ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 3, 1969 Математика

И. Д. ЗАСЛАВСКИЙ

ОБ АКСИОМАТИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНСТРУКТИВНЫХ ОБЪЕКТОВ И ОПЕРАЦИЙ

1. Понятия конструктивного объекта и конструктивной операции (алгорифма) являются основными понятиями современной конструктивной математики ([1]—[7]). Как правило, всякая общая концепция конструктивной математики строится на основе того или иного понятия конструктивного объекта, к которому в дальнейшем присоединяется тот или иной вариант понятия алгорифма. Вместе с тем, вопросы построения точных определений конструктивного объекта и конструктивной операции, по мнению автора, еще не выяснены исчерпывающим образом и требуют дальнейшего исследования.

Методы введения понятий конструктивного объекта и конструктивной операции, чаще всего применяемые в настоящее время в конструктивной математике, в основном характеризуются следующими чертами. За основу берутся какие-либо конкретные типы конструктивных объектов (например, слова в алфавитах ([1], [3], [4], [5], [6]), натуральные числа ([2], [7]), „вещи“ ([7], § 50) и т. п.) и конкретные типы простейших операций над объектами (например, соединение слов, приписывание буквы к слову, прибавление единицы к натуральному числу и т. п.). Эти понятия чаще всего строятся на основе внематематических („физических“) представлений. Как правило, приходится заимствовать из внематематических („физических“) соображений также и ряд основных свойств конструктивных объектов и операций. Общее понятие конструктивной операции (алгорифма) в традиционных построениях конструктивной математики вводится уже после того, как выяснен основной набор свойств конструктивных объектов и простейших операций над ними.

При введении основных понятий конструктивной математики указанным методом возникает ряд трудностей, как принципиальных, так и технических. Принципиальной трудностью является, например, отсутствие при таком построении четкого водораздела между утверждениями, которые мы принимаем в качестве исходных положений теории и заимствуем из внематематических („физических“) соображений, и утверждениями, которые мы получаем путем логической дедукции из исходных положений. Отметим, что сама по себе апелляция к внематематическим соображениям, быть может, неизбежна при построении конструктивной математики. Вместе с тем, естественно стремиться к тому, чтобы такая апелляция не „просачивалась“ в ткань развиваемой теории, а была бы по возможности четко локализована в исходных положениях теории. Ясно, что, используя внематематические („физические") соображения по ходу построения развиваемой теории, мы рискуем лишить теорию ее дедуктивного характера.

Технические трудности, связанные с традиционными методами введения основных понятий конструктивной математики, заключаются в основном в недостаточной общности и гибкости как самого исходного понятия конструктивного объекта, так и основанных на нем вспомогательных понятий. Беря за основу конструктивные объекты какого-либо одного вида (например, слова в алфавите), мы вынуждены представлять в их терминах конструктивные объекты любых типов, что приводит часто к неоправданно громоздким и искусственным построениям.

В этой статье мы будем рассматривать несколько иной способ определения понятий конструктивного объекта и операции на основе применения аксиоматического метода (вполне аналогичного аксиоматическому методу классической математики) с сохранением основных принципов конструктивной установки. Рассматриваемый способ, по-видимому, в меньшей степени подвержен указанным выше трудностям по сравнению с традиционной методикой. Предлагаемый подход можно условно назвать „аксиоматико-генетическим". (ср. [7], § 8). *Аксиоматичность* подхода выражается в том, что определения конструктивных объектов и операций не связываются непосредственно ни с какими их конкретными „физическими" образами. Предлагается, напротив, рассматривать *произвольные* объекты и операции, удовлетворяющие определенным условиям (аксиомам), и устанавливать свойства этих объектов и операций посредством логической дедукции из аксиом (точка зрения, в определенном смысле сходная с высказанной, указана в отношении натуральных чисел в [7], § 6, § 50, см., например, [7], стр. 26 русского перевода, абзац 5-й снизу; однако эта точка зрения не получает систематического развития в [7]).

Генетичность предложенного подхода выражается в том, что считается возможным рассматривать как одновременно существующие лишь конечное число объектов (см. [5], стр. 287, верхний абзац). Таким образом, если мы не ограничиваемся рассмотрением заранее фиксированного конечного множества объектов, то должны рассматривать их как *порождаемые* при помощи некоторых фиксированных порождающих операций (см. [4], стр. 227; [5], стр. 286—287; [7], § 6, § 8, § 50). Хотя подобная точка зрения является одной из составных частей конструктивной установки в математике ([3]), однако мы отмечаем ее здесь отдельно, так как она весьма существенна для конструктивной интерпретации аксиоматического метода. Отметим следующее следствие из приведенного положения: *если мы не хотим ограничить наше рассмотрение заранее фиксированным конечным множеством объектов, то вынуждены допустить рассмотрение операций с заранее не определенной областью задания.* Рассмотрение операций с заранее не определенной областью задания в конструктивной математике, по-видимому, надлежит считать естественным: если мы порождаем, например, слова в алфавите или натуральные числа при помощи операций приписывания буквы или прибавления единицы, то область задания таких порождающих операций, очевидно, не может быть определена заранее; напротив, порождаемые объекты могут быть построены лишь при том условии, что мы *предварительно* определили порождающие их операции. При традиционном построении конструктивной математики это явление обычно остается в тени, так как употребляемое общее понятие операции (алгорифма), как правило, вводится уже после того, как основное понятие конструктивного объекта сформировано при помощи „порождающих операций", которые после этого по существу не фигурируют в построениях или же рассматриваются как частные случаи общего понятия алгорифма. Создается таким образом иллюзия того, что для каждой рассматриваемой операции (алгорифма) мы имеем дело с вполне определенной заранее областью ее определения. Но если мы вообще должны узаконить рассмотрение операций без предварительного определения областей их задания, то не видно причин, почему мы должны сохранять такое положение для одних операций и избегать его для других. В соответствии со сказанным мы не будем в дальнейшем фиксировать заранее областей задания для рассматриваемых операций.

Для логической дедукции из аксиом мы будем пользоваться конструктивными методами рассуждений, имеющимися в традиционной конструктивной математике и логике ([3], [4], [5], [7]). Будут использоваться конструктивные логические связи &, $\vee$, $\supset$, $\urcorner$, $\forall$, $\exists$, понимаемые обычным образом. Мы не будем пользоваться методами рассуждений, которые формулируются в существующих теориях конструктивного истолкования суждений ([3]; [7], § 81); не будем прибегать также к рассуждениям, опирающимся на метод конструктивного подбора ([2]). Таким образом, мы будем пользоваться лишь некоторой частью методов рассуждений, принятых в конструктивной математике; эта часть приблизительно соответствует тем методам рассуждений, которые формализуются в конструктивной (или, в терминологии [7], — интуиционистской) формальной арифметике. Конструктивные методы рассуждений будут пониматься содержательно, а не формально; мы не будем строить никакой формальной логической системы, в которой формализовывались бы применяемые рассуждения (хотя при желании такую систему можно было бы построить). Таким образом, мы предполагаем, что из внематематических (в данном случае — из логических) источников нам дано представление об определенном наборе „конструктивных методов рассуждений", так что мы можем отличать конструктивные доказательства от последовательностей рассуждений, не являющихся конструктивными доказательствами.

2. Г. Крейсел в работе [8] строит формальную систему, которую он называет „абстрактной теорией конструкций"; эта система предназначается Г. Крейселом для аксиоматического описания понятий „конструкции" и „конструктивного доказательства". Некоторые дета-

ли работы Г. Крейсела будут применяться в дальнейшем изложении (например, введение равенства и других аналогичных понятий с помощью операций; рассмотрение понятий пары и компонент пары на аксиомататической основе и т. п.). Однако результаты, полученные Г. Крейселом в работе [8], относятся в основном к обоснованию исчислений интуиционистской логики и не пересекаются с утверждениями, устанавливаемыми в настоящей статье.

Аксиоматическое построение рекурсивной арифметики, т. е. теории рекурсивных операций над натуральными числами было предложено Х. Б. Карри ([9]) и Р. Л. Гудстейном ([10], [11], см. также [12], раздел „рекурсивная арифметика"). Аксиоматический подход к определению конкретных операций (рекурсивных функций) сближает рекурсивную арифметику с рассмотрениями настоящей статьи; однако в рекурсивной арифметике отсутствует общность рассмотрения понятия объекта (в роли объектов используются лишь натуральные числа), и, кроме того, применяемый логический аппарат сильно сужен по сравнению с обычным логическим аппаратом конструктивной математики. Следует также отметить, что рекурсивная арифметика рассматривается как формально-логическая система, и логика понимается в ней формально, а не содержательно. Все это обуславливает существенные отличия рекурсивной арифметики от рассматриваемой здесь разновидности аксиоматического метода; результаты, получаемые для рекурсивной арифметики, не пересекаются с утверждениями, устанавливаемыми в этой статье. В работах [13], [14], [15], [16] и в ряде других работ аксиоматический метод применяется в рамках конструктивного направления в математике; однако исходные установки, направление исследований и результаты, полученные в этих работах, отличают их от настоящей статьи. Приводимые ниже аксиомы бинормальной К-структуры внешне сходны с отношениями между алгорифмами, определенными в § 6 из [16]; некоторые из них сходны также с рядом формул, указанных в [13].

Отметим еще, что некоторые понятия, вводимые в дальнейшем при рассмотрении конструктивного аксиоматического метода, аналогичны понятиям, рассматриваемым в соответствующих классических теориях. Так например, рассматриваемое ниже понятие К-структуры имеет ряд общих черт с понятиями конструктивной алгебры и алгебры ([17], § 1, п. 13).

3. Уточним теперь некоторые конкретные черты предлагаемого метода.

По ряду соображений технического характера оказывается удобным не рассматривать по отдельности понятия „операции" и „объекта", а рассматривать эти понятия как синонимы, считая всякий объект операцией (быть может „вырожденной"), и, употребляя слова „операция" и „объект" лишь для того, чтобы подчеркнуть в каком именно аспекте проводится то или иное рассмотрение. Элементарные предикаты над объектами мы будем также рассматривать как операции; мы будем фиксировать в качестве выделенных значений, выдаваемых этими операциями, некоторые объекты И и Л, понимаемые как символ истинности и символ ложности (вместе с тем, мы не будем требовать, чтобы каждое значение, выдаваемое операцией указанного типа, совпало бы с И и с Л).

Таким образом, понятия „объекта", „операции", „элементарного предиката" мы сводим к единому понятию операции.

Каждая рассматриваемая операция будет обладать определенной „размерностью" $n \geqslant 0$; размерность операции мы будем называть также „количеством мест" или „количеством переменных" данной операции и говорить о нульместных, одноместных, двуместных и т. п. операциях (можно было бы при желании выделить „собственно объекты" как нульместные операции, однако мы этого делать не будем, и, более того, будем отличать объект от нульместной операции, выдающей этот объект). Область задания операции, в соответствии со сказанным выше, не фиксируется, и соответствующее понятие не вводится. Операция может преобразовывать любые объекты, в частности, любые операции; не исключается также случай применения операции к ней самой. Будем считать работу операции детерминированной, т. е. будем считать, что если операция работает в разных случаях над одними и теми же исходными данными, то ее работа протекает в этих случаях одинаковым образом.

Сказанное следует воспринимать, разумеется, не как математические определения, а как наводящие соображения, находящиеся вне математики. Нижеследующие положения являются попыткой провести грань между математическими и внематематическими рассмотрениями. Для этого мы вводим некоторые термины, предложения и типы предложений, которые объявляются „понятными" на основе внематематических соображений. После того как мы зафиксировали элементы языка, мы можем воспользоваться уже ранее зафиксированными способами построения сложных предложений языка (они были взяты нами на основе определенных логических средств, т. е. также исходя из внематематических соображений) для построения определенных аксиом (выбираемых на основании внематематических соображений), исходя из которых мы можем выводить новые предложения с помощью имеющихся в нашем распоряжении способов рассуждений (снова выбираемых на основе имеющихся логических средств). Математика, таким образом, начинается там, где уже выбраны язык, логика и аксиомы*.

---

* Подобная точка зрения, разумеется не может претендовать на новизну, ибо она является модификацией многочисленных имеющихся концепций, касающихся формализации математических теорий. Однако применение подобного рода концепций в конструктивной математике, насколько известно автору, не предлагалось. Естественное возражение против этого применения заключается в том, что подобная формализация может показаться „порочным кругом" на том основании, что аппарат формализации здесь обладает такой же сложностью, как и формализуемая теория. Автор не согласен с такого рода возражением. Некоторые доводы против него будут приведены ниже. Сейчас отметим лишь, что средства метаязыка, как правило, более сильны, чем средства языка: проще „называть" объекты, чем их фактически „выписывать".

Итак, мы допускаем употребление слов:

(1) Операция (синоним: объект);

(2) Нульместная, одноместная, двуместная,... операция (синонимы: операция размерности нуль, один, два,...). Мы считаем „понятным" смысл следующих предложений:

(3) После подачи на вход n-местной операции f объектов $x_1, x_2, \cdots, x_n$ операция срабатывает и выдает на выходе объект y.

(4) Объект x есть И.

(5) Объект x есть Л.

Мы допускаем образование новых предложений из уже построенных при помощи обычных логических связок $\&$, $\vee$, $\supset$, $\urcorner$, $\forall$, $\exists$.

Мы допускаем образование новых понятий из уже имеющихся при помощи правил порождения. Под „правилом порождения" мы понимаем предложение следующего вида (где $f_1, f_2, \cdots, f_m$ суть фиксированные операции размерностей, соответственно, $k_1, k_2, \cdots, k_m$);

(6) Если $x_1, x_2, \cdots, x_n$ суть некоторые объекты, и если для $y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1l_1}$ имеет место P_1, для $y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2l_2}$ имеет место $P_2, \cdots$, для $y_{r1}, y_{r2}, \cdots, y_{rl_r}$ имеет место P_r, и если после подачи на вход k_1-местной операции f_1 объектов $u_{11}, u_{12}, \cdots, u_{1k_1}$ операция срабатывает и выдает на выходе объект v_1, и если после подачи на вход k_2-местной операции f_2 объектов $u_{21}, u_{22}, \cdots, u_{2k_2}$ операция срабатывает и выдает на выходе объект $v_2, \cdots$, и если после подачи на вход k_m-местной операции f_m объектов $u_{m1}, u_{m2}, \cdots, u_{mk_m}$ операция срабатывает и выдает на выходе объект v_m, то для $z_1, z_2, \cdots, z_q$ имеет место Q.

(Здесь $P_1, P_2, \cdots, P_r$ — некоторые понятия, уже имеющиеся или определяемые, Q — некоторое определяемое понятие, каждый из объектов y_{ij} и u_{ij} имеет вид x_α, каждый из объектов z_l имеет вид x_α или v_β).

Мы считаем, таким образом, понятным каждое конкретное правило указанного типа и допускаем задание понятия или группы понятий при помощи таких правил.

Мы считаем, наконец, „понятными" кванторы общности и осуществимости, вводимые для понятий, определяемых при помощи правил порождения.

4. Сделаем некоторые замечания по поводу введенных соглашений.

Говоря об „n переменных", а также в других аналогичных местах, мы не предполагаем известным понятие натурального числа. Для построения каждой конкретной теории нам нужны лишь операции фиксированной размерности, поэтому мы могли бы при желании ограничиться операциями размерности, например, не больше двух или трех. Числительные „два" или „три" здесь вовсе не обязательно употреблять, так же, как не обязательно помечать индексами 1, 2,$\cdots$ объекты, подаваемые на вход операции; вместо этого можно было бы говорить, например, о „розовом входе" и „голубом входе" операции (ср. [18], „Предисловие для учащегося"). Аналогично обстоит дело с натуральными индексами в приведенном выше описании порождающего правила.

Вместо общего описания того, что такое порождающее правило, мы могли бы без вреда для дела объявить „понятными" лишь те конкретные порождающие правила, которые нам потребуются в дальнейшем.

Заметим, что при соблюдении некоторых аксиом (например, указанных ниже аксиом для спаривающих или системных операций) мы можем, не нарушая общности по существу, ограничить наше рассмотрение лишь нульместными, одноместными и двуместными операциями (так, как это сделано ниже при введении аксиом (A_{27})—(A_{40}) бинормальной структуры). Можно также ограничить использование генетических определений лишь несколькими заранее фиксированными случаями (см., например, [17], § 1, п. 1.3, теорема 1).

5. Введем некоторые обозначения. Суждение вида (3) из раздела 3 будем обозначать через „$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть y", а тот объект y, который выдается на выходе, если имеет место ситуация (3) из раздела 3, будем обозначать через $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Суждение $\exists y\, (f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть $y)$ будем обозначать через $!\, f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$. Суждение (4) раздела 3 будем обозначать через x^+, а суждение (5)—через x^-. Мы будем употреблять символ λ, понимаемый аналогично тому, как это определено в [19] (см. также [12]), а именно: если Σ есть выражение со свободными переменными $x_1, x_2, \cdots, x_n$, то выражение $\lambda x_1 x_2 \cdots x_n \cdot \Sigma$ понимается как обозначение операции, которая для всяких объектов $x_1, x_2, \cdots, x_n$, для которых выражение Σ имеет смысл, выдает значение выражения Σ для заданных значений $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Мы не будем рассматривать выражений вида $\lambda x_1 x_2 \cdots x_n \cdot \Sigma$ в тех случаях, когда выражение Σ содержит свободные переменные, отличные от $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

В случае, когда в выражении вида $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ операция f сама задается при помощи какого-либо выражения, мы будем выражение, определяющее f, заключать в фигурные скобки. Мы будем иногда применять указанные в [12] и [19] правила преобразования выражений, содержащих фигурные скобки и символ λ; допустимость применения указанных преобразований каждый раз очевидна на основании содержательной интерпретации указанной символики. Например, выражение $\{\lambda x \cdot f(x)\}(y)$ обозначает тот же объект, что $f(y)$.

Записывая обозначение операции, мы будем иногда указывать размерность этой операции при помощи верхнего индекса в скобках; так, например, $f^{(2)}$, $x^{(5)}$, $F^{(0)}$ суть обозначения соответственно двуместной, пятиместной, нульместной операции. Иногда мы будем опускать обозначение размерности в тех случаях, когда размерность рассматриваемой операции очевидна или несущественна.

6. Введем теперь понятие К-структуры, которое будет играть основную роль в дальнейшем изложении, а также некоторые понятия, связанные с ним. Определения, излагаемые в этом разделе, не являются определениями внутри аксиоматических теорий, а потому мы не будем ограничиваться при их введении установленными ранее жесткими нормами языка.

Всякий набор операций вида $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ мы будем называть *конструктивной структурой* или, *сокращенно* К-*структурой*. Операции $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)}$ мы будем называть *базисными элементами* К-структуры $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$.

Понятие *элемента* К-структуры $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$, (обозначаемой далее через S), вводится посредством следующих порождающих правил:

(1) Каждый из объектов $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)}$ есть элемент К-структуры S.

(2) Если $F^{(n)}$ есть элемент К-структуры S и $x_1, x_2, \cdots, x_n$ суть элементы S и $!\,F^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, то $F^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ есть элемент К-структуры S.

После введения понятия элемента К-структуры S мы допускаем употребление квантора всеобщности $\forall$ и квантора потенциальной осуществимости $\exists$ относительно переменных, для которых допустимыми значениями являются элементы рассматриваемой К-структуры. В роли таких переменных мы будем употреблять символы x, y, z, f, g, h, F, G, H с индексами или без индексов. Вместо „элемент К-структуры S“ в случаях, когда это не приводит к недоразумениям, мы будем говорить просто „элемент“.

При рассмотрении К-структуры $(f_1, f_2, \cdots, f_n, R)$ двуместный элемент R мы будем называть *операцией равенства*, вместо $R(x, y)^+$ будем писать $x = y$, а вместо $R(x, y)^-$ будем* писать $x \neq y$. Суждения вида

$$!\,f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \vee !\,g(y_1, y_2, \cdots, y_m) \supset$$
$$\supset f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(y_1, y_2, \cdots, y_m)$$

мы будем записывать следующим образом:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \simeq g(y_1, y_2, \cdots, y_m).$$

Будем говорить, что К-структура $(f_1, f_2, \cdots, f_n, R)$ является *подструктурой* К-структуры $(g_1, g_2, \cdots, g_m, Q)$, если $f_1, f_2, \cdots, f_n, R$ являются элементами К-структуры $(g_1, g_2, \cdots, g_m, Q)$, и имеет место $Q(R, Q)^+$. Будем говорить, что К-структура $(f_1, f_2, \cdots, f_k, R)$ является *правильной*, если в этой структуре выполнены следующие аксиомы:

(A_1) $\forall x\,(x = x)$;

(A_2) $\forall xy\,(x = y \supset y = x)$;

(A_3) $\forall xyz\,(x = y \,\&\, y = z \supset x = z)$;

(A_4) $\forall xy\,(x = y \vee x \neq y)$;

(A_5) $\forall xy \neg\,(x = y \,\&\, x \neq y)$;

* Таким образом, $x \neq y$ непосредственно не определяется как отрицание $x = y$. Однако эквивалентность $x \neq y$ и $\neg(x = y)$ вытекает из приведенных ниже аксиом (A_4) и (A_5).

(A_6) Для любых n-местных операций $F^{(n)}$ и $G^{(n)}$

$$\forall x_1 x_2 \cdots x_n y_1 y_2 \cdots y_n (F^{(n)} = G^{(n)} \& x_1 = y_1 \& \\ \& x_2 = y_2 \& \cdots \& x_n = y_n \supset F^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n) \simeq G^{(n)}(y_1, y_2, \cdots, y_n)).$$

(Заметим, что аксиома (A_3) по существу является схемой аксиом). В дальнейшем мы будем рассматривать лишь правильные К-структуры.

Будем говорить, что элемент $f^{(n)}$ К-структуры является *всюду определенным*, если

$$(A_7) \quad \forall x_1 x_2 \cdots x_n \,!\, f^{(n)}(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

К-структуру $(f_1, f_2, \cdots, f_k, R)$ будем называть *сплошной*, если все базисные элементы $f_1, f_2, \cdots, f_k, R$ всюду определены.

Рассмотрим теперь некоторые примеры применения понятия К-структуры. А именно, мы покажем, каким образом в терминах К-структур можно определить понятия натурального числа, слова, а также понятия пары и системы объектов. Правильную К-структуру $(a, s^{(1)}, R^{(2)})$ будем называть *пеановой*, если в ней выполнены следующие аксиомы:

$$(A_8) \qquad \forall x \,!\, s^{(1)}(x);$$

$$(A_9) \qquad \forall x (s^{(1)}(x) \neq a);$$

$$(A_{10}) \qquad \forall xy (s^{(1)}(x) = s^{(1)}(y) \supset x = y).$$

Натуральные числа можно определить теперь как элементы пеановой К-структуры, определяемые при помощи следующих порождающих правил (1) a есть натуральное число; 2) если x есть натуральное число, то $s(x)$ есть натуральное число. Как правило, элемент a пеановой К-структуры (a, s, R) мы будем обозначать через 0; вместо $s(x)$ иногда будем писать $x+1$; элементы $s(0)$, $s(s(0))$, $s(s(s(0)))$, $\cdots$ будем обозначать иногда через 1, 2, 3, $\cdots$.

Аксиома индукции при содержательном восприятии понятия натурального числа не должна вводиться; правомерность рассуждений по индукции непосредственно следует из генетического характера понятия натурального числа (см. [1], подстрочное примечание на стр. 18). Следует заметить, однако, что при формализации рассуждений о К-структурах в рамках некоторой формально-логической системы (скажем, наподобие той, которая была указана в [7], § 19), схема аксиом индукции (или некоторая эквивалентная ей схема) является необходимой, иначе мы будем лишены возможности проводить в нашей системе рассуждения по индукции. Можно сказать, что схема аксиом индукции как раз и является тем средством, при помощи которого в формально-логическую систему вводится генетическая концепция понятия объекта.

Понятие натурального числа можно было бы вводить и на основе иных К-структур. Так, например, можно было бы ввести операции следования, сложения, умножения, на основе обычных аксиом (см. [7], § 19). Точно так же можно было бы рассматривать в качестве операций суперпозицию, примитивную рекурсию и μ-оператор и, таким образом, строить аксиоматическую теорию рекурсивных функций.

Рассмотрим теперь аксиоматическое определение понятия слова в алфавите. Правильную К-структуру $(a, s_1^{(1)}, s_2^{(1)}, \cdots, s_n^{(1)}, R)$, где $n \geqslant 1$, будем называть *n-алфавитной*, если в ней выполнены следующие аксиомы:

(A_{11}) $\quad \forall x \,!\, s_i^{(1)}(x) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n);$

(A_{12}) $\quad \forall x \; (s_i^{(1)}(x) \neq a) \; (1 \leqslant i \leqslant n);$

(A_{13}) $\quad \forall xy \; (s_i^{(1)}(x) \neq s_j^{(1)}(y)) \qquad \begin{pmatrix} 1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n \\ i \neq j \end{pmatrix};$

(A_{14}) $\quad \forall xy \, (s_i^{(1)}(x) = s_i^{(1)}(y) \supset x = y) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$

Слова в n-буквенном алфавите определяются теперь как элементы n-алфавитной К-структуры $(a, s_1, s_2, \cdots, s_n, R)$, задаваемые посредством следующих порождающих правил:

1) a есть слово;

2) если x есть слово, то $s_i(x)$ есть слово $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Аналогично тому, как это было отмечено для натуральных чисел, мы можем строить теорию слов на основе операции объединения слов, а также на основе операций композиции, разветвления, повторения операций над словами и других операций, рассматриваемых в [1].

Рассмотрим аксиоматические определения понятий *пары* и *системы* объектов. Пусть задана некоторая К-структура. Будем говорить, что операция $\sigma^{(2)}$ этой К-структуры является *спаривающей*, если можно построить такие операции $\iota^{(1)}$, $\varkappa^{(1)}$ (называемые *обратными спаривающими операциями*) для $\sigma^{(2)}$, что выполнены следующие аксиомы:

(A_{15}) $\quad \forall xy \,!\, \sigma^{(2)}(x, y);$

(A_{16}) $\quad \forall z \,!\, \iota^{(1)}(z);$

(A_{17}) $\quad \forall z \,!\, \varkappa^{(1)}(z);$

(A_{18}) $\quad \forall xy \; (\iota^{(1)}(\sigma^{(2)}(x, y)) = x);$

(A_{19}) $\quad \forall xy \; (\varkappa^{(1)}(\sigma^{(2)}(x, y)) = y).$

Если дана спаривающая функция σ, то объект z называется *парой*, если имеются такие объекты x и y (называемые *компонентами* пары), что $\sigma(x, y) = z$. Ясно, что по паре z всегда возможно однозначно восстановить ее компоненты.

Аналогичным образом определяются системы объектов. Пусть задана некоторая К-структура S, пусть $\sigma^{(2)}$ — спаривающая операция в S, и пусть $\iota^{(1)}$ и $\varkappa^{(1)}$ — обратные спаривающие операции для $\sigma^{(2)}$. Пусть далее $(0, s^{(1)}, R^{(2)})$ — пеанова подструктура К-структуры S. Тогда будем говорить, что элементы $\pi^{(2)}$, $\delta^{(1)}$ и Λ являются *системными* относительно $\sigma^{(2)}$, $\iota^{(1)}$, $\varkappa^{(1)}$, 0, $s^{(1)}$, если удовлетворяются следующие аксиомы:

$(A_{20})\quad \forall x\,!\,\delta^{(1)}(x);$

(A_{21}) Для всякого элемента x и для всякого натурального k $!\,\pi^{(2)}(x, k)$.

$$(A_{22})\quad \delta^{(1)}(\Lambda) = 0;$$

$$(A_{23})\quad \forall xy\,(\delta^{(1)}(\sigma^{(2)}(x, y)) = s^{(1)}(\delta^{(1)}(y)));$$

$$(A_{24})\quad \forall xy\,(\pi^{(2)}(\sigma^{(2)}(x, y), 0) = x);$$

(A_{25}) Для всяких элементов x и y и для всякого натурального k $\pi^{(2)}(\sigma^{(2)}(x, y), s^{(1)}(k)) = \pi^{(2)}(y, k)$.

Если заданы системные элементы π, δ, Λ относительно σ, ι, x, 0, s, то понятие *системы*, а также отношения „натуральное число k есть длина системы y“ „элемент x есть k-ый член системы y“, вводятся при помощи следующих порождающих правил:

1) Λ есть система;
2) 0 есть длина Λ;
3) если x есть элемент, y есть система, k есть длина системы y, и z есть i-й член системы y, то
(3a) $\sigma(x, y)$ есть система;
(3b) $s(k)$ есть длина системы $\sigma(x, y)$;
(3c) x есть 0-й член системы $\sigma(x, y)$;
(3d) z есть $s(i)$-й член системы $\sigma(x, y)$.

Легко видеть, что по каждой системе z можно однозначно определить ее длину $\delta(z)$ при помощи операции δ и все ее члены $\pi(z, 0)$, $\pi(z, 1), \cdots, \pi(z, k)$ (где $s(k) = \delta(z)$) при помощи операции π.

В дальнейшем мы будем пользоваться понятиями натурального числа, слова в алфавите, пары, системы, считая известными основные свойства этих объектов, рассматриваемые в конструктивной математике. Исходя из изложенных принципов соответствующие теории, очевидно, можно развить на аксиоматической основе; мы не утверждаем, что введенных выше аксиом достаточно для вывода всех свойств рассматриваемых объектов, рассматриваемых в традиционных изложениях конструктивной математики; однако набор аксиом, достаточный для этой цели, очевидно, может быть построен; такое построение представляет собой самостоятельную проблему, которой мы здесь не будем заниматься.

Введем, наконец, понятие *бинормальной* К-структуры. Будем говорить, что правильная К-структура $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ является *бинормальной*, если в ней выполнены следующие аксиомы:

$$(A_{26.\,i})\ \exists F\,\forall g_1^{(1)} g_2^{(1)} \cdots g_{n_i}^{(1)} x\,(!\,F(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)})\ \&$$
$$\&\ \{F(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)})\}(x) \simeq f_i^{(n_i)}(g_1^{(1)}(x), g_2^{(1)}(x), \cdots, g_{n_i}^{(1)}(x)))\quad (1 \leqslant i \leqslant k);$$

$$(A_{27})\ \exists F\,\forall f^{(1)} g^{(0)}\,(!\,F(f^{(1)}, g^{(0)})\,\&\,\{F(f^{(1)}, g^{(0)})\}(\ \ ) \simeq f^{(1)}(g^{(0)}(\ \ )));$$

$$(A_{28})\ \exists F\,\forall f^{(1)} g^{(1)} x\,(!\,F(f^{(1)}, g^{(1)})\,\&\,\{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x) \simeq f^{(1)}(g^{(1)}(x)));$$

$$(A_{29})\ \exists F\,\forall f^{(1)} g^{(2)} xy\,(!\,F(f^{(1)}, g^{(2)})\,\&\,\{F(f^{(1)}, g^{(2)})\}(x, y) \simeq f^{(1)}(g^{(2)}(x, y)));$$

$$(A_{30})\ \exists F \forall f^{(2)} g^{(1)} h^{(1)} x\, (!\, F(f^{(2)}, g^{(1)}, h^{(1)})\ \&$$
$$\&\ \{F(f^{(2)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x) \simeq f^{(2)}(g^{(1)}(x), h^{(1)}(x)));$$
$$(A_{31})\ \exists F \forall f^{(2)} g_1^{(2)} g_2^{(2)} xy\, (!\, F(f^{(2)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)})\ \&$$
$$\&\ \{F(f^{(2)}, g_1^{(2)}, g_2^{(2)})\}(x, y) \simeq f^2(g_1(x, y), g_2(x, y)));$$
$$(A_{32})\ \exists F \forall f^{(1)} g^{(1)} h^{(1)} x\, (!\, F(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\ \&$$
$$\&\ (f^{(1)}(x)^+ \supset \{F(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x) \simeq g^{(1)}(x)\ \&$$
$$\&\ f^{(1)}(x)^- \supset \{F(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x) \simeq h^1(x)\ \&$$
$$\&\ (\neg\, f^{(1)}(x)^+\ \&\ \neg\, f^{(1)}(x)^- \supset \neg\, !\, \{F(f^1, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x)));$$

(A_{33}) Можно построить такой элемент F, что для любых $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, x оказывается: $!\, F(f^{(1)}, g^{(1)})$, и, кроме того, $!\, \{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x)$ имеет место в том и только в том случае, когда можно построить систему элементов $x_0, x_1, \cdots, x_n$, где $n \geqslant 0$, такую, что $x_0 = x$, $x_{i+1} = f^{(1)}(x_i)$ при $0 \leqslant i < n$, $g(x_i)^-$ при $0 \leqslant i < n$, $g(x_n)^+$; и, наконец, если $!\, \{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x)$ то $\{F(f^{(1)}, g^{(1)})\}(x) = x_n$, где x_n есть последний член построенной указанным образом системы.

$$(A_{34})\ \exists F \forall f^{(0)} x\, (!\, F(f^{(0)})\ \&\ \{F(f^{(0)})\}(x) \simeq f^{(0)}(\quad));$$
$$(A_{35})\ \exists F \forall f^{(1)} xy\, (!\, F(f^{(1)})\ \&\ \{F(f^{(1)})\}(x, y) \simeq f^{(1)}(x));$$
$$(A_{36})\ \exists F \forall f^{(1)} xy\, (!\, F(f^{(1)})\ \&\ \{F(f^{(1)})\}(x, y) \simeq f^{(1)}(y));$$
$$(A_{37})\ \exists F \forall x\, (\{F(x)\}(\quad) = x);$$
$$(A_{38})\ \exists f \forall x\, (f(x) = x);$$
$$(A_{39})\ \exists f \forall x f(x)^+;$$
$$(A_{40})\ \exists f \forall x f(x)^-.$$

Как уже указывалось выше, аксиомы бинормальной структуры внешне сходны с условиями, указанными в определении нормального замыкания ([16], § 6); отличие заключается, во-первых, в том, что мы не вводим здесь понятия „предиката", рассматривая по существу „предикаты" как частный случай „функторов"; во-вторых, вместо условия, касающегося отбрасывания фиктивной переменной, здесь употребляется аксиома (A_{37}), касающаяся осуществимости функций—констант; наконец, аксиомы бинормальной структуры формулируются лишь для операций с ограниченными размерностями (большинство аксиом сформулировано для размерностей, не превосходящих двух, чем и обусловлено название „бинормальная структура").

При рассмотрении бинормальных структур мы будем употреблять некоторые специальные термины и обозначения (ср. [16], § 6). Пусть фиксирована операция F_{32}, удовлетворяющая условию, указанному в аксиоме (A_{32}) (говоря точнее—условию, получающемуся из (A_{32}) посредством удаления $\exists F$), тогда для любых $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $h^{(1)}$ мы будем называть $F_{32}(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})$ *разветвлением* $g^{(1)}$ *и* $h^{(1)}$ *относительно* $f^{(1)}$ и обозначать посредством if $f^{(1)+}$ then $g^{(1)}$ else $h^{(1)}$; кроме того, $\{F_{32}(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})\}(x)$ мы будем обозначать посредством if $f^{(1)}(x)^+$ then $g^{(1)}(x)$ else $h^{(1)}(x)$, причем в этой записи мы будем иногда заменять $f^{(1)}(x)$, $g^{(1)}(x)$, $h^{(1)}(x)$ другими эквивалентными им выражениями. Далее пусть фиксирована операция F_{33}, удовлетворяющая условию, указанному в аксиоме (A_{33}); тогда для любых $f^{(1)}$, $g^{(1)}$ мы будем называть $F_{32}(f^{(1)}, g^{(1)})$ *повторением* $f^{(1)}$ относительно $g^{(1)}$ и обозначать while $g^{(1)-}$ do $f^{(1)}$; знак $^-$ иногда будем вводить внутрь записи g, например, вместо $(\lambda x \cdot R(x, 0))^-$ будем писать $\lambda x \cdot x \neq 0$.

Замечание 1. Слова if, then, else while, do заимствованы из языка АЛГОЛ-60 ([20]); введенное здесь обозначение разветвления в точности совпадает с обозначением разветвления, принятым в АЛГОЛ-60, однако обозначение повторения несколько сокращено по сравнению с указанным языком; точная запись повторения по правилам языка АЛГОЛ-60 могла бы иметь, например, следующий вид:

$$\text{for } x := x \text{ while } g^{(1)}(x) \text{ do } x := f^{(1)}(x).$$

Замечание 2. При рассмотрении повторения мы не допускаем обозначений типа while $g^{(1)}(x)^-$ do $f^{(1)}(x)$, наподобие тех, которые были введены для разветвления. Дело в том, что при употреблении обозначений типа while $g^{(1)}(x)^-$ do $f^{(1)}(x)$ могут возникнуть недоразумения: повторение алгорифмов, в отличие от разветвления, не инвариантно относительно подстановки. Так, например, мы можем написать

$$\{\text{if } f^+ \text{ then } g \text{ else } h\}(u(x)) \simeq \{\text{if } \lambda z \cdot f(u(z))^+ \text{ then } \lambda z \cdot g(u(z)) \text{ else } \lambda z \cdot h(u(z))\}(x),$$

но было бы неверным утверждать, что $\{\text{while } g^- \text{ do } f\}(u(x))$ равносильно $\{\text{while } \lambda z \cdot g(u(z))^- \text{ do } \lambda z \cdot f(u(z))\}(x)$.

7. В качестве примера математических рассмотрений на основе конструктивного аксиоматического метода мы рассмотрим вопрос о возможности описания в рамках такой теории любых конструктивных преобразований объектов соответствующей К-структуры. Наше рассмотрение при этом будет в определенной степени зависимым от концепций традиционной теории алгорифмов, поскольку „эталон" общего понятия алгорифма мы будем заимствовать из традиционных источников.

Пусть фиксирована некоторая К-структура $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ (в дальнейшем будем ее обозначать через S). Введем в рассмотрение попарно различные буквы $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega$, (, , ,) (мы описываем рассмотрения, связанные со словами в алфавитах, в традиционных терминах, хотя то же самое можно было бы сделать и на аксиоматическом языке).

Термами К-структуры S будем называть слова в алфавите $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega$, (, , ,)$\}$, определяемые следующими порождающими правилами: 1) каждая из букв $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega$ есть терм; 2) если $T_1, T_2, \cdots, T_{n_l}$ — термы, то слово $\Phi_l(T_1, T_2, \cdots, T_{n_l})$ есть терм; 3) если T_1 и T_2 суть термы, то $\Omega(T_1, T_2)$ есть терм. Зафиксируем конструктивное взаимно однозначное соответствие Ξ между термами К-структуры S и натуральными числами, определяемое следующими правилами.

1) Если длина терма T_1 больше длины терма T_2, то натуральное число, соответствующее терму T_1, больше натурального числа, соответствующего терму T_2.

2) Если длины термов T_1 и T_2 равны n, и при лексикографическом упорядочении всех слов длины n в алфавите $\{\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k, \Omega, (, , ,)\}$ терм T_1 предшествует терму T_2, то натуральное число, соответствующее терму T_1, меньше натурального числа, соответствующего терму T_2.

Очевидно, что указанные правила однозначно определяют соответствие Ξ. Легко проверить, в частности, что согласно соответствию Ξ, однобуквенным словам $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k$, Ω соответствуют натуральные числа $1, 2, \cdots, k, k+1$. В дальнейшем натуральное число, соответствующее терму T в силу соответствия Ξ мы будем называть *Ξ-номером* терма T.

Значение терма в К-структуре S определяется следующими порождающими правилами: 1) значение каждого из термов $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k$, Ω определено и совпадает, соответственно, с $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)}$; 2) если T_1, T_2, T_{n_l}—термы, и значения их суть, соответственно, $t_1, t_2, \cdots$ $\cdots, t_{n_l}$, то значение терма $\Phi_l(T_1, T_2, \cdots, T_{n_l})$ определено в том, и только в том случае, когда $! f_l^{(n_l)}(t_1, t_2, \cdots, t_{n_l})$ и если определено, то совпадает с $f_l^{(n_l)}(t_1, t_2, \cdots, t_{n_l})$; 3) если T_1 и T_2—термы, и значения их суть, соответственно, t_1 и t_2, то значение терма $\Omega(T_1, T_2)$ определено в том и только в том случае, когда $! R^{(2)}(t_1, t_2)$ и в этом случае совпадает с $R^{(2)}(t_1, t_2)$.

Ясно, что для каждого объекта x К-структуры S имеется хотя бы один терм со значением x. Это непосредственно вытекает из генетического характера понятия „элемент К-структуры“.

Частично-рекурсивную функцию φ от одной переменной будем называть ***рекурсивным преобразованием элементов*** К-структуры S, если для любых натуральных чисел k и l оказывается: если термы T_1 и T_2 с Ξ-номерами k и l определены и таковы, что для их значений x_1 и x_2 имеет место $x_1 = x_2$, то тогда (1) если одно из значений $\varphi(k)$ и $\varphi(l)$ определено, то и другое из них также определено; (2) если оба значения $\varphi(k)$ и $\varphi(l)$ определены, то тогда если значение одного из двух термов, имеющих Ξ-номера $\varphi(k)$ и $\varphi(l)$ определено, то тогда и значение другого из них определено; (3) если значения x и y обоих термов, указанных в предыдущем пункте, определены, то $x = y$.

Пусть φ—рекурсивное преобразование элементов К-структуры S. ***Результатом преобразования*** элемента x К-структуры S посредством φ будем называть элемент y К-структуры S, который получается в результате следующих действий: 1) находим какой-либо терм T, имеющий значение x; 2) находим Ξ-номер k терма T; 3) находим $\varphi(k)$; 4) находим терм T', имеющий номер $\varphi(k)$; 5) в качестве y берем значение терма T' (если оно определено). Ясно, что если результат преобразования элемента x посредством φ определен, то он единственен с точностью до отношения равенства, определяемого операцией $R^{(2)}$.

Будем говорить, что элемент $f^{(1)}$ К-структуры S является *ориентиром* рекурсивного преобразования φ элементов этой К-структуры, если для любого элемента x К-структуры S оказывается: результат преобразования элемента x посредством φ определен в том, и только в том случае, когда $!\, f^{(1)}(x)$, и в этом случае, если y есть результат преобразования x посредством φ, то $y=f^{(1)}(x)$.

Будем говорить, что К-структура S является *рекурсивно полной*, если для всякого рекурсивного преобразования φ элементов К-структуры S можно построить элемент $f^{(1)}$ К-структуры S, являющийся ориентиром φ.

Теорема 1. *Всякая правильная сплошная бинормальная К-структура* $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$, *в которой имеется элемент, являющийся спаривающей операцией, и имеются элементы* x_1 *и* x_2 *такие, что* $x_1 \neq x_2$, *рекурсивно полна.*

(Иначе говоря, для рекурсивной полноты К-структуры $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ достаточно, чтобы были выполнены аксиомы (A_1)—(A_6), (A_7) для $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}$, $(A_{15})-(A_{19})$ для некоторых σ, ι, $\varkappa$, $A_{26}-A_{40}$ и, кроме того, $x_1 \neq x_2$ для некоторых x_1 и x_2).

Доказательство. Обозначим структуру $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$ через S. Покажем, прежде всего, что в S имеется пеанова подструктура S^*.

Построим согласно условию теоремы элементы x_1 и x_2 К-структуры S такие, что $x_1 \neq x_2$, и операции σ, ι, $\varkappa$, удовлетворяющие аксиомам (A_{15})—(A_{19}). Тогда для любых элементов x и y структуры S

$$!\,\sigma(x, y); \qquad \iota(\sigma(x, y)) = x;$$
$$!\,\iota(x); \qquad \varkappa(\sigma(x, y)) = y.$$
$$!\,\varkappa(x);$$

Построим теперь элементы $\sigma(x_1, x_1)$, $\sigma(x_1, x_2)$, $\sigma(x_2, x_1)$, $\sigma(x_2, x_2)$ и обозначим их через y_1, y_2, y_3, y_4. Ввиду свойств операций σ, ι, $\varkappa$ имеем: $y_i \neq y_j$ при $i \neq j$. Следовательно, согласно $(A_1)-(A_4)$, можно построить такой элемент y_γ, что $y_\gamma \neq x_i$ при $i=1, 2$. Обозначим y_γ через 0. Построим теперь операцию s такую, что при любом x

$$s(x) \simeq \sigma(0, x).$$

Для этого согласно (A_{37}) построим такую нульместную операцию η, что $\eta(\ )=0$. Затем, согласно (A_{34}) построим одноместную операцию θ такую, что $\forall x(\theta(x) = 0)$. Затем, согласно (A_{38}), построим такую одноместную операцию φ, что $\forall x(\varphi(x) = x)$. Наконец, согласно (A_{30}) построим такую операцию s, что $\forall x(s(x) \simeq \sigma(\theta(x), \varphi(x)))$. Легко проверить, что операция s будет требуемой. В дальнейшем мы не будем подробно проводить построений такого рода, предоставляя это читателю; методы подобных построений описаны, например, в [7], § 44.

Теперь рассмотрим подструктуру $(0, s, R)$ структуры S; эту подструктуру будем обозначать через S^*. Легко проверить, что К-структура S^* является пеановой. В самом деле, если $s(x)=s(y)$, то $\sigma(0, x) = \sigma(0, y)$, а тогда, согласно (A_{19}), $x=y$. Далее, если бы было $s(y)=0$, то $\sigma(0, y) = \sigma(x_i, x_j)$ при некоторых i, j от 1 до 2, и тогда, согласно (A_{18}), $0 = x_i$, что противоречит выбору 0.

Теперь элементы структуры S, полученные исходя из 0 посредством s, мы будем рассматривать как натуральные числа (при аксиоматическом построении теории натуральных чисел мы освобождаемся от обязанности вводить для этих объектов некое новое наименование, а также устанавливать их конструктивное взаимно-однозначное соответствие с „подлинными“ натуральными числами). Для введенных таким образом натуральных чисел мы будем рассматривать рекурсивные функции, определяемые обычным образом ([7]). Покажем, что (B) *для всякой рекурсивной функции φ от одной переменной можно построить такой элемент f структуры S, что для любого натурального k*

$$\varphi(k) \simeq f(k).$$

Построим вначале такие элементы s, t, p, q, r структуры S, что при любых натуральных k и l

$$s(k) = k + 1;$$

$$t(k) = k \dot{-} 1;$$

$$p(k, l) = k + l;$$

$$q(k, l) = k \dot{-} l;$$

$$r(k, l) = k \cdot l.$$

Элемент s с указанным свойством был уже построен ранее. В качестве t можно взять элемент

$$\lambda x \cdot (\text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else } \iota(\{\text{while } \lambda z \cdot s(\iota(z)) \neq \varkappa(z) \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(s(\iota(z)), \varkappa(z))\}(\sigma(0, x)))).$$

В качестве p можно взять элемент

$$\lambda xy \cdot (\iota(\{\text{while } \lambda z \cdot \varkappa(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(s(\iota(z)), t(\iota(z)))\}(\sigma(x, y)))).$$

В качестве q можно взять элемент

$$\lambda xy \cdot (\iota(\{\text{while } \lambda z \cdot \varkappa(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(t(\iota(z)), t(\varkappa(z)))\}(\sigma(x, y)))).$$

В качестве r можно взять элемент

$$\lambda xy \cdot (\varkappa(\{\text{while } \lambda z \cdot \varkappa(\iota(z)) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(\sigma(\iota(\iota(z)), t(\varkappa(\iota(z)))), p(\iota(\iota(z)), \varkappa(z)))\}(\sigma(\sigma(x, y), 0)))).$$

Построим теперь элемент

$$\lambda x \cdot [t(\iota(\{\text{while } \lambda z \cdot q(1, q(r(\iota(z), \iota(z)), \varkappa(z))) \neq 0$$

$$\text{do}\ \lambda z \cdot \sigma\,(s\,(\iota\,(z)),\ \varkappa\,(z))\}\ (\sigma\,(0,\ x))))],$$

который мы обозначим через Quad и элемент

$$\lambda x \cdot q\,(x,\ r\,(\mathrm{Quad}\,(x),\ \mathrm{Quad}\,(x))),$$

который мы обозначим через Quadres.

Легко проверить, что для всякого натурального числа k Quadres (k) есть натуральное число, равное расстоянию k от наибольшего точного квадрата, не превосходящего k.

Таким образом, для всякого натурального числа k

$$\mathrm{Quadres}\,(k) = \mathrm{quadres}\,(k),$$

где quadres — примитивно-рекурсивная функция, рассматриваемая в [21], § 1 и § 7.

Докажем теперь, что утверждение (B) справедливо для всякой примитивно-рекурсивной функции φ от одной переменной. Согласно теореме Р. Робинсона ([22], см. также [21], § 7), всякая одноместная примитивно-рекурсивная функция может быть получена из функций $\lambda x \cdot (x+1)$ и quadres посредством операторов суммирования, суперпозиции и итерации. Для функций прибавления единицы и quadres утверждение B уже доказано (в роли элемента f в этих случаях можно взять, соответственно, элементы s и Quadres). Докажем, что операторы суммирования, суперпозиции и итерации сохраняют утверждение (B), иначе говоря: (I) если для одноместных примитивно-рекурсивных функций φ и ψ утверждение (B) справедливо, то оно справедливо также для суммы φ и ψ и для суперпозиции φ и ψ; (II) если для одноместной примитивно-рекурсивной функции φ справедливо (B), то оно справедливо и для итерации функции φ. На основании (A_{30}) и (A_{27}) (беря в (A_{30}) p в роли $f^{(2)}$), легко устанавливаем (I). Докажем (II). Пусть φ—одноместная примитивно-рекурсивная функция, удовлетворяющая (B), пусть элемент f таков, что при любом натуральном k

$$\varphi\,(k) = f\,(k),$$

и пусть ψ есть итерация φ. Тогда при любом натуральном k

$$\psi\,(0) = 0;$$

$$\psi\,(k+1) = \varphi\,(\psi\,(k)).$$

Построим элемент

$$\lambda x \cdot [\iota\,(\{\text{while}\ \lambda z \cdot \varkappa\,(z) \neq 0\ \text{do}\ \lambda z \cdot \sigma\,(f\,(\iota\,(z)),\ t\,(\varkappa\,(z)))\}\ (\sigma\,(0,\ x)))],$$

который мы обозначим через g. Легко проверить, что для любого натурального k

$$g\,(k) = \psi\,(k).$$

Таким образом, (II) доказано. Тем самым мы установили (B) для любой примитивно-рекурсивной функции φ.

Проведем несколько построений, опирающихся на это утверждение. Построим элемент υ такой, что для любого натурального k

$$\nu(k) = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Далее, на основании (A_{29}), (A_{31}) и (A_{35}) построим элемент σ^* такой, что для любых k и l.

$$\sigma^*(k, l) = \frac{(k+l)(k+l+1)}{2} + k.$$

Кроме того, снова опираясь на справедливость утверждения (B) для всякой одноместной примитивно-рекурсивной функции, построим элементы ι^* и $\varkappa^*$ такие, что при любом натуральном k $\iota^*(k)$ и $\varkappa^*(k)$ суть натуральные числа, и, кроме того

$$\iota^*(\sigma^*(k, l)) = k;$$

$$\varkappa^*(\sigma^*(k, l)) = l;$$

$$\sigma^*(\iota^*(k), \varkappa^*(k)) = k$$

при любых натуральных k и l.

Покажем теперь, что (B) справедливо также и для частично-рекурсивных функций. Пусть φ—произвольная частично-рекурсивная функция от одной переменной. Как известно ([7]), можно построить такую примитивно-рекурсивную функцию ψ от двух переменных, что при любом натуральном k

$$\varphi(k) \simeq \mu l\,[\psi(k, l) = 0].$$

Легко видеть, что осуществима примитивно-рекурсивная функция $\overline{\psi}$ такая, что при любом натуральном k

$$\overline{\psi}(k) = \psi(\iota^*(k), \varkappa^*(k)).$$

Построим элемент h такой, что при любом натуральном k

$$h(k) = \overline{\psi}(k).$$

Построим, наконец, элемент

$$\lambda x \cdot [\varkappa(\{\text{while } \lambda z \cdot h(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma(\iota^*(z), s(\varkappa^*(z)))\}(\sigma(x, 0)))]$$

и обозначим его через f. Легко проверить, что при любом натуральном k

$$f(k) \simeq \varphi(k).$$

Тем самым (B) полностью доказано.

Мы переходим теперь к построению элементов F и L таких, что для любого натурального числа n элемент $F(n)$ есть значение терма, имеющего Ξ-номер n, и для любого элемента x $L(x)$ есть элемент, удовлетворяющий условию $F(L(x)) =, x$.

Построим прежде всего элементы

$$\lambda xy \cdot \sigma(s(\iota(y)), \sigma(x, \varkappa(y)))$$

$$\lambda z \cdot \iota(\varkappa(z))$$

$$\lambda z \cdot \sigma(t(\iota(z)), \varkappa(\varkappa(z))),$$

которые обозначим соответственно через σ^{**}, ι^{**}, $\varkappa^{**}$. Легко видеть, что σ^{**}, ι^{**}, $\varkappa^{**}$ удовлетворяют аксиомам (A_{15})—(A_{19}), и, таким образом, σ^{**} есть спаривающая операция, а ι^{**} и $\varkappa^{**}$ являются для нее обратными спаривающими операциями. Построим теперь элемент

$$\lambda xy \cdot [\iota (\varkappa (\iota (\{\text{while } \lambda z \cdot \varkappa (z) \neq 0 \text{ do } \lambda z. \\ \sigma (\varkappa (\iota (z)), t (\varkappa (z)))\} (\sigma (x, y)))))]$$

и обозначим его через π. Нетрудно проверить, что объекты π, ι, $\sigma(0, 0)$ являются *системными* относительно σ^{**}, ι^{**}, $\varkappa^{**}$, 0, s, иначе говоря, для объектов π, ι, $\sigma(0, 0)$, σ^{**}, ι^{**}, $\varkappa^{**}$, 0, s выполнены аксиомы (A_{20})—(A_{25}), если эти объекты взять в роли объектов, соответственно, π, δ, Λ, σ, ι, $\varkappa$, 0, s в указанных аксиомах. Следовательно, мы можем понимать определение системы объектов, а также определения отношений „k есть длина системы z"; „x есть k-й член системы z" на основе построенных объектов π, ι, $\sigma(0, 0)$, σ^{**}, ι^{**}, $\varkappa^{**}$, 0, s.

В дальнейшем эти понятия будут употребляться лишь в указанном смысле (отметим, что на обычном языке „с многоточиями" систему, состоящую из m объектов $x_1, x_2, \cdots, x_m$, понимаемую в смысле введенного определения, можно записать в виде $\sigma(m, \sigma(x_1, \sigma(x_2, \cdots, \sigma(x_{m-1}, \sigma(x_m, 0))\cdots))))$.

Введем некоторые сокращенные обозначения. Посредством $\sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, где $n > 2$, мы будем обозначать выражение

$$\sigma(\sigma(\cdots \sigma(\sigma(x_1, x_2), x_3), \cdots, x_{n-1}), x_n);$$

посредством $\iota_n^k(z)$, где $1 \leqslant k \leqslant n$, будем обозначать выражение

$$\underbrace{\iota(\iota(\iota \cdots \iota}_{n-1}(z)\cdots))$$

в случае $k=1$, и выражение

$$\varkappa(\underbrace{\iota(\iota \cdots \iota}_{n-k}(z)\cdots))$$

—в случае $k>1$. Легко видеть, что всегда

$$\iota_n^k(\sigma_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)) = x_k \quad (1 \leqslant k \leqslant n).$$

Аналогичным образом будут пониматься обозначения

$$\sigma_n^*(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \sigma_n^{**}(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ \iota_n^{*k}(z),\ \iota_n^{**k}(z).$$

Определим теперь несколько понятий, связанных с термами. Пусть T—некоторый терм, и T'—некоторый подтерм терма T (т. е. некоторое слово, являющееся термом и входящее в слово T). *Уровень* заданного вхождения подтерма T' в терм T определим следующим образом: 1) уровень вхождения терма T в терм T есть 0; 2) если уровень вхождения подтерма $\Phi_l(T_1, T_2, \cdots, T_{n_l})$ или $\Omega(T_1, T_2)$ в терм T есть m, то уровень каждого из рассматриваемых при этом вхождений подтермов $T_1, T_2, \cdots, T_{n_l}$ или T_1, T_2 в терм T есть $m+1$. Наибольший уровень вхождений подтермов в заданный терм T будем называть *глубиной* терма T. Уменьшенное на единицу количество различных вхождений подтермов терма T, имеющих некоторый фиксированный уровень m, будем называть ***шириной*** уровня m в терме T. Будем говорить, что заданное вхождение подтерма T' терма T расположено *левее* заданного вхождения подтерма T'' того же терма, если указанное вхождение подтерма T' входит в левое крыло рассматриваемого вхождения ([1], гл. I, § 4) подтерма T'' в терм T. ***Абсциссой*** вхождения подтерма T' в терм T будем называть количество различных вхождений подтермов терма T, имеющих тот же уровень, что и T' и расположенных левее T'. ***Главной функциональной буквой*** терма T, имеющего вид $\Phi_i(T_1, T_2, \cdots, T_{n_i})$ или $\Omega(T_1, T_2)$ будем называть, соответственно, Φ_i или Ω.

Нетрудно построить частично-рекурсивные (на самом деле даже примитивно-рекурсивные) функции α, β, γ, δ, ε такие, что

1) Если n есть Ξ-номер терма T, то $\alpha(n)$ есть глубина терма T.

2) Если n есть Ξ-номер терма T и $0 \leqslant m \leqslant \alpha(n)$, то $\beta(n, m)$ есть ширина уровня m в терме T.

3) Если n есть Ξ-номер терма T, $0 \leqslant m \leqslant \alpha(n)$ и $0 \leqslant l \leqslant \beta(n, m)$, то $\gamma(n, m, l)$ есть Ξ-номер подтерма T' терма T, имеющего уровень m и абсциссу l в терме T.

4) Если n есть Ξ-номер терма T, имеющего вид $\Phi_i(T_1, T_2, \cdots, T_{n_i})$ или $\Omega(T_1, T_2)$, то $\delta(n)$ есть i в первом случае и $k+1$—во втором случае (т. е. $\delta(n)$ есть номер главной функциональной буквы терма T).

5) Если n есть Ξ-номер терма T, $0 \leqslant m \leqslant \alpha(n)$, $0 \leqslant l \leqslant \beta(n, m)$ и подтерм T' терма T, имеющий уровень m и абсциссу l в терме T, имеет вид $W(T_1, T_2, \cdots, T_j)$, и если $0 \leqslant i \leqslant j-1$, то $\varepsilon(n, m, l, i)$ есть абсцисса рассматриваемого при этом вхождения подтерма T_{i+1} в терм T.

Пользуясь ранее доказанным утверждением (B), построим элементы a, b, c, d, e такие, что для любых натуральных n, m, l, i

$$a(n) \simeq \alpha(n);$$

$$b(\sigma^*(n, m)) \simeq \beta(n, m);$$

$$c(\sigma_3^*(n, m, l)) \simeq \gamma(n, m, l);$$

$$d(n) \simeq \delta(n);$$

$$e(\sigma_4^*(n, m, l, i)) \simeq \varepsilon(n, m, l, i).$$

Построим далее элементы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \cdots, \bar{f}_k, \bar{f}_{k+1}, \bar{\bar{f}}_1, \bar{\bar{f}}_2, \cdots, \bar{\bar{f}}_k, \bar{\bar{f}}_{k+1}, \bar{G}, \bar{\bar{G}}, J$ такие, что для любых элементов x и z и любого натурального числа n оказывается (напомним, что рассматриваемая K-структура S имеет вид $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$:

$$\bar{f}_1(\ ) = f_1^{(n_1)};\ \bar{\bar{f}}_1(z) \simeq f_1^{(n_1)}(\pi(z, 0), \pi(z, 1), \cdots, \pi(z, n_1-1));$$

$$\bar{f}_2(\ ) = f_2^{(n_2)};\ \bar{\bar{f}}_2(z) \simeq f_2^{(n_2)}(\pi(z, 0), \pi(z, 1), \cdots, \pi(z, n_2-1));$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\bar{f}_k(\ ) = f_k^{(n_k)};\ \bar{f}_k(z) \simeq f_k^{(n_k)}(\pi(z, 0), \pi(z, 1), \cdots, \pi(z, n_k - 1));$$

$$\bar{f}_{k+1}(\ ) = R^{(2)};\ \bar{\bar{f}}_{k+1}(z) \simeq R^{(2)}(\pi(z, 0), \pi(z, 1));$$

$$\bar{G}(n) \simeq \text{if } n = 0 \text{ then } 0 \text{ else if } n = 1 \text{ then } \bar{f}_1(\ )$$

$$\text{else if } n = 2 \text{ then } \bar{f}_2(\ ) \text{ else} \cdots \text{ if } n = \mathbf{k}$$

$$\text{then } \bar{f}_k(\ ) \text{ else if } n = \mathbf{k}+1 \text{ then } \bar{f}_{k+1}(\ ) \text{ else } 0;$$

$$\bar{\bar{G}}(x, z) \simeq \text{if } x = 0 \text{ then } z \text{ else if } x = 1 \text{ then } \bar{\bar{f}}_1(z)$$

$$\text{else if } x = 2 \text{ then } \bar{\bar{f}}_2(z) \text{ else} \cdots \text{ if } x = \mathbf{k}$$

$$\text{then } \bar{\bar{f}}_k(z) \text{ else if } x = \mathbf{k}+1 \text{ then } \bar{\bar{f}}_{k+1}(z) \text{ else } z;$$

$$J(x) \simeq \text{if } x = 0 \text{ then } 0 \text{ else if } x = 1 \text{ then } n_1$$

$$\text{else if } x = 2 \text{ then } n_2 \text{ else} \cdots \text{ if } x = \mathbf{k} \text{ then}$$

$$n_k \text{ else if } x = \mathbf{k} + 1 \text{ then } n_2 \text{ else } 0.$$

В приведенных формулах части, выделенные жирным шрифтом, означают выражения вида $s(s(s \cdots s(s(0)) \cdots))$. Построение указанных элементов производится очевидным образом на основании аксиом (A_{26}), (A_{28}), (A_{30}), (A_{32}), (A_{34}), (A_{37}); отметим, что для построения элемента $\bar{\bar{G}}$ вначале надлежит построить элемент $\bar{\bar{G}}'$ такой, что при всяком y

$$\bar{\bar{G}}'(y) \simeq \text{if } \iota(y) = 0 \text{ then } \varkappa(y) \text{ else if } \iota(y) = 1$$

$$\text{then } \bar{\bar{f}}_1(\varkappa(y)) \text{ else if } \iota(y) = 2 \text{ then } \bar{\bar{f}}_2(\varkappa(y))$$

$$\text{else} \cdots \text{ else if } \iota(y) = \mathbf{k} + 1 \text{ then } \bar{\bar{f}}_{k+1}(\varkappa(y))$$

$$\text{else } \varkappa(y),$$

после чего требуемый элемент $\bar{\bar{G}}$ строится так, чтобы при любых x и z было

$$\bar{\bar{G}}(x, z) \simeq \bar{\bar{G}}'(\sigma(x, z)).$$

Построим теперь элемент

$$\lambda x \cdot \pi \underset{1}{(}\ \iota_3^3 \underset{2}{(} \underset{3}{\{} \text{while } \lambda z \cdot \iota_3^2(z) \neq 0 \text{ do } \lambda z \cdot \sigma_3 \underset{4}{(}\ \iota_3^1(z),$$

$$t \underset{5}{(}\ \iota_3^2(z) \underset{5}{)},\ \iota_5^5 \underset{6}{(}\ \underset{7}{\{} \text{while } \lambda y \cdot \iota_5^4(y) \neq 0 \text{ do } \lambda y \cdot \sigma_5 \underset{8}{(}\ \iota_5^1(y),$$

$$\iota_5^2(y),\ \iota_5^3(y),\ t \underset{9}{(}\ \iota_5^4(y) \underset{9}{)},\ \sigma^{**} \underset{10}{(} \bar{\bar{G}} \underset{11}{(} d \underset{12}{(} c \underset{13}{(} \sigma_3 \underset{14}{(}\ \iota_5^1(y),\ \iota_5^2(y),$$

$$t \underset{15}{(}\ \iota_5^4(y) \underset{15}{)} \underset{14}{)} \underset{13}{)} \underset{12}{)},\ \iota_6^6 \underset{16}{(}\ \underset{17}{\{} \text{while } \lambda u \cdot \iota_6^5(u) \neq 0 \text{ do } \lambda u \cdot \sigma_6 \underset{18}{(}\ \iota_6^1(u),$$

$$\iota_6^2(u),\ \iota_6^3(u),\ \iota_6^4(u),\ t \underset{19}{(}\ \iota_6^5(u) \underset{19}{)},\ \sigma^{**} \underset{20}{(} \pi \underset{21}{(}\ \iota_6^4(u),\ e \underset{22}{(} \sigma_4^* \underset{23}{(}\ \iota_6^1(u),\ \iota_6^2(u),$$

$$\iota_6^3(u).\ t\,(_{24}\ \iota_6^5(u)\ )_{24}\ )_{23}\ )_{22}\ )_{21},\ \iota_6^5(u)\ )_{20}\ )_{18}\ |_{17}\ (_{25}\ \sigma_6\ (_{26}\ \iota_5^1(y),\ \iota_5^2(y),\ t\,(_{27}\ \iota_5^4(y)\ )_{27},$$

$$\iota_5^3(y),\ J\,(_{28}\ d\,(_{29}\ c\,(_{30}\ \sigma_3^*\ (_{31}\ \iota_5^1(y),\ \iota_5^2(y),\ t\,(_{32}\ \iota_6^4(y)\ )_{32}\ )_{31}\ )_{30}\ )_{29}\ )_{28},\ \sigma(0,0)\ )_{26}$$

$$)_{25}\ )_{16}\ )_{11},\ \iota_5^5(y)\ )_{10}\ )_{8}\ \}_{7}\ \{_{33}\ \sigma_5\ (_{34}\ \iota_3^1(z),\ t\,(_{35}\ \iota_3^2(z)\ )_{35},\ \iota_3^3(z),$$

$$s\,(_{36}\ b\,(_{37}\ \sigma^*\ (_{38}\ \iota_3^1(z),\ t\,(_{39}\ \iota_3^2(z)\ )_{39}\ )_{38}\ )_{37}\ )_{36},\ \sigma(0,0)\ )_{34}\ )_{33}\ )_{6}\ )_{4}\ |_{3}$$

$$(_{40}\ \sigma_3\ (_{41}\ x,\ a(x),\ \iota_3^3\ (_{42}\ \{_{43}\ \text{while}\ \lambda w\cdot\iota_3^2(w)\neq 0\ \text{do}\ \lambda w.$$

$$\sigma_3\ (_{44}\ \iota_3^1(w),\ t\,(_{45}\ \iota_3^2(w)\ )_{45},\ \sigma^{**}\ (_{46}\ \overline{G}\,(_{47}\ c\,(_{48}\ \sigma_3^*\ (_{49}\ \iota_3^1(w),\ a\,(_{50}\ \iota_3^1(w)\ )_{50},$$

$$t\,(_{51}\ \iota_3^2(w)\ )_{51}\ )_{49}\ )_{48}\ )_{47},\ \iota_3^3(w)\ )_{46}\ )_{44}\ \}_{43}\ \{_{52}\ \sigma_3\ (_{53}\ x,\ s\,(_{54}\ b\,(_{55}\ \sigma^*\ (_{56}\ x,$$

$$a(x)\ )_{56}\ )_{55}\ )_{54},\ \sigma(0,0)\ )_{53}\ \}_{52}\ )_{42}\ )_{41}\ )_{40}\ )_{2},\ 0)_{1},$$

который мы обозначим через F.

Нетрудно проверить, что приведенное выражение для F обладает следующими свойствами:

1) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в фигурных скобках 17, по всякому элементу вида $\sigma_6(n, m, l, y, i, x)$ (где n есть Ξ-номер некоторого терма T; m есть натуральное число такое, что $0\leqslant m<\alpha(n)$; l есть натуральное число такое, что $0\leqslant l\leqslant\beta(m, n)$, y есть система, составленная из последовательно взятых (слева направо) значений всех подтермов терма T, имеющих уровень $m+1$; i есть натуральное число, не превосходящее размерности главной функциональной буквы подтерма терма T, имеющего уровень m и абсциссу l; x есть пустая система) выдает элемент $\sigma_6(n', m', l', y', 0, x')$, где n', m', l', y' совпадают соответственно, с n, m, l, y; x' есть пустая система в случае $i=0$, и x' есть система, состоящая из элементов

$$\pi(y, \varepsilon(n, k, l, 0))$$
$$\pi(y, \varepsilon(n, k, l, 1))$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\pi(y, \varepsilon(n, k, l, i-1))$$

в случае $i>0$.

2) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в фигурных скобках 7, по всякому элементу вида $\sigma_5(n, m, y, i, x)$ (где n есть Ξ — номер некоторого терма T; m есть натуральное число такое, что $0\leqslant m<\alpha(n)$; y есть система, составленная из последовательно взятых (слева направо) значений всех подтермов терма T, имеющих уровень $m+1$; i есть натуральное число, не превосходящее $\beta(n, m)+1$; x есть

пустая система) выдает элемент вида $\sigma_5(n', m', y', 0, x')$, где n', m', y' совпадают, соответственно, с n, m, y; x' есть пустая система в случае $i=0$, и x' есть система значений последовательно взятых $(i-1)$ подтермов T, имеющих уровень m и абсциссы от 0 до $i-1$ в случае $i>0$.

3) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в фигурных скобках 43, по всякому элементу вида $\sigma_3(n, m, x)$ (где n есть Ξ-номер некоторого терма T, m есть натуральное число, не превосходящее $\beta(n, \alpha(n))+1$, x есть пустая система), выдает элемент $\sigma_3(n', 0, x')$, где n' совпадает с n; x' есть пустая система при $m=0$ и x' есть система, состоящая из значений $m-1$ последовательно взятых подтермов терма T, имеющих уровень, равный глубине терма T и абсциссы от 0 до $m-1$ при $m>0$.

4) Одноместная операция, определяемая выражением, стоящим в в фигурных скобках 3, по всякому элементу вида $\sigma_3(n, m, x)$ (где n есть Ξ-номер некоторого терма T, m есть натуральное число, не превосходящее $\alpha(n)$, x есть система всех последовательно взятых подтермов терма T, имеющих уровень m), выдает элемент $\sigma_3(n', 0, x')$, где n' совпадает с n, и x' есть одноэлементная система, единственный член которой есть значение терма T.

Опираясь на указанные свойства основных частей выражения для F, легко показать, что элемент F обладает следующим свойством: (C) *если n есть Ξ-номер терма T, то $F(n)$ есть значение терма T.*

Построим, наконец, элемент

$$\lambda x\cdot\iota\,(\{\text{while }\lambda z\cdot F(\iota(z))\neq\varkappa(z)\text{ do}$$
$$\lambda z\cdot\sigma\,(s(\iota(z)),\ \varkappa(z))\}(\sigma(0,\ x)))$$

и обозначим его через L. Из определения L немедленно следует, что (D) *для любого элемента $xL(x)$ есть натуральное число такое, что $F(L(x))=x$.*

Пусть теперь φ есть произвольное рекурсивное преобразование элементов К-структуры S. Согласно (B) построим элемент g такой, что для любого натурального k

$$\varphi(k)\simeq g(k).$$

Построим элемент

$$\lambda x\cdot F(g(L(x)))$$

и обозначим его через f. Из (B), (C), (D) немедленно следует, что элемент f является ориентиром φ.

Теорема доказана.

Отметим, что в доказательстве теоремы 1 использованы некоторые методы, употребляемые в доказательстве теоремы 7.6 из [16].

8. Пусть фиксирована некоторая К-структура $(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}, R^{(2)})$, которую мы будем обозначать через S. Для всякого терма T К-структуры S определим выражение $\bar{T}$, получающееся из T посред-

ством замены всех символов $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_k$ символами $f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_k^{(n_k)}$ и всех символов Ω символами $R^{(2)}$. Пусть A—некоторая система аксиом относительно символов элементов К-структуры S. Будем говорить, что система аксиом A является *разрешающей*, если для любых термов T_1 и T_2 оказывается: из A выводимо $\widetilde{T_1} = \widetilde{T_2}$ или из A выводимо $\widetilde{T_1} \neq \widetilde{T_2}$ (примером разрешающей системы аксиом относительно символов базисных элементов может служить система аксиом пеановой К-структуры, дополненная аксиомами

$$0^{(0)}(\quad) = 0^{(0)};\ s^{(1)}(s^{(1)}) = 0^{(0)};$$

$$s^{(1)}(R^{(2)}) = 0^{(0)};\ s^{(1)} \neq 0^{(0)};\ R^{(2)} \neq 0^{(0)};\ s^{(1)} \neq R^{(2)};$$

$$\forall x\,(s^{(1)}(x) \neq s^{(1)});\ \forall x\,(s^{(1)}(x) \neq R^{(2)});\ \forall x\,(x^+ \supset$$

$$\supset x = 0^{(0)} \,\&\, x^- \supset x = s^{(1)}(0) \,\&\, x = 0^{(0)} \supset x^+ \,\&$$

$$x = s^{(1)}(0) \supset x^-)).$$

Пусть теперь S есть К-структура вида

$$(f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_{k-3}^{(n_{k-3})}, \sigma^{(2)}, \iota^{(1)}, \varkappa^{(1)}, R^{(2)}),$$

удовлетворяющая условиям теоремы 1, причем $\sigma^{(2)}$ есть спаривающая операция в S, а $\iota^{(1)}$ и $\varkappa^{(1)}$ суть обратные спаривающие операции для $\sigma^{(2)}$. Пусть A—разрешающая система аксиом относительно символов базисных элементов К-структуры S. К-структуру, удовлетворяющую указанным условиям, а также аксиомам из A и аксиомам

$$(A_{41})\quad \forall xy\,(x^+ \,\&\, y^+ \supset x = y);$$

$$(A_{42})\ \forall xy\,(x^- \,\&\, y^- \supset x = y),$$

будем называть *регулярной* К-структурой.

Пусть фиксированы некоторые операции $F_{26,1}, F_{26,2}, \cdots, F_{26,k}, F_{27}, F_{28}, F_{29}, F_{30}, F_{31}, F_{32}, F_{33}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, F_{37}, f_{38}, f_{39}, f_{40}$, удовлетворяющие условиям, указанным в соответствующих аксиомах $(A_{26})-(A_{40})$ (точнее—условиям, получающимся после удаления $\exists F$ или $\exists f$ из соответствующих аксиом). Пусть фиксированы элементы x_1 и x_2 такие, что $x_1 \neq x_2$. Введем понятие *регулярной операции* при помощи следующих порождающих правил:

1) Элементы

$$f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \cdots, f_{k-3}^{(n_{k-3})}, \sigma^{(2)}, \iota^{(1)}, \varkappa^{(1)}$$

$$R^{(2)}, F_{37}(f_1^{(n_1)}), F_{37}(f_2^{(n_2)}), \cdots, F_{37}(f_{k-3}^{(n_{k-3})}),$$

$$F_{37}(\sigma^{(2)}), F_{37}(\iota^{(1)}), F_{37}(\varkappa^{(1)}), F_{37}(x_1),$$

$$F_{37}(x_2), f_{38}, f_{39}, f_{40}$$

являются регулярными операциями.

2) Если $1 \leqslant i \leqslant k-3$ и $g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)}$ суть регулярные операции, то $F_{26,i}(g_1^{(1)}, g_2^{(1)}, \cdots, g_{n_i}^{(1)})$ есть регулярная операция; если $g_1^{(1)}$ и

$g_2^{(1)}$ суть регулярные операции, то $F_{26.\,k-2}(g_1^{(1)}, g_2^{(1)})$, $F_{26.\,k-1}(g_1^{(1)})$, $F_{26.\,k}(g_1^{(1)})$ суть регулярные операции.

3) Если $u^{(0)}$, $f^{(1)}$, $g^{(1)}$, $h^{(1)}$, $v^{(2)}$, $w^{(2)}$, $z^{(2)}$ суть регулярные операции, то $F_{27}(f^{(1)}, u^{(0)})$, $F_{28}(f^{(1)}, g^{(1)})$, $F_{29}(f^{(1)}, v^{(2)})$, $F_{30}(v^{(2)}, f^{(1)}, g^{(1)})$, $F_{31}(v^{(2)}, w^{(2)}, z^{(2)})$, $F_{32}(f^{(1)}, g^{(1)}, h^{(1)})$, $F_{33}(f^{(1)}, g^{(1)})$, $F_{34}(u^{(0)})$, $F_{35}(f^{(1)})$, $F_{36}(f^{(1)})$ суть регулярные операции.

Теорема 2. *Пусть S-регулярная K-структура с выделенными в ней регулярными операциями. Тогда:* (1) *для каждого рекурсивного преобразования термов K-структуры S можно построить регулярную операцию, являющуюся ориентиром этого преобразования*; (2) *каждая регулярная операция является ориентиром некоторого рекурсивного преобразования термов K-структуры S.*

Доказательство. Пусть φ есть рекурсивное преобразование термов K-структуры S. Тогда ориентир для φ строится в точности таким образом, как это было указано в теореме 1; из доказательства теоремы 1 непосредственно усматривается, что все необходимые при этом построения можно провести, сохраняя регулярность получаемых операций. Тем самым утверждение (1) доказано.

Доказательство утверждения (2) получается непосредственным образом при помощи индукции по построению регулярных операций. Тривиальным образом (2) верно для операций—констант

$F_{37}(f_i^{(n_i)})$, $F_{37}(\sigma^{(2)})$, $F_{37}(\iota^{(1)})$, $F_{37}(\varkappa^{(1)})$, $F_{37}(R^{(2)})$, $F_{37}(x_1)$, $F_{37}(x_2)$, f_{39}, f_{40}, а также для тождественной операции f_{38}. Для операций

$$f_1^{(n_1)},\ f_2^{(n_2)}, \cdots, f_{k-3}^{(n_{k-3})}, \sigma^{(2)},\ \iota^{(1)}, \varkappa^{(1)}, R^{(2)}$$

утверждение (2) легко устанавливается, исходя из свойств Ξ-номеров термов (в самом деле, для каждой из букв Φ_i при $1 \leqslant i \leqslant k$ легко построить примитивно-рекурсивную функцию φ_i от n_i переменных, которая для любых натуральных чисел $l_1, l_2, \cdots, l_{n_i}$, являющихся Ξ-номерами термов $T_1, T_2, \cdots, T_{n_i}$) выдавала бы Ξ-номер терма $\Phi_i(T_1, T_2, \cdots, T_{n_i})$ (аналогичное утверждение верно для Ω). Далее, если утверждение (2) справедливо для объектов, подаваемых на вход одной из операций F_{26}, F_{27}, F_{28}, F_{30}, F_{31}, F_{34}, F_{35}, F_{36}, то оно будет, очевидно, справедливо и для объекта, выдаваемого в этом случае на выходе соответствующей операции (суперпозиция рекурсивных функций рекурсивна, и добавление фиктивного аргумента не нарушает рекурсивности).

Аналогичное утверждение для F_{32} и F_{33} легко доказывается на основании известных теорем о рекурсивных функциях (см., например, [7]), с использованием разрешающей системы аксиом A. В самом деле, из наличия разрешающей системы аксиом в рамках определенной формально-дедуктивной системы следует на основании теоремы Э. Поста (см. [7], § 57, теор. VI (c)) рекурсивность предикатов „n_1 и n_2 суть Ξ-номера термов T_1 и T_2, для которых из A выводимо $T_1 = \widetilde{T}_2$“, „n_1 и n_2 суть Ξ-номера термов T_1 и T_2, для которых из A выводимо $\widetilde{T}_1 \neq \widetilde{T}_2$“.

Обозначим рекурсивную характеристическую функцию для первого из этих предикатов через ξ; Ξ-номер терма $R^{(2)}(x_1, x_2)$ обозначнм через u; Ξ-номер терма $R^{(2)}(x_1, x_2)$ обозначим через v. Теперь, если φ, ψ, ω—рекурсивные преобразования элементов К-структуры S с ориентирами f, g, h, то тогда рекурсивная функция ρ, определяемая системой равенств $\delta(0, 1, n) = \psi(n)$; $\delta(1, 0, n) = \omega(n)$; $\rho(n) = \delta(\xi(u, \varphi(n)), \xi(v, \varphi(n)), n)$ к которой добавлены определяющие системы равенств для φ, ψ, ω, будет рекурсивным преобразованием элементов К-структуры S с ориентиром if f^{+} then g else h; функция τ, определяемая системой равенств $\delta(n, 0) = n$; $\delta(n, k+1) = \psi(\delta(n, k))$; $\tau(n) = \delta(n, \mu k\,[\xi(u, \varphi(\delta(n, k))) = 0])$, будет рекурсивным преобразованием элементов К-структуры S с ориентиром while f^{-} do g.

Теорема доказана.

Мы можем теперь ввести некоторый вариант уточненного понятия алгорифма на основе аксиоматического подхода. В роли такого понятия можно рассматривать понятие *регулярной операции в произвольной регулярной К-структуре*. На основании теоремы 2 мы можем утверждать взаимную моделируемость регулярных операций и рекурсивных функций. Естественно ожидать, что теория регулярных операций в регулярных К-структурах будет содержать аналоги всех основных утверждений теории алгорифмов, которые будут при этом получаться посредством логической дедукции из аксиом регулярной К-структуры. Проверка этой гипотезы выходит за рамки настоящей статьи. В случае подтверждения этой гипотезы мы получим изложение одного из разделов конструктивной математики, не апеллирующее в процессе его развертывания ни к классической математике, ни к „физике".

9. В заключение остановимся еще на одном вопросе, связанном с аксиоматическим построением конструктивных математических теорий, а именно, на вопросе о *реализациях* систем аксиом. Реализацией некоторой системы аксиом естественно называть набор конкретных операций, удовлетворяющих этим аксиомам. Естественным образом можно строить реализации систем аксиом в рамках других аксиоматических систем, так, например, по ходу доказательства теоремы 1 мы построили реализацию системы аксиом (A_{20})—(A_{23}) средствами аксиоматической системы, рассматривавшейся в теореме 1. (Заметим, что аналогичным образом, можно интерпретировать, например, построение геделевской нумерации „вещей" в [7], § 50 или кодирование натуральных чисел посредством слов в [1], [3], [5]. Но кроме построения подобных, так сказать, „относительных" реализаций одних систем аксиом в рамках других, естественно рассматривать также и вопрос об „абсолютных" реализациях систем аксиом, т. е. о таких реализациях, которые существовали бы автономно, а не в рамках других аксиоматических систем. Однако, поставив вопрос таким образом, мы приходим к выводу о том, что у многих систем аксиом рассматриваемого типа, даже у столь простых, как система аксиом пеановой К-структуры, „абсолютных" реализаций может и не существовать. В самом деле,

очевидно, что ни операция приписывания палочек на бумаге ([1], стр. 12; [5], стр. 39), ни операция постановки точек на бумаге ([23], стр. 24 русского перевода), ни операция бросания зерен в кучу не удовлетворяют аксиомам пеановой К-структуры; более того, каждый раз мы можем в таких случаях указать границу, начиная с которой дальнейшее применение операции s становится заведомо физически невозможным (ср. [7], стр. 54—55). Ссылка на абстракцию потенциальной осуществимости ([1], стр. 15; [3], стр. 8—9; [4], стр. 229; [5], стр. 287) в данном случае означала бы просто, что мы волевым образом провозгласили бы наличие реализаций у систем аксиом, которые на самом деле реализаций не имеют.

Автор отнюдь не предлагает отказываться вследствие указанных обстоятельств от рассмотрения системы аксиом пеановой К-структуры или других родственных систем аксиом; однако невозможность предъявления „абсолютных“ (физических) реализаций таких систем аксиом есть факт, с которым необходимо считаться. Из-за этого, в частности, непротиворечивость подобного рода систем аксиом может быть доказана лишь метаматематическими методами.

Формализация системы аксиом указанного типа в рамках формально-логических систем не может, таким образом, рассматриваться как „порочный круг“ (см. подстрочное примечание на стр. 157); напротив, без такой формализации мы были бы не в состоянии удовлетворительно решать целый ряд вопросов, касающихся системы аксиом, в том числе и вопрос о ее непротиворечивости.

Автор приносит глубокую благодарность участникам Ленинградского семинара по конструктивной математике, и, в особенности его руководителю Н. А. Шанину, за ряд ценных советов и замечаний, значительно повлиявших на окончательную редакцию статьи.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 10.VII.1968

Ի. Դ. ԶԱՍԼԱՎՍԿԻ. Կոնստրուկտիվ օբյեկտների և օպերացիաների աքսիոմատիկ սահմանման մասին (*ամփոփում*)

Առաջարկվում է մի եղանակ կոնստրուկտիվ մաթեմատիկայի որոշ բաժինների աքսիոմատիկ հիմնավորման համար։

Այս եղանակում կոնստրուկտիվ ուղղության հիմնական նախադրյալները զուգակցված են աքսիոմատիկ տեսությունների կառուցման սկզբունքների հետ։ Սահմանվում է ալգորիթմի խիստ գաղափարի աքսիոմատիկ ձևը, որը վերաբերվում է ցանկացած բնույթ ունեցող առարկաներին։ Ապացուցվում է, որ այս գաղափարը որոշ իմաստով համարժեք է ռեկուրսիվ ֆունկցիայի գաղափարին։

I. D. ZASLAVSKII. *On axiomatic definition of constructive objects and operations*
(summary)

A method for developing some parts of constructive mathematics in axiomatic aspect is proposed. This method combines the chief concepts of the constructive branch in mathematics with the principles concerning to formal derivation of theorems from the axioms. The axiomatic variant of the concept of algorithm dealing with the objects of any nature is defined. The theorems about the equivalence between the concept of algorithm and the notion of recursive function, are proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Марков.* Теория алгорифмов, Труды Матем. Инст. им. В. А. Стеклова, XLII, 1954.
2. *А. А. Марков.* О конструктивных функциях, Труды Математ. института им. В. А. Стеклова, LII, 1958, 315—348.
3. *А. А. Марков.* О конструктивной математике, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXVII 1962, 8—14.
4. *Н. А. Шанин.* О конструктивном понимании математических суждений, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LII, 1958, 226—311.
5. *Н. А. Шанин.* Конструктивные вещественные числа и конструктивные функциональные пространства, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXVII, 1962, 15—294.
6. *Н. А. Шанин.* К вопросу о конструктивном понимании опорных формул 1, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 1964, 348—379.
7. *S. C. Kleene.* Introduction to metamathematics, New York—Toronto (русский перевод: С. К. Клини. Введение в метатематику и математику, ИЛ, М., 1957).
8. *G. Kreisel.* Foundation of intuitionistic logic. Logic Methodology and Philosophy of Science, Proceedings of the 1960 International Congress, Edit. by P. Nagel. P. Suppes, A. Tarski, Standford Univ. Press, Standford, California, 1962, 198—210. (русский перевод; Крейсел Г. Основания интуиционистской логики, Сб., „Математическая логика и ее применения" под редакцией Э. Нагеля, П. Саппса, А. Тарского, перев. под ред. А. И. Мальцева, „Мир", М., 1965, 229—244).
9. *H. B. Curry.* A formalisation of recursive arithmetic, Amer. Journ. of Math., 63, 1941, 263—282.
10. *R. L. Goodstein.* Constructive formalism, Essays of the foundation of mathematics, Leicester. 1951.
11. *R. L. Goodstein.* Recursive number theory, Amsterdam, 1957.
12. *R. L. Goodstein.* Mathematical logic. Leicester, 1957. (русский перевод; Р. Л. Гудстейн, Математическая логика, ИЛ, М., 1958).
13. *А. В. Идельсон.* Исчисления конструктивной логики с подчиненными переменными, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 1964, 228—343.
14. *А. В. Идельсон.* Замечания об исчислениях конструктивной логики с подчиненными переменными и аксиомой полной индукции, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова. XCIII, 1967, 106—112.
15. *В. А. Лившиц.* О конструктивных математических теориях, согласованных с классической логикой, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, XCIII, 1967, 113—122.
16. *И. Д. Заславский.* Граф—схемы с памятью, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, LXXII, 1964, 99—192.
17. *А. И. Мальцев.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М., „Наука", 1965.
18. *E. Landau.* Grundlagen der Analysis, Göttingen, 1930 (русский перевод: Э. Ландау. Основы анализа, М. ИЛ, 1947).
19. *A. Church.* The calculi of λ-conversions, Annals of Math. Studies, 6, 1941.
20. *J. W. Backus, F. L. Bauer, J. Green, C. Katz, J. Mc. Carthy, P. Naur* (editor), *A. J. Perlis, H. Rutishauser, K. Samelson, B. Vauquois, J. H. Wegstein, A. Van Wijngaarden, M. Woodger.* Report on the algorithmic language ALGOL—60, Numerische Math., 2, 1960, 106—139. Русский перевод: Дж. Бэкус, Ф. Л. Бауэр, Дж. Грин, С. Кэтц, Дж. Маккарти, П. Наур, Э. Дж. Перлис, Х. Рутисхаузер,

К. Замельзон, Б. Вокуа, Дж. Уэгстейн, А. Ван-Венгаарден, М. Вуджер, Сообщение об алгорифмическом языке „АЛГОЛ—60" под редакцией Петера Наура, Вычислительная математика и математическая физика, 2, 1961.
21. *R. Peter*. Rekursive Funktionen, Budapest, (русский перевод: Р. Петер, Рекурсивные функции, ИЛ, М., 1954).
22. *R. M. Robinson*. Primitive recursive functions, Bull of Amer. Math. Soc., 53, 1947, 925—942.
23. *A. Heyting*. Intuitionism. An introduction, Amsterdam, 1956 (русский перевод: А. Гейтинг. Интуиционизм. Введение, „Мир", М., 1965).