ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

А. Б. НЕРСЕСЯН

О БЕСКОНЕЧНО ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В работе [1] изучалась следующая задача Коши:

$$AU_{xx} + 2BU_{xt} + U_{tt} = aU_x + bU_t + CU + f, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$U(0, x) = \mu(x), \; U_t(0, x) = \nu(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{2}$$

где

$$\lambda^2(t, x) = B^2 - A > 0 \; (t > 0), \; \lambda(0, x) \geqslant 0, \tag{3}$$

т. е. на оси $t = 0$ допускается параболическое вырождение.

Оказывается ([1], теорема 1), что задача (1)—(2) корректна при определенных ограничениях на поведение коэффициентов a и b при $t \to 0$, причем эти ограничения тем слабее, чем больше производных по x имеют данные задачи.

В частности ([1], теорема 2), если все данные аналитичны по x, то существует единственное аналитическое по x решение без каких-либо иных ограничений на a и b.

В предлагаемой заметке исследуется промежуточный случай, а именно: предполагается, что данные задачи (1)—(2) бесконечно дифференцируемы по x (но, вообще говоря, не аналитичны) и находятся ограничения на a и b, обеспечивающие существование и единственность бесконечно дифференцируемого решения из определенного класса и позволяющие судить о характере устойчивости и о структуре решения (п. 3°).

1°. Характеристики уравнения (1) определяются из соотношений

$$dx = \Phi_i(t, x)\, dt \; (t \geqslant 0, \; i = 1, 2), \tag{4}$$

где

$$\Phi_1 = B + \lambda, \; \Phi_2 = B - \lambda, \; A = \Phi_1 \Phi_2. \tag{4'}$$

Обозначив правую часть уравнения (1) через $F(t, x, u, u_t, u_x)$, перепишем его в следующих двух эквивалентных формах:

$$\sqrt{1 + \Phi_1^2}\, \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1 + \Phi_2^2}\, \frac{\partial u}{\partial s_2} = F + (\Phi_{2t} + \Phi_1 \Phi_{2x})\, u_x, \tag{5}$$

$$\sqrt{1 + \Phi_2^2}\, \frac{\partial}{\partial s_2} \sqrt{1 + \Phi_1^2}\, \frac{\partial u}{\partial s_1} = F + (\Phi_{1t} + \Phi_2 \Phi_{1x})\, u_x,$$

где через s_1 и s_2 обозначены характеристические направления, составляющие с осью $x = 0$ острый угол.

Обозначим теперь через $l_i = l_i(t, x)$ $(i = 1, 2)$ кусок характеристики с направлением s_i, заключенный между точкой (t, x) и осью $t = 0$, а также введем новые неизвестные функции

$$V = u_x, \quad W = \sqrt{1 + \Phi_1^2}\,\frac{\partial u}{\partial s_2}. \tag{6}$$

Тогда задача (1)—(2) приводится к системе (без ограничения общности можно считать, что $\mu \equiv \nu \equiv 0$)

$$2\lambda V = \int\limits_{l_2} \{F + (\Phi_{1t} + \Phi_2\Phi_{1x})\, V\}\, dt - \int\limits_{l_1} \{F + (\Phi_{2t} + \Phi_1\Phi_{2x})\, V\}\, dt, \tag{7}$$

$$W = \int\limits_{l_2} \{F + (\Phi_{1t} + \Phi_2\Phi_{1x})\, V\}\, dt, \tag{8}$$

где

$$F = F\Big(t, x, \int\limits_{l_2} w\,dt,\ w - \Phi_1 V,\ V\Big). \tag{9}$$

Можно показать, что если существует решение системы (7)—(8), непрерывно дифференцируемое и такое, что $V(+0, x) = 0$, то решение задачи (1)—(2) можно восстановить по этому решению по формулам (6) (обратное утверждение очевидно).

При решении системы (7)—(8) основные затруднения связаны с наличием в левой части уравнения (7) множителя λ, обращающегося, вообще говоря, в нуль при $t = 0$. В частности, когда $b \equiv c \equiv 0$, система эта распадается, причем уравнение (8) оказывается обыкновенным вольтерровским, а уравнение (7) принимает вид

$$2\lambda V = 2\int\limits_{l_2} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial s_2} + \beta\lambda\right) V\, dt + \int\limits_{l_2 - l_1} (\alpha V + f)\, dx, \tag{10}$$

где

$$\alpha = a + \Phi_{2t} + \Phi_1\Phi_{2x}, \quad \beta = -\Phi_{2x}. \tag{10'}$$

Последний интеграл в уравнении (10) можно переписать в виде

$$\iint \frac{\partial}{\partial x}\,(\alpha V + f)\, dx\,dt, \tag{11}$$

где двойной интеграл (здесь и далее) берется по характеристическому треугольнику, ограниченному осью $t = 0$ и характеристиками l_1 и l_2.

Оказывается, что уравнение (10) уже содержит в себе все специфические особенности системы (7)—(8), так что предположение $b \equiv c \equiv 0$, по сути, не является ограничением в том смысле, что присутствие этих коэффициентов не создает никаких дополнительных затруднений (кроме громоздкости выкладок).

2°. Мы будем считать, что все коэффициенты уравнения (1) и функции f, μ и ν принадлежат по переменному x классу Жеврея J_γ $(\gamma > 1)$, состоящему из бесконечно дифференцируемых на отрезке [0,1] функций, удовлетворяющих оценкам

$$\left|\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^p}\right| \leqslant (\mathrm{const})^p\, \Gamma\,(1+\gamma_p) \qquad (p=0,\,1,\,2,\cdots). \tag{12}$$

Решение $u(t,\,x)$ также будем искать в некотором классе $\mathcal{J}_{\gamma_1}$, причем в этом случае постоянная в правой части неравенства (12) (так же, как и для функций A, B, a, b, c и f) считается не зависящей от t.

Сначала остановимся на простейшем частном случае, когда функции A, B и a от x не зависят, $b\equiv 0$ и $c\equiv 0$. В этом случае уравнение (10) перепишется в виде

$$2\lambda V = 2\int\limits_{l_2}\frac{\partial\lambda}{\partial s_2}\,V\,dt + \iint a\,V_x\,dxdt + \iint f_x\,dxdt. \tag{13}$$

Применим теперь следующую схему последовательных приближений: обозначим $V^0\equiv 0$, $V^n - V^{n-1} = \varepsilon^n$ $(n>1)$,

$$2\lambda\varepsilon^n = 2\int\limits_{l_2}\frac{\partial\lambda}{\partial s_2}\,\varepsilon^n\,dt + \iint a\,\varepsilon_x^{n-1}\,dt \quad (n=1,\,2,\cdots), \tag{14}$$

где

$$2\lambda\varepsilon^0\,(t,\,x) = 2\int\limits_{l_2}\frac{\partial\lambda}{\partial s_2}\,\varepsilon^0\,dt + \iint f_x\,dxdt. \tag{14'}$$

Функцию ε^0 легко можно определить из уравнения (14′) в явной форме

$$\varepsilon^0 = \int\limits_{l_2}\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\iint f_x\,dxdt\right)dt =$$

$$= \int\limits_{l_2}\frac{1}{\lambda}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\int\limits_{l_2-l_1} f dt\right)dt + \int\limits_{l_2}\int\limits_{l_1} f_x\,dtdt. \tag{15}$$

Точно так же получим

$$\varepsilon^n\,(t,\,x) = \int\limits_{l_2}\int\limits_{l_1}(a\,\varepsilon^{n-1})_x\,dtdt \quad (n=1,\,2,\cdots). \tag{15'}$$

С другой стороны, решение уравнения (14) (если считать ε^{n-1} заданным и учитывать вид (10)) можно переписать в виде

$$2\lambda\,\varepsilon^n\,(t,\,x) = \int\limits_{l_2-l_1} a\,\varepsilon^{n-1}\,dt - \lambda\int\limits_{l_2}\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\int\limits_{l_2'-l_1} a\,\varepsilon^{n-1}\,dtdt. \tag{16}$$

Эта формула справедлива, так как интегралы справа сходятся. В этом легко убедиться, прибегнув к индукции на основании формул (15) и (15′) и учитывая бесконечную дифференцируемость f.

После k-кратного $(0\leqslant k\leqslant n-1)$ применения формулы (16) получим

$$\max_x |\varepsilon^n| \leqslant \frac{1}{\lambda}\int_0^t |\alpha| \max_x |\varepsilon^{n-1}|\, dt - \int_0^t \int_0^\tau |\alpha| \max_x |\varepsilon^{n-1}|\, d\tau d\left(\frac{1}{\lambda}\right) =$$

$$= \int_0^t \frac{|\alpha|}{\lambda} \max_x |\varepsilon^{n-1}|\, dt \leqslant \frac{1}{k!}\int_0^t \frac{|\alpha(t_1)|}{\lambda(t_1)} \left\{\int_{t_1}^t \frac{|\alpha(\tau)|}{\lambda(\tau)}\, d\tau\right\}^k \max_x |\varepsilon^{n-k-1}|\, dt_1. \quad (17)$$

С другой стороны, из формулы (15′) таким же образом получим

$$\max_x |\varepsilon^{n-k-1}(t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \int_0^{t_1} |\alpha(t_2)| \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} |\alpha(t_3)| \cdots \int_0^{t_{2(n-k-1)}} \int_0^{t_{2(n-k)-1}} |\alpha(t_{2(n-k)})| \max_x \left|\frac{\partial^{n-k} f}{\partial x^{n-k}}\right| \times$$

$$\times dt_{2(n-k)} \cdots dt_1 = \frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^t \tau |\alpha(\tau)| \left\{\int_\tau^t \tau_1 |\alpha(\tau_1)|\, d\tau_1\right\}^{n-k} \max_x \left|\frac{\partial^{n-k} f(\tau, x)}{\partial x^{n-k}}\right| d\tau.$$

(18)

Таким образом, поскольку $f \in J_\gamma$ (см. (12)), приходим к следующей оценке

$$\max_x |\varepsilon^n(t, x)| \leqslant \frac{(\mathrm{const})^{n-k}\, \Gamma(1 + \gamma(n-k))}{k!\,(n-k)!} \times$$

$$\times \int_0^t \frac{|\alpha(\tau)|}{\lambda(\tau)} \left[\int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|}{\lambda(s)}\, ds\right]^k \left[\int_0^\tau s\, |\alpha(s)|\, ds\right]^{n-k} d\tau \quad (0 \leqslant k \leqslant n-1). \quad (19)$$

3°. Сформулируем и докажем теперь основной результат.

Теорема. *Пусть коэффициенты уравнения* (1) *и функции* f, μ *и* ν *принадлежат классу* J_γ $(\gamma \geqslant 1)$ *и непрерывны при* $t \geqslant 0$ *и, кроме того,* A *и* B *непрерывно дифференцируемы при* $t \geqslant 0$.

Тогда, если

$$\lim_{t\to 0} \max_{0 < \tau < t} \left(\int_0^\tau \tau \alpha^*(\tau)\, d\tau\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_\tau^t \frac{\alpha^*(\tau)}{\lambda_*(\tau)}\, d\tau\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 0, \quad (20)$$

где

$$\alpha^*(t) = \max_x |\alpha(t, x)|, \quad \lambda_*(t) = \min_x \lambda(t, x),$$

то в некоторой полосе $0 \leqslant t \leqslant h$ *(где* h*, вообще говоря, зависит от* f, μ *и* ν*) задача* (1)—(2) *имеет единственное решение* $u(t, x) \in J_\gamma$. *Решение это устойчиво в следующем смысле: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что лишь только*

$$\left|\frac{d^k \mu}{dx^k}\right|, \left|\frac{d^k \nu}{dx^k}\right|, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right| < \delta M^k\, \Gamma(1 + \gamma k) \quad (k \geqslant 0),$$

то

$$\left|\frac{\partial^k u}{\partial x^k}\right| \leqslant \varepsilon M_1^k \Gamma(1+\gamma k) \quad (k>0),$$

где M_1 *не зависит от* δ.

Доказательство проведем сначала для случая, разобранного в 2°, т. е. при $b\equiv c\equiv 0$ и когда A, B и a от x не зависят.

Выберем в формуле (19) k таким, чтобы

$$1+k=\frac{\gamma-1}{\gamma} n-\theta_n, \quad 0<\theta_n<1. \tag{21}$$

Тогда из (19) имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\varepsilon^n(t, x)| \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{n=0}^{\infty} (\text{const})^n \int_0^t \left(\int_0^\tau s\,|\alpha(s)|\, ds\right)^{\frac{n}{\gamma}+1} d_\tau \left(\int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|\, ds}{\lambda(s)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma} n} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (\text{const})^n \left\{\left(\int_0^\tau s\,|\alpha(s)|\, ds\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|}{\lambda(s)}\, ds\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}^n d\tau. \tag{22}$$

Из условия (20) следует, что ряд (22) равномерно сходится при подходящем выборе $t<h$.

Таким образом, существует решение V задачи (1)—(2). Это решение будет бесконечно дифференцируемым.

Действительно, из оценок типа (17)—(18) без труда можно получить следующее обобщение оценки (19):

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p}\varepsilon^n(t, x)\right| \leqslant \frac{(\text{const})^{n-k+p}\,\Gamma(1+\gamma(n-k+p))}{k!\,(n-k)!} I_{nk}(t), \tag{23}$$

где интегральный множитель $I_{nk}(t)$ — тот же, что и в формуле (19). В силу (21) получим

$$\left|\frac{\partial^p \varepsilon^n}{\partial x^p}\right| \leqslant \frac{(\text{const})^{n+p}\,\Gamma(1+n+\gamma(p+1))}{\Gamma(n+1)} I_{nk}. \tag{23'}$$

Если теперь воспользоваться известной формулой Эйлера

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x}\, dx \quad (a>0), \tag{24}$$

то при достаточно малом t из (23) получим (так же, как и в (22)),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\partial^p \varepsilon^n}{\partial x^p}\right| \leqslant \int_0^\infty e^{-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\text{const})^{n+p}\, x^{\gamma(p+1)+n}}{\Gamma(n+1)} \times$$

$$\times \int_0^t \left\{\left(\int_0^\tau s\,|\alpha(s)|\, ds\right)^{\frac{1}{\gamma}} \left(\int_\tau^t \frac{|\alpha(s)|}{\lambda(s)}\, ds\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\right\}^n d\tau\, dx \leqslant$$

$$\leqslant (\text{const})^{\mu} \int\limits_0^\infty x^{\gamma(p+1)} e^{-(1-\theta)x}\, dx, \quad 0 \leqslant \theta < 1, \tag{25}$$

откуда немедленно следует, что $V \in J_\gamma$, т. е. $U \in J_\gamma$.

В случае, когда данные задачи (1)—(2) зависят от x, доказательство будет дано в пункте 5°.

4°. Пусть $\{\varphi_k(t, x)\}_1^\infty$ — бесконечно дифференцируемые по x функции. Рассмотрим выражение

$$L_k = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_k(t^{(k)}, x) \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{k-1}(t^{(k-1)}, x) \cdots \frac{\partial}{\partial x} \varphi_1(t^{(1)}, x) \quad (k \geqslant 1,\ 0 \leqslant t^{(j)} \leqslant h). \tag{26}$$

Справедлива

Лемма. *Если*

$$\left|\frac{\partial^i}{\partial x^i} \varphi_k(t, x)\right| \leqslant M^i \Gamma(1 + \gamma i) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant h,\ \gamma \geqslant 1,\ i \geqslant 0,\ k \geqslant 1), \tag{27}$$

где $M = \text{const}$ *не зависит от* t *и* k, *то*

$$|L_k| \leqslant (\text{const})^k \Gamma(1 + \gamma^k) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1,\ k \geqslant 1). \tag{27'}$$

Доказательство. При $k = 1$ оценка (27′) очевидна. Более того, из (27) следует, что

$$\left|\frac{\partial^i}{\partial x^i} L_1\right| \leqslant M^{i+1} \Gamma(1 + \gamma(i+1)).$$

Пусть теперь при $p \geqslant 0$ и некотором $n \geqslant 1$

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_n\right| \leqslant M_1^{n+p} \Gamma(1 + \gamma(n+p)). \tag{28}$$

Докажем, что тогда неравенство (28) справедливо и при замене n на $n+1$ (откуда, в частности, будет следовать лемма).

Действительно, из (26) имеем

$$\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1} = \frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(L_n \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \varphi_k \frac{\partial}{\partial x} L_n\right).$$

Раскрыв это выражение и применив оценки (27) и (28), получим

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1}\right| \leqslant \sum_{j=0}^{p} C_j^p \left\{\left|\frac{\partial^{1+j} \varphi_k}{\partial x^{1+j}} \frac{\partial^{p-j} L_n}{\partial x^{p-j}}\right| + \left|\frac{\partial^j \varphi_k}{\partial x^j} \frac{\partial^{p-j+1} L_n}{\partial x^{p-j+1}}\right|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{p} C_j^p [M^{1+j} M_1^{p-j+n} \Gamma(1 + \gamma(1+j)) \Gamma(1 + \gamma(p-j+n)) +$$
$$+ M^j M_1^{p-j+n+1} \Gamma(1 + \gamma j) \Gamma(1 + \gamma(p-j+n+1))]. \tag{29}$$

Воспользовавшись формулой (24), заметим, что

$$T_{pn}^a(\alpha, \beta) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} a^j C_j^p \Gamma(\alpha + \gamma j) \Gamma(\beta + \gamma(p-j+n)) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} a^j\, C_j^p \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2)}\, x_1^{\alpha+\gamma j-1}\, x_2^{\beta+\gamma(p-j+n)-1}\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-(x_1+x_2)}\, x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta+\gamma n-1}\, (a x_1^{\gamma}+x_2^{\gamma})^p\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_0^{\infty}\int_{x_2}^{\infty} e^{-s}\, (s-x_2)^{\alpha-1}\, x_2^{\beta+\gamma n-1}\, [a\,(s-x_2)^{\gamma}+x_2^{\gamma}]^p\, ds dx_2 =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-s}\int_0^{s} (s-x_2)^{\alpha-1} x_2^{\beta+\gamma n-1}\, [a\,(s-x_2)^{\gamma}+x_2^{\gamma}]^p\, dx_2 ds\ (a>0). \tag{30}$$

Но при фиксированном $s>0$ нетрудно доказать, что

$$a\,(s-x_2)^{\gamma}+x_2^{\gamma} \leqslant K_a\, s^{\gamma}\ \ (0 \leqslant x_2 \leqslant s), \tag{30'}$$

где

$$K_a = \left(1+a^{\frac{1}{\gamma-1}}\right)^{1-\gamma} a,\ \gamma>1\ (\text{при}\ \gamma=1\ \ K_a=a). \tag{30''}$$

Таким образом, из (30) и (30′) получим оценку

$$T_{pn}^{a}(\alpha,\beta) \leqslant (K_a)^p \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\gamma p} \int_0^{s} (s-x_2)^{\alpha-1} x_2^{\beta+\gamma n-1}\, dx_2 ds =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+\gamma_n)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma_n)} (K_a)^p \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\alpha+\beta+\gamma(n+p)-1}\, ds =$$

$$= (K_a)^p\, \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta+\gamma_n)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma_n)}\, \Gamma(\alpha+\beta+\gamma(n+p)). \tag{31}$$

Применив оценку (31) к неравенству (29), получим

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1}\right| \leqslant M M_1^{p+n}\, T_{pn}^{a}(\gamma+1,\ 1) +$$

$$+ M_1^{p+n+1}\, T_{pn}^{a}(1,\ \gamma+1) \leqslant M_1^{p+n} (K_a)^p \times$$

$$\times \frac{\Gamma(2+\gamma(n+p+1))}{\Gamma(2+\gamma(n+1))}\, [M\Gamma(\gamma+1)\,\Gamma(1+\gamma n)+M_1\,\Gamma(1+\gamma(1+n))]$$

$$\left(a=\frac{M}{M_1}\right). \tag{32}$$

Приняв теперь $M_1>M$ и учитывая известную формулу Стирлинга

$$\Gamma(a)=\sqrt{2\pi}\, a^{a-\frac{1}{2}}\, e^{-a}\, e^{\frac{\theta}{12a}},\ 0<\theta<1,\ a>0,$$

получим

$$\left|\frac{\partial^p}{\partial x^p} L_{n+1}\right| \leqslant N (K_a)^p M_1^{p+n+1} \left(1+\frac{p}{n}\right) \Gamma(1+\gamma(n+p+1)), \tag{32'}$$

где $a=\frac{M}{M_1}$, и $N=\text{const}$ не зависит от n и p.

Заметим теперь, что при $a \to 0$ $K_a \sim a$ (см. (30″)), так что, выбрав $\frac{M}{M_1}$ достаточно малым (т. е. M_1 достаточно большим), из (32′) получим, что оценка (28) справедлива и при замене n на $n+1$. Лемма доказана.

5°. Наметим теперь доказательство теоремы п. 3° в общем случае. Пусть сначала, все же, $b \equiv c \equiv 0$ (чтобы не иметь дела с системой).

Тогда нетрудно видеть, что формула (16) не изменится. Что же касается равенства (15′), то оно, так же как и оценка (17), не изменится, однако при обобщении неравенства (18) нужно учитывать, что от x зависят как α, так и кривые l_i. Тем не менее не представляет труда убедиться, что лемма предыдущего пункта позволяет обойти все возникающие трудности, и оценки (19)—(25) остаются в силе.

Что же касается случая, когда a и b могут быть отличны от нуля, то тогда нужно применить следующую схему последовательных приближений к системе (7)—(8):

$$2\lambda V_n = 2\int\limits_{l_2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s_2} - \lambda\Phi_{2x}\right) V_n\, dt +$$

$$+\int\limits_{l_2 - l_1}\left\{(\Phi_{1t} - \Phi_2\Phi_{1x})\, V_{n-1} + F\left(t, x, \int\limits_{l_1} W_n\, dt,\ W_n - \Phi_1 V_{n-1},\ V_{n-1}\right)\right\} dt, \tag{33}$$

$$W_n = \int\limits_{\gamma_2}\left\{(\Phi_{1t} - \Phi_2\Phi_{1x})\, V_{n-1} + F\left(t, x, \int\limits_{l_1} W_n\, dt,\ W_n - \Phi_1 V_{n-1},\ V_{n-1}\right)\right\} dt. \tag{33'}$$

Уравнения (33) относительно V_n и (33′) относительно W_n без труда решаются, так как соответствующие ядра непрерывны. Все остальные препятствия могут быть преодолены применением леммы п. 4° и оценок типа оценок п. 3°.

Что касается замечания о характере устойчивости решения задачи, то оно очевидным образом следует из полученных оценок.

6°. В заключение рассмотрим интересный частный случай

$$u_{tt} - t^{2\alpha} u_{xx} = au_x + bu_t + cu + f, \tag{34}$$

где $\alpha > 0$. Пусть

$$|a(t, x)| \leqslant \text{const}\cdot t^\beta \quad (0 \leqslant \beta < \alpha - 1). \tag{34'}$$

Тогда

$$\int\limits_0^\tau s a^*(s)\, ds = \frac{1}{\beta+2}\,\tau^{\beta+2},$$

$$\int_{\tau}^{t}\frac{\alpha^{*}(s)}{\lambda(s)}\,ds=\frac{1}{\beta-\alpha+1}\left(t^{\beta-\alpha+1}-\tau^{\beta-\alpha+1}\right).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\max_{0\leqslant\tau\leqslant t}\tau^{\frac{\beta+2}{\gamma}}\left(t^{\beta-\alpha+1}-\tau^{\beta-\alpha+1}\right)^{\frac{\gamma-1}{\alpha\gamma}}=\mathrm{const}\;t^{\frac{1}{\gamma}[\beta+2+(\gamma-1)(\beta-\alpha+1)]},\tag{35}$$

т. е. условие (20) выполняется при

$$\beta>\alpha-1-\frac{\alpha+1}{\gamma}\cdot$$

Если, например

$$\alpha<\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\quad(\gamma>1),\tag{36}$$

то на коэффициенты уравнения (34) нет необходимости налагать никаких дополнительных ограничений.

В частности, в известном примере Березина [2], когда $\alpha=1+\varepsilon(\varepsilon>0)$ и $a\equiv1$, достаточно выбрать

$$\gamma<1+\frac{2}{\varepsilon}\cdot$$

Соотношение (36) показывает, что, действительно, теорема п. 3° является промежуточным звеном между теоремами 1 и 2 работы [1]: при $\gamma=1$ получается теорема 2 (так как можно брать $\beta=0$), а при $\gamma\to\infty$ можно считать, что $\beta\to\alpha-1$.

Институт математики и механики
АН АрмССР
Ереванский государственный
университет

Поступило 16.VII.1968

Ա. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ. Վերածվող հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի անվերջ դիֆերենցելի լուծումների մասին *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում է (1)—(3) Կոշու խնդիրը ըստ տարածական փոփոխականի անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների որոշակի դասերում (տես (12) պայմանը)։

Արդյունքները միջանկյալ տեղ են գրավում Կոշի-Կովալևսկայա-ի թեորեմի և [1] աշխատանքի 1 թեորեմի միջև։

A. B. NERSESIAN. *On infinite differentiable solutions of Cauchy problem degenerate hyperbolic equations of second order* (summary)

Cauchy problem in certain classes of infinite-differentiable (with respect to spacious variable) functions is considered.

The result obtained occypies intermediate position between Cauchy-Kovalevskaja theorem and theorem I in [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1288—1291.
2. *И. С. Березин.* О задаче Коши для линейного уравнения второго порядка с начальными данными на линии параболичности, Мат. сб., 24, № 2, 1949, 301—320.