ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

УДК 517.535 РЕФЕРАТ

М. Н. ШЕРЕМЕТА

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть функция $\omega(z)$, $z=\rho e^{i\theta}$ — аналитическая в области $\{\rho>a, |\theta|<\pi-\eta\}$ (где $\eta>0$ — некоторая достаточно малая постоянная), действительная на вещественной оси, удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(z)=\omega(\rho)+\omega_1(\rho,\theta)+i\omega_2(\rho,\theta)$, где $\omega_1(\rho,\theta)$ и $\omega_2(\rho,\theta)$ — действительные величины, которые при $|\theta|<\pi-\eta$ и $\rho\to\infty$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\omega_1(\rho,\theta)=O\left(\frac{1}{\ln\rho\ln_2\rho}\right) \text{ и } \omega_2(\rho,\theta)=O\left(\frac{1}{\ln\rho\ln_2\rho}\right);$$

2) $\omega'(z)=O\left(\dfrac{1}{\rho\ln\rho\ln_2\rho}\right)$ при $\rho\to\infty$ и $|\theta|<\pi-\eta$;

3) $\omega''(z)=O\left(\dfrac{1}{\rho^2\ln\rho\ln_2\rho}\right)$ при $\rho\to\infty$ и $|\theta|<\pi-\eta$;

4) $0<\lambda_1\leqslant\omega(\rho)\leqslant\lambda_2<\infty$, $\lambda_1\equiv\text{const}$, $\lambda_2\equiv\text{const}$.

Здесь через $\ln_k x$ обозначена k-я итерация логарифма:

$$\ln_1 x=\ln x,\ \ln_k x=\ln(\ln_{k-1}x),\ k=2,3,4,\cdots.$$

Примером функции, удовлетворяющей указанным выше условиям, может служить функция

$$\omega(z)=\frac{1}{2}\{\lambda_1+\lambda_2+(\lambda_2-\lambda_1)\sin(\ln_3 z)\},$$

где каждый логарифм понимается в смысле главного значения.

Миттаг-Леффер [1] исследовал асимптотику степенного ряда

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)},$$

где $x=re^{i\varphi}$, а α — постоянная величина, $0<\alpha<\infty$, нашей целью является исследование асимптотического поведения ряда

$$E_\omega(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))}, \tag{1}$$

где $\omega(z)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и для целочисленных значений k, $0\leqslant k\leqslant[a]+1$, $\omega(k)$ — произвольная последовательность. Здесь $[a]$ — целая часть числа a. Исследование асимптотического поведения ряда (1) мы проводим в основном тем же методом, что и Миттаг-Леффлер [1], используя при этом метод перевала (см. [2], [3]).

Обобщением функции Миттаг-Леффлера занимались многие авторы, обзор см. в [4], §§ 18.1, 18.3. В этом обзоре не указаны работы М. М. Джрбашяна, подытоженные в монографии [5], и статьи В. Ж. Риекстыни [6], [7]. В отличие от всех этих работ, где рассматривались случаи, когда нижний порядок функции λ равен порядку ρ, мы будем рассматривать и тот случай, когда $\lambda \neq \rho$. Класс функций, рассматриваемый нами, содержит все известные нам обобщения функций типа Миттаг-Леффлера, которые рассматривались ранее, но асимптотика, которую мы находим, менее точна, чем известная в частных случаях.

1°. Обозначим через $\mu(r)$ максимальный член ряда (1), через $\nu = \nu(r)$ — его центральный индекс. Используя свойства Г-функции ([8], стр. 32, 36), а также условия 2), 3), 4), можно показать, что $\mu(r)$ и $\nu(r)$ при $r \to \infty$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\ln r = \omega(\nu) \ln(\nu\omega(\nu)) + O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right), \tag{2}$$

$$\mu(r) = \exp\left\{\nu\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right)\right)\right\}.$$

Асимптотика функции (1) находится при помощи функции $\omega(\nu)$. Пусть $x = re^{i\varphi}$, $\delta > 0$ — достаточно малая постоянная величина, $m = 0, 1, 2, \cdots$. Введем следующие обозначения. Скажем, что

$$x \in D_0, \text{ если } \begin{cases} \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 1 - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right); \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(1)}, \text{ если } \begin{cases} 2m - \dfrac{\delta}{\pi} \leqslant \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 2m + 1 - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ 2m\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta - 2m\pi; \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(2)}, \text{ если } \begin{cases} 2m + 1 - \dfrac{\delta}{\pi} \leqslant \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ -2(m+1)\pi + \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2(m+1)\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right); \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(3)}, \text{ если } \begin{cases} 2m + 1 - \dfrac{\delta}{\pi} < \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ 2(m+1)\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta - 2m\pi; \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(4)}, \quad \text{если} \quad \begin{cases} 2(m+1) - \dfrac{\delta}{\pi} \leqslant \dfrac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) + 1 - \dfrac{\delta}{\pi}, \\ -2(m+1)\pi + \dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2(m+2)\pi - \left(\dfrac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right). \end{cases}$$

Кроме того, через D_δ обозначим следующее множество:

$$D_\delta = G / \left\{ \left| \varphi \pm \frac{\pi\omega(\nu)}{2} \right| < \delta \right\},$$

где через G обозначена плоскость переменного x.

Имеет место следующая

Основная теорема. *Для функции $E_\omega(x)$, представленной рядом (1), где $\omega(z)$ — аналитическая в области $\{|z| > a,\ |\arg z| < \pi - \eta\}$, действителная на вещественной оси функция, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3) и 4), справедливы следующие соотношения:*

$$E_\omega(x) = \begin{cases} \exp\left\{ O\left(\dfrac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, \ \textit{если}\ x \in D_0 \cap D_\delta, & (3) \\ \exp\left\{ O\left(\dfrac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \sum\limits_{n=-(m+j)}^{m} \exp\left\{ (1 + o(1))\ x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} e^{\frac{2\pi i n}{\omega(\nu)}} \right\} + \\ \quad + O\left(\dfrac{\nu (\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right), \ \textit{если}\ x \in \left(\bigcup\limits_{l=1}^{4} D_m^{(l)}\right) \cap D_\delta, & (4) \end{cases}$$

где

$$j = \begin{cases} 0, & \textit{если}\ x \in D_\delta \cap (D_m^{(1)} \cup D_m^{(2)}), \\ 1, & \textit{если}\ x \in D_\delta \cap (D_m^{(3)} \cup D_m^{(4)}). \end{cases}$$

2°. Пусть функция $\lambda_1(\rho) > 0$ при $\rho > a$ монотонно стремится к нулю, когда $\rho \to \infty$, причем $\underline{\lim}_{\rho \to \infty} \lambda_1(\rho) \ln_4 \rho = c > 0$, а функция $\lambda_2(\rho) > 0$ при $\rho > a$ монотонно стремится к ∞, когда $\rho \to \infty$, причем $\overline{\lim}_{\rho \to \infty} \lambda_2(\rho) (\ln_4 \rho) = d < \infty$, и пусть функция $\omega(z)$ вместо условия 4) удовлетворяет более слабому условию

$$5) \qquad \lambda_1(\rho) \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2(\rho).$$

Примером такой функции может служить

$$\omega(z) = \frac{1}{2} \{(\ln_4 z)^{-1} + \ln_4 z + (\ln_4 z - (\ln_4 z)^{-1}) \sin(\ln_3 z)\},$$

где каждый логарифм понимается в смысле главного значения.

Основная теорема допускает следующее обобщение:

Теорема 1. *Для функции $E_\omega(x)$, представленной рядом (1), где $\omega(z)$ удовлетворяет условиям основной теоремы, кроме условия 4), которое заменено условием 5), справедливы соотношения (3) и (4), где в (4) вместо*

$$\exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}$$

стоит

$$\exp\left\{O\left(\frac{\nu (\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right)\right\}.$$

В случае, когда $\lambda_1(\rho) \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2 < 2$, $\lambda_2 \equiv \text{const}$, основная теорема уточняется, а именно, если обозначить через $\check{D}_0$ множество тех значений $x = re^{i\varphi}$, для которых

$$\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right),$$

через $\check{D}_0^{(1)}$ — множество тех значений $x = re^{i\varphi}$, для которых

$$-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right) < \varphi \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \frac{\delta}{\ln_4 \nu},$$

а через $\check{D}_\delta$ — следующее множество

$$\check{D}_\delta = \left\{\nu > a,\ \lambda_1(\nu) \leqslant \omega(\nu) \leqslant \lambda_2\right\} \setminus \left\{\left|\varphi \pm \frac{\pi\omega(\nu)}{2}\right| < \frac{\delta}{\ln_4 \nu}\right\},$$

где $\delta > 0$ — произвольно малое число, то имеет место

Теорема 2. *Для функции* $E_\omega(x)$ *справедливы соотношения*

$$E_\omega(x) = \begin{cases} \exp\left\{O\left(\dfrac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, & \text{если } x \in \check{D}_0 \cap \hat{D}_\delta, \\[2ex] \exp\left\{O\left(\dfrac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \exp\left\{(1+o(1))\, x^{\frac{1}{\omega(\nu)}} + O\left(\dfrac{\nu (\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right)\right\}, & \end{cases}$$

если $x \in \check{D}_0^{(1)} \cap D_\delta$

при $r \to \infty$.

3°. Из равенства (2), используя условие 2), можно получить, что

$$\omega(\nu) = \omega(r) + o(1),$$

а используя условия, наложенные на функции $\lambda_1(\rho)$ и $\lambda_2(\rho)$, а также условия 2) и 5), можно показать, что

$$O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right) = O\left(\frac{\nu (\ln_4 \nu)^2}{\ln_3 \nu}\right) = o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right),\quad O\left(\frac{\nu (\ln_3 \nu)^3}{\ln_2 \nu}\right) = o\left(r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}\right).$$

Поэтому из основной теоремы и теорем 1 и 2 легко получить, что

$$\ln M(r, E_\omega) = \ln E_\omega(r) = (1 + o(1))\, r^{\frac{1}{\omega(\nu)}},$$

где $M(r, E_\omega) = \max\limits_{|x|=r} |E_\omega(x)|$. Нетрудно также показать, что характеристическая функция Неванлинны удовлетворяет следующему соотношению:

$$T(r,\ E_\omega)=(1+o(1))\,\frac{\omega(\nu)}{\pi}\,\sin\left\{\min\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{\omega(\nu)}\right)\right\}r^{\frac{1}{\omega(\nu)}}$$

при $r\to\infty$.

4°. Пусть $f(re^{i\varphi})$ — целая функция порядка ρ и нижнего порядка λ, $\lambda\leqslant\rho$. Класс таких функций обозначим чéрез $\Lambda_{\lambda,\,\rho}$. Если $f(re^{i\varphi})\in\Lambda_{\lambda,\,\rho}$, то (см. [9] и [10])

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln^+|f(re^{i\varphi})|}{T(r,\ f)}\leqslant\begin{cases}\dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda},\ 0\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2mm] \pi\lambda,\quad \lambda>\dfrac{1}{2},\end{cases}\tag{6}$$

для всех φ, $0\leqslant\varphi<2\pi$. Так как $T(r,\ f)\leqslant\ln M(r,\ f)$, то в случае, когда $\lambda=0$, очевидно, что оценка (6) точна. Если $\frac{1}{2}<\lambda\leqslant\rho\leqslant\infty$, пример целой функции из класса $\Lambda_{\lambda,\,\rho}$, показывающий точность оценки (6), построил В. П. Петренко [11]. Функция $E_\omega(x)$ указывает на точность оценки (6) и в случае, когда $0<\lambda\leqslant\rho\leqslant\infty$, без ограничения $\lambda>\frac{1}{2}$. Действительно, если положить $\lambda_1=\frac{1}{\rho}$, $\lambda_2=\frac{1}{\lambda}$, $0<\lambda\leqslant\rho\leqslant\leqslant\infty$, и выбрать $\omega(r)$ так, чтобы $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\omega(\nu)=\lambda_2=\frac{1}{\lambda}$, $\varliminf\limits_{r\to\infty}\omega(\nu)=\lambda_1==\frac{1}{\rho}$ (а это возможно, ввиду (5)), то легко видеть, что порядок функции $E_\omega(x)$ равен ρ, а нижний порядок равен λ. При $\varphi=0$ выполняется $\ln^+|E_\omega(re^{i\varphi})|=\ln M(r,\ E_\omega)$ и

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\ln M(r,E_\omega)}{T(r,\ E_\omega)}=\varliminf_{r\to\infty}\frac{\pi}{\omega(\nu)\sin\left\{\min\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{\omega(\nu)}\right)\right\}}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda},\ 0<\lambda\leqslant\dfrac{1}{2},\\[2mm] \pi\lambda,\quad \lambda>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Автор выражает глубокую признательность А. А. Гольдбергу за внимательное руководство и М. А. Евграфову за ценные указания. Библиографий 11.

Львовский государственный университет
им. Франко

Поступило 15.VIII.1968.

Полный текст статьи депонирован в ВИНИТИ.