справедливы неравенства*

$$|a_\alpha(t, x) - a_\alpha(t_0, x_0)| \leqslant \varepsilon, \quad |\alpha| \leqslant 2m.$$

Тогда для любой функции $h(t, x) \in H\left(r-s, (r-s)\dfrac{2m}{s}\right)$ сущест-

вует единственное решение задачи (3.1), (3.2) $u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, *если только* $\varepsilon > 0$ *достаточно мало, а первое „собственное число"* $\lambda_0 > 0$ *оператора* $L(t_0, x_0, D)$, *напротив, достаточно велико. При этом справедлива оценка*

$$\|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant C_1 \left(\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}} \|u\|_{0,0}\right) \leqslant C_2 \|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Обозначим через $\overset{0}{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, $r \geqslant s$ подпространство функций $u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, удовлетворяющих на боковой поверхности S цилиндра Q граничным условиям (3.2). Очевидно оператор $\mathfrak{M}(u)$ есть ограниченный оператор, действующий из пространства $\overset{0}{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ в пространство $H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$. Нам надлежит доказать, что при малых $\varepsilon > 0$ и больших $\lambda_0 > 0$ оператор $\mathfrak{M}(u)$ имеет ограниченный обратный. Обозначим через $\mathfrak{M}_0(u)$ оператор

$$\mathfrak{M}_0(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(t_0, x_0, D) u,$$

т. е. оператор $\mathfrak{M}(u)$ с фиксированными в точке (x_0, t_0) коэффициентами. По теореме 3 $\mathfrak{M}_0(u)$ обратим, т. е. существует оператор

$$R_0 : H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right) \to \overset{0}{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right),$$

причем, если $h \in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$, то

$$\|R_0 h\|_{r, r\frac{2m}{s}} + \lambda_0^{\frac{r}{s}} \|R_0 h\|_{0,0} \leqslant C_1 \|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}}, \tag{3.4}$$

где $C_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от $h(t, x)$ и λ_0. Рассмотрим оператор $\mathfrak{M}(R_0 h)$. Очевидно

$$\mathfrak{M}(R_0 h) \equiv \mathfrak{M}_0(R_0 h) + (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0)(R_0 h) \equiv h + Th.$$

Покажем, что Th, как оператор, действующий в пространстве $H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$, имеет малую норму. Допустим вначале, что r кратно s. Тогда применяя формулу Лейбница, находим, что

$$\|Th\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}} \leqslant \delta \|R_0 h\|_{r, r\frac{2m}{s}} + \sum_{|\alpha| < 2m} \left[\sum_{k=1}^{r-s} \|b_\alpha^{(k)}(t, x) D^\alpha (R_0 h)^{(r-s-k)}\|_{0,0} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|\beta| + |\gamma| < (r-s)\frac{2m}{s}} \|D^\beta b_\alpha(t, a) D^{\alpha+\gamma} (R_0 h)\|_{0,0}\right], \ |\beta| \geqslant 1, \tag{3.5}$$

где $\delta=\delta(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, $b_\alpha(t, x)\equiv a_\alpha(t, x)-a_\alpha(t_0, x_0)$.

Используя известное неравенство

$$\|u^{(l-1)}\|_0\leqslant\eta\|u^{(l)}\|_0+C(\eta)\|u\|_0,\ \eta>0,$$

получаем из (3.5) оценку

$$\|Th\|_{r-s,(r-s)\frac{2m}{s}}\leqslant(\delta+\eta C_2)\|R_0h\|_{r,r\frac{2m}{s}}+C_3(\eta)\|R_0h\|_{0,0},$$

откуда, с помощью неравенства (3.4), приходим к тому, что

$$\|Th\|_{r-s,(r-s)\frac{2m}{s}}\leqslant[C_1(\delta+\eta C_2)+\lambda_0^{-\frac{r}{s}}C_1C_3(\eta)]\|h\|_{r-s,(r-s)\frac{2m}{s}}. \qquad (3.6)$$

Последнее неравенство получено для r, кратных s, однако в силу интерполяционных теорем в шкале соболевых пространств (см., например, [9]) оно справедливо для любого целого $r\geqslant 0$.

Полагая в неравенстве (3.6) $\delta>0$ и $\eta>0$ столь малыми, а $\lambda_0>0$ столь большим, чтобы $C_1(\delta+\eta C_2)+\lambda_0^{-\frac{r}{s}}C_1C_3(\eta)\equiv q<1$, получим

$$\|Th\|_{r-s,(r-s)\frac{2m}{s}}\leqslant q\|h\|_{r-s,(r-s)\frac{2m}{s}},$$

что, как известно, влечет обратимость оператора $(I+T)h$.

Следовательно существует непрерывный оператор

$$(I+T)^{-1}:H\left(r-s,(r-s)\frac{2m}{s}\right)\to H\left(r-s,r-s)\frac{2m}{s}\right).$$

Полагая теперь $R=R_0(I+T)^{-1}$, получаем, что $\mathfrak{M}R=I$. Теорема доказана.

§ 4. Краевая задача в ограниченном цилиндре в случае самосопряженного оператора $L(x, D)u$. Фредгольмовость

Пусть $Q=G\times[0, T]$—ограниченный цилиндр с боковой поверхностью $S=\partial G\times[0, T]$.

Рассмотрим в Q уравнение

$$\mathfrak{M}(u)\equiv P_s\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)u+L(x, D)u=h(t, x), \qquad (4.1)$$

где

$$P_s\left(t,\frac{\partial}{\partial t}\right)u\equiv\sum_{q=0}^{s}a_q(t)u^{(q)},\ a_s=\pm 1,$$

$a_q(t)$, $0\leqslant q<s$ — гладкие комплекснозначные функции переменного t.

Оператор $L(x, D)u$ есть, как и раньше, полуограниченный самосопряженный эллиптический оператор порядка $2m$.

К уравнению (4.1) присоединяются дополнительные условия на границе цилиндра Q

$$B_j(x, D)u|_S=0,\ j=1,\cdots, m, \qquad (4.2)$$

$$P_i\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u|_{t=0} = \psi_i(x), \; i=0, \cdots, s-1-k, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{Re}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u|_{t=T} = \chi_l(x), \; l=0, \cdots, k-1. \tag{4.4}$$

Здесь

$$P_i\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \equiv \sum_{q=0}^{n_i} p_{iq}(t, x)\, u^{(q)}, \; p_{in_i}=1,$$

$$\mathrm{Re}\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u \equiv \sum_{q=0}^{n_l} r_{lq}(t, x)\, u^{(q)}, \; r_{ln_l}=1$$

—дифференциальные операторы по t порядков n_i и n_l; число k то же, что и в § 2.

Допустим, что выполнено (см. § 2)

Условие 1. Для любого $\lambda > \bar{\lambda}$, где $\bar{\lambda}$ — некоторое число, справедливы неравенства

1) $\det \|\mu_j^{n_i}\| \neq 0$, $i, j=0, \cdots, s-1-k$, где $\mu_j(\lambda)$—корни алгебраического уравнения

$$a_s \mu^s + \lambda = 0 \tag{4.5}$$

такие, что $\mathrm{Re}\, \mu_j(\lambda) < 0$;

2) $\det \|\mu_j^{n_l}\| \neq 0$, $l, j = 0, \cdots, k-1$, где $\mu_j(\lambda)$ — корни уравнения (4.5), имеющие положительную вещественную часть, т. е. $\mathrm{Re}\, \mu_j(\lambda) < 0$.

Теорема 6. *Если выполнено условие* 1, *то задача* (4.1)—(4.4) *фредгольмова. Это значит, что для любых функций*

$$h(t, x) \in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}, \; \psi_i(x) \in H^{(r-n_i)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\},$$

$$\chi_l(x) \in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\},$$

подчиненных конечному числу независимых условий (пусть число этих условий равно $\varkappa$*), задача* (4.1)—(4.4) *разрешима в пространстве* $H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. *Решение задачи определяется с точностью до любого решения однородной задачи, среди которых имеется ровно* $\varkappa$ *линейно независимых. Кроме того, справедлива следующая двусторонняя оценка*

$$A(h, \psi, \chi) \leqslant C_1 \left(\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}} - \|u\|_{0,0}\right) \leqslant C_2 A(h, \psi, \chi), \tag{4.6}$$

где

$$A(h, \psi, \chi) \equiv \|h\|_{r-s, (r-s)\frac{2m}{s}} + \sum_{i=0}^{s-1-k} \|\psi_i\|_{(r-n_i)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}} + \sum_{l=0}^{k-1} \|\chi_l\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}},$$

C_1, C_2 — *постоянные.*

Для доказательства сформулированной теоремы достаточно доказать следующую теорему.

Теорема 6. *Пусть выполнено условие* 1 *и* $\lambda_0>0$ *достаточно велико. Тогда задача* (4.1)—(4.4) *однозначно разрешима. Это значит, что для любых функций* $h(t, x)\in H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$,

$$\psi_l(x)\in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\},\ \chi_l(x)\in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}$$

существует единственное решение уравнения (4.1), *удовлетворяющее условиям* (4.2)—(4.4). *При этом верна оценка*

$$A(h, \psi, \chi)\leqslant C_1\|u\|_{r, r\frac{2m}{s}}\leqslant A(h, \psi, \chi), \tag{4.7}$$

где C_1, C_2 — *постоянные*.

Действительно, положим

$$\mathrm{B}(u)\equiv(\mathfrak{M}(u),\ P_l u|_{t=0},\ \mathrm{Re}\, u|_{t=T}),$$

где $i=0, \cdots, s-1-k$, $l=0,\cdots, k-1$, и рассмотрим $\mathrm{B}u$ как оператор, отображающий пространство

$$Y=H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}\times\prod_{l=0}^{s-1-k}H^{r\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}\times\prod_{l=0}^{k-1}H^{r\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}$$

в пространство

$$Z=H\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}\times\prod_{l=0}^{s-1-k}H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}\times$$

$$\times\prod_{l=0}^{k-1}H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}.$$

Тогда задача (4.1)—(4.4) эквивалентна операторному уравнению

$$\mathrm{B}(y)=Z,$$

где $y\in Y$, $z\in Z$.

Заметим теперь, что если положить

$$\mathrm{B}_q(u)\equiv(\mathfrak{M}(u)+qu,\ P_l u|_{t=0},\ R_l u|_{t=T}),$$

то $\lambda_{0q}\equiv\lambda_0+q$ будет также сколь угодно большим. Следовательно, по теореме 7 для таких q уравнение $\mathrm{B}_q(y)=Z$ однозначно разрешимо.

С другой стороны, оператор B отличается от оператора B_q на вполне непрерывное слагаемое, ибо вложение $Y\subset Z$ вполне непрерывно. Как известно, фредгольмовость оператора инвариантна относительно вполне непрерывных возмущений. Значит, исходная задача (4.1)—(4.4) фредгольмова, что и доказывает теорему 6.

Доказательство теоремы 7 (изложение следует работе [1]).

Возьмем на отрезке $[0, T]$ достаточно гладкое разбиение единицы

$$\sum_{\nu=1}^{N} \varphi_\nu(t) \equiv 1. \tag{4.8}$$

Очевидно это разбиение можно выбрать так, чтобы носители лишь двух функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_N(t)$ содержали точки $t=0$ и $t=T$ соответственно. Для каждого ν возьмем функцию $\psi_\nu(t) \in C^\infty(0, T)$, равную тождественно единице в окрестности носителя функции $\varphi_\nu(t)$ и нулю в несколько большей окрестности.

Очевидно оператор $\mathbf{B}(u)$ можно представить в виде

$$\mathbf{B}(u) = \sum_{\nu=1}^{N-1} \varphi_\nu \mathbf{B}(\psi_\nu u)$$

или, что то же

$$\mathbf{B}(u) = \varphi_1 \mathbf{B}(\psi_1 u) + \sum_{\nu=2}^{N-1} \varphi_\nu \mathbf{B}(\psi_\nu u) + \varphi_N \mathbf{B}(\psi_N u).$$

Будем считать, что коэффициенты исходного оператора $\mathfrak{M}(u)$ и граничных операторов P_i и R_l определены в бесконечном цилиндре $Q = G \times \mathbf{R}^1$. Тогда операторы $\mathbf{B}(\psi_\nu u) \equiv \mathbf{B}_\nu(\psi_\nu u)$ можно рассматривать для $\nu=2, \cdots, N-2$ во всем цилиндре Q, а для $\nu=1$ и $\nu=N$—в полуограниченном цилиндре $Q = G \times [0, \infty)$ (в последнем случае t заменяется на $-t$).

Положим теперь

$$\mathbf{B}_0(u) = (\mathfrak{M}_0(u), P_{i0}\, u|_{t=0}, R_{l0}\, u|_{t=T}),$$

где

$$\mathfrak{M}_0(u) \equiv a_s u^{(s)} + L(x, D)\, u, \quad P_{i0} u \equiv u^{(n_i)}, \quad R_{l0} u \equiv u^{(n_l)},$$

$$i = 0, \cdots, s-1-k; \quad l = 0, \cdots, k-1.$$

Согласно теоремам 1, 2 и 4 при $\lambda_0 > 0$ операторы $\mathbf{B}_{\nu 0}$ имеют обратные операторы $R_\nu(h, \psi, \chi)$ $(\nu=1, N)$, где $\psi = (\psi_0, \cdots, \psi_{s-1-k})$, $\chi = (\chi_0, \cdots, \chi_{l-1})$ и $R_\nu(h)$, $\nu = 2, \cdots, N-1$.

При этом справедливы соответствующие оценки (1.3), (1.12) или (2.4).

Пусть

$$R(h, \psi, \chi) = \sum_{\mu=1}^{N} \psi_\mu R_\mu(\varphi_\mu h, \varphi_\mu \psi, \varphi_\mu \chi).$$

Тогда оператор $R(h, \psi, \chi)$ действует из пространства Z в пространство Y ограниченным образом. Покажем, что если $\lambda_0 > 0$ достаточно велико, то имеет место формула

$$\mathbf{B} R = I + T, \tag{4.9}$$

где I—единичный оператор в Z, а норма T достаточно мала. Приведем соответствующие рассуждения из работы [1] (стр. 87).

Имеем

$$\mathbf{B} R(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \mathbf{B}_\nu \psi_\nu \psi_\mu R_\mu(\varphi_\mu h, \varphi_\mu \psi, \varphi_\mu \chi).$$

В этой сумме отличны от нуля только те слагаемые, в которых $\psi_\nu\varphi_\mu \neq 0$. Полагая $u_\mu' = R_\mu(\varphi_\mu h, \varphi_\mu\psi, \varphi_\mu\chi)$, мы можем преобразовать такое слагаемое следующим образом:

$$\varphi_\nu \mathbf{B}_\nu \varphi_\nu \psi_\mu u_\mu = \varphi_\nu \mathbf{B}\, \psi_\nu \psi_\mu u_\mu = \varphi_\nu \mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu u_\mu.$$

Иначе говоря, мы можем заменить оператор $\mathbf{B}_\nu$ оператором $\mathbf{B}_\mu$, перейдя при этом к соответствующим локальным координатам. Теперь мы имеем

$$\mathbf{B}\, R(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu R_\mu \varphi_\mu (h, \psi, \chi).$$

Напишем теперь

$$\mathbf{B} R(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_{\mu 0} R_\mu \varphi_\mu (h, \psi, \chi) + T(h, \psi, \chi),$$

где

$$T(h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu [\mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_\mu]\, u_\mu + \sum_\mu \sum_\nu \psi_\nu \psi_\nu \psi_\mu [\mathbf{B}_\mu - \mathbf{B}_{\mu 0}] u_\mu. \tag{4.10}$$

Так как оператор R_μ является обратным к $\mathbf{B}_{\mu 0}$, то

$$\sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_{\mu 0} R_\mu \varphi_\mu (h, \psi, \chi) = \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\mu \psi_\nu \psi_\mu \varphi_\nu (h, \psi, \chi) =$$

$$= \sum_\mu \sum_\nu \varphi_\nu \varphi_\mu (h, \psi, \chi) = \Big(\sum_\nu \varphi_\nu\Big)^2 (h, \psi, \chi) = (h, \psi, \chi),$$

откуда и вытекает формула (4.9)″.

Оценим теперь норму оператора $T(h, \psi, \chi)$, как оператора в пространстве Z.

Пусть $\|\cdot\|_Z$ — норма в пространстве Z, как норма прямого произведения. Имеем для фиксированных μ и ν

$$\|\varphi_\nu [\mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu - \varphi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_\mu]\, u_\mu\|_Z \leqslant C \Big\{ \|[\mathfrak{M}\, \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu \mathfrak{M}]\, u_\mu\|_{r-s,\ (r-s)\frac{2m}{s}} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{s-1-k} \|[P_l \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu P_l]\, u_\mu\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s} - \frac{m}{s}} +$$

$$+ \sum_{l=0}^{k-1} \|[R_l \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu R_l]\, u_\mu\|_{(r-n_l)\frac{2m}{s} - \frac{m}{s}}. \tag{4.11}$$

Очевидно операторы, стоящие в квадратных скобках, ни содержат старших членов. Воспользуемся теперь для оценки правой части в (4.11) неравенствами (1.3), (1.12) и (2.4) (оценки для u_μ) и тем фактом, что производные промежуточного порядка оцениваются через старшие производные со сколь угодно малым коэффициентом и саму функцию, т. е.

$$\|u^{(q)}\|_0 \leqslant \varepsilon \|u^{(s)}\|_0 + C(\varepsilon) \|u\|_0, \quad 0 \leqslant q < s.$$

Тогда получим неравенство

$$\|\varphi_\nu [\mathbf{B}_\mu \psi_\nu \psi_\mu - \psi_\nu \psi_\mu \mathbf{B}_\mu]\, u_\mu\|_Z \leqslant (\varepsilon + C(\lambda_0)) \|(h, \psi, \chi)\|_Z,$$

где ε сколь угодно мало, а $C(\lambda_0) \to 0$ при $\lambda_0 \to +\infty$ и не зависит от рассматриваемых функций.

Точно также оценивается и второе слагаемое в формуле (4.10). Следовательно при достаточно большом $\lambda_0 > 0$ получаем оценку

$$\|T(h, \psi, \chi)\|_Z \leqslant \frac{1}{2} \|(h, \psi, \chi)\|_Z,$$

из которой вытекает, что оператор $I + T$ обратим. Положив теперь $\mathbf{B}^{-1} = R(I+T)^{-1}$, убеждаемся, что $\mathbf{B}^{-1}$ есть правый обратный для оператора $\mathbf{B}$. Он же является и левым обратным. Априорная оценка (4.7) устанавливается совершенно аналогичными рассуждениями с разбиением единицы (ср. стр. 76—79 в [1]). Теорема доказана.

§ 5. Обобщение предыдущих результатов

Пусть Q — ограниченный цилиндр с боковой поверхностью S. Требуется найти решение эллиптико-параболического уравнения

$$\mathfrak{M}(u) \equiv P_s\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) u + L(t, x, D)\, u = h(t, x) \tag{5.1}$$

с коэффициентами, зависящими от t и x; $a_s = \pm 1$. К уравнению (5.1) присоединяются граничные условия (4.2)—(4.4).

Допустим, что выполнены следующие условия.

I. Для любого фиксированного $t \in [0, T]$ оператор $L(t, x, D)$ полуограничен снизу, т. е.

$$\lambda_0(t) = \inf_{u \in H^{2m}\{B_j\}} \frac{\operatorname{Re}(L(t, x, D)\, u, \bar{u})}{(u, \bar{u})} > -\infty.$$

II. Для любых фиксированных $t \in [0, \varepsilon]$ $(t \in [T-\varepsilon, T])$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое число, оператор $L(t, x, D) \equiv L(0, x, D)$ $(L(t, x, D) \equiv L(T, x, D))$ является самосопряженным оператором в пространстве $H^{2m}\{B_j\}$.

III. Граничные операторы удовлетворяют условию 1 § 4.

IV. Коэффициенты оператора $\mathfrak{M}(u)$ и граничных операторов (4.2)—(4.4) достаточно гладки, причем $a_q(t, x) \equiv a_q(t)$ для $t \in [0, \varepsilon]$ и $t \in [T-\varepsilon, T]$.

Прежде, чем сформулировать основную теорему этого параграфа, введем необходимые пространства. Обозначим через $\tilde{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ пространство функций $u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, удовлетворяющих условиям (4.2) и таких, что если $\varphi(t) \in C^\infty[0, T]$ и $\operatorname{supp}\varphi(t) \cap [0, \varepsilon] \neq \varnothing$ или $\operatorname{supp}\varphi(t) \cap [T-\varepsilon, T] \neq \varnothing$, то $\varphi(t)\, u(t, x) \in H\left(r, r\frac{2m}{s}\right)\{B_j\}$. Иными словами, от функций $u(t, x) \in \tilde{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$ требуется, чтобы в некоторых окрестностях точек $t=0$ и $t=T$ они разлагались в ряды по собственным функциям операторов $L(0, x, D)$ и $L(T, x, D)$ соответственно. В остальном они произвольны.

Теорема 8. *Если выполнены условия* I—IV, *то задача* (5.1), (4.2) *и* (4.4) *фредгольмова.*

Это значит, что для любых функций

$$h(t, x) \in \widetilde{H}\left(r-s, (r-s)\frac{2m}{s}\right)$$

$$\psi_i(x) \in H^{(r-n_i)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\} \ (i=0, \cdots, s-1-k), \ \chi_l(x) \in H^{(r-n_l)\frac{2m}{s}-\frac{m}{s}}\{B_j\}$$

$$(l=0, \cdots, k-1),$$

подчиненных конечному числу условий $\varkappa$, *существует решение задачи* (5.1), (4.2)—(4.4) $u(t, x) \in \widetilde{H}\left(r, r\frac{2m}{s}\right)$, *определяемое с точностью до* $\varkappa$ *линейно независимых решений однородной задачи. Если же* $\lambda_0 = \min \lambda_0(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$ *достаточно велико, то* $\varkappa = 0$, *т. е. имеется изоморфизм. При этом справедливы оценки* (4.6) *и* (4.7) *соответственно.*

Доказательство этой теоремы проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 7, только разбиение единицы следует взять и по x. При этом, поскольку коэффициенты главной части оператора $L(t, x, D)$ и, вообще говоря, переменны, следует по ним сделать локализацию (см. [1]), воспользовавшись при оценке оператора $T(h, \psi, \chi)$ теоремами 3 из § 1 и 4 из § 2, а также теоремой 5 из § 3. Выкладки остаются прежними. Теорема 8 доказана.

§ 6. Аналог задачи Дирихле. Теорема единственности

В этом параграфе рассмотрим простейший пример задачи, которая изучалась в предыдущем параграфе. Именно, ищется решение следующей задачи:

$$P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u + L(x, D) u = h(t, x), \tag{6.1}$$

$$B_j(x, D) u|_S = 0, \ j=1, \cdots, m, \tag{6.2}$$

$$u(0, x) = 0, \cdots, u^{(s-1-k)}(0, x) = 0, \tag{6.3}$$

$$u(T, x) = 0, \cdots, u^{(k-1)}(T, x) = 0. \tag{6.4}$$

Как вытекает из теоремы 6 задача (6.1)—(6.4) фредгольмова. Сейчас нас будет интересовать вопрос однозначной разрешимости этой задачи. Справедлив следующий результат.

Теорема 9 (теорема единственности). *Если полином*

$$A(\tau, \lambda_0) \equiv \operatorname{Re} \sum_{q=0}^{s} a_q (i\tau)^q + \lambda_0 > 0,$$

то задача (6.1)—(6.4) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $s=2k+1$, $(-1)^k a_s>0$. Тогда условия (6.2)—(6.3) принимают вид

$$u(0,x)=0,\cdots,\ u^{(k)}(0,x)=0, \tag{6.5}$$

$$u(T,x)=0,\cdots,\ u^{(k-1)}(T,x)=0. \tag{6.6}$$

Допустим, что $h(t,x)\equiv 0$ и покажем, что решение нашей задачи $u(t,x)\equiv 0$. Имеем

$$\left[P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u,\ \bar{u}\right]+[L(x,D)\,u,\ \bar{u}]=0, \tag{6.7}$$

где $[u,v]$ означает интеграл по Q.

Продолжим решение $u(t,x)$ тождественным нулем для $t\leqslant 0$ и $t>T$, обозначив полученное продолжение по-прежнему $u(t,x)$. Легко видеть, что

$$\left[P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u,\ \bar{u}\right]\equiv\sum_{q=0}^{s}a_q[u^{(q)},\bar{u}]=(-1)^k a_s\,[u^{(k+1)},\ \bar{u}^{(k)}]+$$
$$+\sum_{q=0}^{2k}(-1)^l\,[u^{(q-l)},\ \bar{u}^{(l)}],$$

где $0\leqslant l\leqslant k$. Далее находим, что

$$\operatorname{Re}\left[P_s\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u,\ \bar{u}\right]=(-1)^k\frac{a_s}{2}\|u^{(k)}(T,x)\|_0^2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_G\operatorname{Re}\sum_{q=0}^{s}a_q\,(i\tau)^q\,|\tilde{u}(\tau,x)|^2 d\tau dx,$$

где $\tilde{u}(\tau,x)$— преобразование Фурье по t функции $u(t,x)$. Следовательно, учитывая определение числа λ_0, из (6.7) выводим неравенство

$$(-1)^k\frac{a_s}{2}\|u^{(k)}(T,x)\|_0^2+\int_{-\infty}^{\infty}\int_G A(\tau,\lambda_0)\,|\tilde{u}(\tau,x)|^2\,d\tau dx\leqslant 0.$$

Поскольку полином $A(\tau,\lambda_0)>0$, то это означает, что $\tilde{u}(\tau,x)\equiv 0$, т. е. и $u(t,x)\equiv 0$. Случаи $s=2k+1$, $(-1)^k a_s<0$ и $s=2k$ трактуются аналогично. Теорема единственности доказана.

Примеры

1. Рассмотрим уравнение

$$-u'''+(-1)^m\,\Delta^m u=h(t,x).$$

В этом случае требуется найти решение при условиях (6.2) такое, что $u(0,x)=u'(0,x)=0$ и $u(T,x)=0$. Задача имеет единственное решение для любой правой части $h(t,x)$.

2. Рассмотрим уравнение

$$u'''+(-1)^m\,\Delta^m u=h(t,x).$$

В этом случае, наоборот, $u(0,x)=0$ и $u(T,x)=0$, $u'(T,x)=0$. Задача однозначно разрешима.

3. Рассмотрим уравнение четного порядка

$$u^{(2k)} + (-1)^{m-k}\, \Delta^m u = h\,(t,\, x).$$

Для этого уравнения условия по t (6.2), (6.3) превращаются в условия Дирихле $u\,(0,\, x) = 0, \cdots,\ u^{(k-1)}\,(0,\, x) = 0,\ u\,(T,\, x) = 0, \cdots,\ u^{(k-1)} \times (T,\, x) = 0$, определяющие корректную задачу.

Московский энергетический
институт

Поступило 20.У.1968

ՅՈՒ. Ա. ԴՈՒԲԻՆՍԿԻ. Կոշու խնդրի և հաստատուն գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների մի դասի եզրային խնդիրների մասին (*ամփոփում*)

Դիցուք $Q = I \times G$ $(I = (-\infty,\, +\infty),\ I = [0,\, +\infty)$ *կամ* $I = [0,\ T],\ T < \infty;\ G \subset R)$ *գլանային տիրույթ է.*

Տիրույթում դիտարկվում է

$$P_s\left(\frac{\partial}{\partial t},\, x,\, t\right) u + L\,(D,\, x,\, t)\; u = h\,(x,\, t)$$

տեսքի էլիպտիկա-պարաբոլական հավասարումների համար ընդհանուր եզրային խնդիր, որտեղ $P_s\,(x,\, t,\, \tau)$*-ն* $s > 1$ *կարգի բազմանդամ է* τ*-ից,* L*-ը՝* $2m$ *կարգի էլիպտական օպերատոր։*

Հիմնական արդյունքը՝ այդ խնդիրը նորմալ լուծելի է։

YU. A. DUBINSKII. *On Cauchy and boundary problems for a class of differential equations with constant coefficients* (summary)

Let $Q = I \times G$ $(I = (-\infty,\, +\infty),\ I = [0,\, +\infty]$ or $I = [0,\ T],\ T < \infty;\ G \subset R)$ be a cylindrical domain. General boundary problems for elliptic-parabolic equations

$$P_s\left(\frac{\partial}{\partial t},\, x,\, t\right) u + L\,(D,\, x,\, t)\; u = h\,(x,\, t),$$

where $P_s\,(x,\, t,\, \tau)$ is polinomial of τ of degree $s > 1$, L— elliptic operator of order 2m, are considered in Q.

As a main result—the normal solvability of the problems is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, 19, вып. 3, 1964, 53—161.
2. *S. Agmon.* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems, Comm. pure appl. math., XV, 1962, 119—147.
3. *Н. И. Бриш, И. Н. Валешкевич.* Метод Фурье для нестационарных уравнений с общими краевыми условиями, Дифф. уравн., 1, № 3, 1965, 523—528.
4. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, вып. 3, 1965, 90—153.
5. *Л. Р. Волевич, Б. П. Панеях.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения, УМН, XX, вып. 1, 1965, 3—74.
6. *Ю. А. Дубинский.* Задача Коши для операторно-дифференциальных уравнений, ДАН СССР, 1968.
7. *Ю. А. Дубинский.* Смешанные задачи для некоторых классов дифференциальных уравнений с частными производными, Труды Моск. матем. об-а, 1969.

8. *Ю. А. Дубинский.* Периодические решения эллиптико-параболических уравнений, Мат. сб., 1968.
9. *Э. Мадженес.* Интерполяционные пространства и уравнения с частными производными, УМН, XXI, вып. 2, 1966, 169—218.
10. *Л. Н. Слободецкий.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 197, 1958, 54—112.
11. *С. Л. Соболев.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962.
12. *M. Schechter.* General boundary value problems for elliptic partial differential equations, Comm. pure appl. math., XII, № 3, 1959, 457—486, русский перевод, Математика, т. 4:5, 1960.
13. *M. Schechter.* Remarks on elliptic boundary value problems, Comm. pure appl. math., XII, № 4, 1959, 561—578, русский перевод, Математика, т. 4 : 6, 1960, 3—22.