ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

Н. О. СИНАНЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

§ 1. Введение

Н. К. Бари в работе [1] установила, что для всякой измеримой почти везде конечной функции $f(x)$, определенной на [0, 1], существует ряд по системе Хаара, который сходится к ней почти всюду на [0,1].

В работе [2] было установлено существование ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_n (x) \tag{1}$$

по системе Хаара, обладающего тем свойством, что для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$ существует подряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \chi_{n_k} (x)$ ряда (1), сходящийся к $f(x)$ почти всюду.

Эти результаты были значительно усилены Ф. Г. Арутюняном в работе [3], а именно, была установлена

Теорема 1. Пусть $f(x)$—измеримая почти везде конечная функция на [0,1]. Тогда существует абсолютно сходящийся почти всюду ряд по системе Хаара такой, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k (x) = f(x) \tag{2}$$

почти всюду на [0, 1].

В настоящей работе для системы Хаара $\{\chi_n(x)\}$ и для некоторого более общего класса ортогональных систем $\{\varphi_n(x)\}$ исследуется следующая задача.

Пусть $\{\varphi_{n_k}(x)\}$—подсистема системы $\{\varphi_n(x)\}$. Найти условия (если возможно, необходимые и достаточные) на подпоследовательности $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, обеспечивающие возможность представления любой функции $f(x)$ сходящимся к ней почти всюду рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k} (x).$$

Близкие к вышеприведенной задаче вопросы были исследованы в работах [4[и [5].

В работе [4] было установлено, что если из полной в $L_2[0, 1]$ ортонормальной системы $\{\varphi_n(x)\}$ удалить любое конечное число функций, то множество линейных комбинаций остальных функций всюду плотно в смысле сходимости по мере в пространстве конечных измеримых функций.

Было установлено также, что аналогичное свойство сохраняется и для некоторых подсистем $\{\varphi_{n_k}(x)\}$, где отсутствует бесконечное число функций из системы $\{\varphi_n(x)\}$.

В работе [5] была показана следующая

Теорема 2. Пусть $\Phi = \{\Phi_n\}$ есть подсистема системы Хаара $\{\chi_n(x)\}$. Пусть далее $E_n = \{x\colon \Phi_n(x) \neq 0\}$ и $E = \lim\limits_{n\to\infty} \sup E_n$. Тогда множество линейных комбинаций функций Φ всюду плотно в смысле сходимости по мере в пространстве конечных измеримых функций на измеримом множестве G тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{mes} G = \operatorname{mes}(G \cap E). \tag{3}$$

Доказывается, что эту теорему можно значительно усилить, а именно, справедлива

Теорема 3. *Если $\{\Phi_n(x)\}$ есть множество функций Хаара, для которого выполнено условие* (3), *то для любой почти везде конечной измеримой функции $f(x)$, определенной на множестве G, существует ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Phi_n(x),$$

абсолютно сходящийся к $f(x)$ почти всюду на G.

Эта теорема получена как следствие более общей теоремы, для формулировки которой нам нужно привести определение одного класса ортогональных систем.

Пусть дана последовательность положительных чисел $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$, которые удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_n < 1,\ n=0, 1, 2, \cdots \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n = +\infty. \tag{4}$$

Определим первую функцию следующим образом:

$$\psi_0^{(0)}(x) = 1,\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \tag{5}$$

Внутри отрезка $[0, 1]$ возьмем интервал $\gamma_0^{(1)}$, длина которого равна ε_0. Разделим $\gamma_0^{(1)}$ на два равных интервала $\overset{+}{\gamma}{}_0^{(1)}$ и $\overset{-}{\gamma}{}_0^{(1)}$, и определим функцию $\psi_0^{(1)}(x)$ следующим образом:

$$\psi_0^{(1)}(x) \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \overset{+}{\gamma}{}_0^{(1)} \\ -1 \text{ при } x \in \overset{-}{\gamma}{}_0^{(1)} \\ 0 \text{—в остальных точках.} \end{cases} \tag{6}$$

Через $\overset{-}{\gamma}{}_1^{(k)}$ $(k=1, \cdots, \nu_1)$ обозначим интервалы, на каждом из которых функция $\psi_0^{(1)}(x)$ принимает постоянные значения. Число ν_1

равно трем, если интервал $\gamma_0^{(1)}$ имеет общий конец с отрезком $[0, 1]$ и четырем—в противном случае.

Пусть $\gamma_1^{(k)}$ такие интервалы, что

$$\gamma_1^{(k)} \subset \tilde{\gamma}_1^{(k)}, \quad \text{mes}\, \gamma_1^{(k)} = \varepsilon_1 \cdot \text{mes}\, \tilde{\gamma}_1^{(k)}, \quad k=1, \cdots, \nu_1; \tag{7}$$

разделим $\gamma_1^{(k)}$ на два равных интервала и обозначим эти интервалы слева направо через $\overset{+}{\gamma}_1^{(k)}$ и $\overset{-}{\gamma}_1^{(k)}$.

Определим функции первой группы следующим образом:

$$\psi_1^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \overset{+}{\gamma}_1^{(k)} \\ -1 \text{ при } x \in \overset{-}{\gamma}_1^{(k)} \\ 0\text{—в остальных точках,} \end{cases} \tag{8}$$

где $k = 1, \cdots, \nu_1$.

Предположим, что построены функции $\psi_{p-1}^{(k)}(x)$ $(p-1)$-ой группы. Обозначим через $\gamma_{p-1}^{(k)}$ $(k = 1, 2, \cdots, \nu_{p-1})$ интервал минимальной длины, вне которого $\psi_{p-1}^{(k)}(x)$ тождественно равна нулю

Положим

$$G = [0, 1] - \bigcup_{k=1}^{\nu_{p-1}} \overline{\gamma_{p-1}^{(k)}},$$

и обозначим через $E_{p-1}^{(i)}$ составляющие интервалы этого множества. Пусть $\overset{+}{\gamma}_{p-1}^{(k)} = \{x : \psi_{p-1}^{(k)}(x) = 1\}$ и $\overset{-}{\gamma}_{p-1}^{(k)} = \{x : \psi_{p-1}^{(k)}(x) = -1\}$. Внутри каждого из отрезков $\overline{\overset{+}{\gamma}_{p-1}^{(k)}}$, $\overline{\overset{-}{\gamma}_{p-1}^{(k)}}$ и $\overline{E_{p-1}^{(i)}}$ возьмем по интервалу с длиной, равной соответственно $\varepsilon_p \cdot |\overset{+}{\gamma}_{p-1}^{(k)}|$, $\varepsilon_p \cdot |\overset{-}{\gamma}_{p-1}^{(k)}|$ и $\varepsilon_p \cdot |E_{p-1}^{(i)}|$.

Полученные интервалы обозначим через $\gamma_p^{(k)}$, $k=1, \cdots, \nu_p$. Функции $\psi_p^{(k)}(x)$ определим следующим образом:

$$\psi_p^{(k)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \overset{+}{\gamma}_p^{(k)} \\ -1 \text{ при } x \in \overset{-}{\gamma}_p^{(k)} \\ 0\text{—в остальных точках,} \end{cases} \tag{9}$$

где $k = 1, \cdots, \nu_p$ и $\overset{+}{\gamma}_p^{(k)}$ и $\overset{-}{\gamma}_p^{(k)}$ интервалы, полученные разделением $\gamma_p^{(k)}$ на две равные части.

Продолжая этот процесс, получим систему попарно ортогональных функций

$$\psi_0^{(0)}(x), \psi_0^{(1)}(x), \quad \{\psi_n^{(k)}(x)\}; \ 1 \leqslant k \leqslant \nu_n, \ n=1, 2, \cdots \tag{10}$$

и множество интервалов

$$\gamma_0^{(1)}, \ \{\gamma_n^{(k)}\}; \ 1 \leqslant k \leqslant \nu_n, \ n = 1, 2, \cdots. \tag{11}$$

Положим $\gamma_n = \bigcup\limits_k \gamma_n^{(k)}$ и $\gamma = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{l=n}^{\infty} \gamma_l$.

Установим, что

$$\text{mes}\,\gamma = 1. \tag{12}$$

Для этого достаточно показать, что $\text{mes} \bigcup_{l=n}^{\infty} \gamma_l = 1$ для любого n. Это равносильно следующему соотношению $\text{mes}\, C \bigcup_{l=n}^{\infty} \gamma_l = 0$;

$$\text{mes}\, C \bigcup_{l=n}^{\infty} \gamma_l = \text{mes} \bigcap_{l=n}^{\infty} C\gamma_l.$$

Из определения γ_l легко следует, что

$$\text{mes} \bigcap_{l=n}^{\infty} C\gamma_l = \prod_{l=n}^{\infty} (1-\varepsilon_l).$$

В силу условия (4) последнее выражение равно нулю, чем и устанавливается соотношение (12).

Если $\varepsilon_n = 1$, $n = 1, 2, \cdots$, то система (10) совпадает с системой $\left\{ \dfrac{\chi_n(x)}{\max\limits_{0<x<1} \chi_n(x)} \right\}$, $n = 0, 1, \cdots$, где $\{\chi_n(x)\}$ — система Хаара. Если же $\varepsilon_n < 1$ хотя бы для одного значения n, то легко видеть, что система не полна.

Применяя метод доказательства теоремы 1 (см. [3]), можно установить следующую теорему.

Теорема 4. Пусть $f(x)$ измеримая почти везде конечная функция на $[0,1]$. Тогда существует абсолютно сходящийся почти всюду ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x)$ по системе (10) такой, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \psi_k(x) = f(x) \tag{13}$$

почти всюду на $[0,1]$.

Пусть $\{\psi_{n_l}^{(k)}(x)\}$ есть некоторое множество функций системы (10) и $E \subset [0, 1]$—некоторое множество положительной меры.

Обозначим

$$\varphi_{l,k}(x) = \begin{cases} \psi_{n_l}^{(k)}(x), \text{ если } \text{mes}\,(\overset{+}{\gamma}{}_{n_l}^{(k)} \cdot E) \geqslant \text{mes}(\overset{-}{\gamma}{}_{n_l}^{(k)} \cdot E) \\ -\psi_{n_l}^{(k)}(x) - \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{14}$$

Сохраняя порядок системы $\{\varphi_{l,k}(x)\}$, занумеруем ее следующим образом:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \cdots,\ \varphi_n(x), \cdots. \tag{15}$$

Обозначим через Δ_k интервал минимальной длины, вне которого $\varphi_k(x)$ тождественно равна нулю и $\overset{+}{\Delta}_k = \{x : \varphi_k(x) > 0\}$, $\overset{-}{\Delta}_k = \{x : \varphi_k(x) < 0\}$.

Ясно, что любой ряд по системе (15) можно записать в виде ряда по системе $\{\psi_{n_l}^{(k)}(x)\}$.

Теорема 5. *Чтобы для любой измеримой почти везде конечной функции $f(x)$, определенной на E, существовал почти везде абсолютно сходящийся ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ по системе* (15) *такой, что*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k(x) = f(x) \tag{16}$$

почти всюду на E, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{mes}(E\cdot \overline{\lim_{k\to\infty}} \Delta_k) = \operatorname{mes} E. \tag{17}$$

Доказательство теоремы 4 вытекает из (12) и теоремы 5.

§ 2. Доказательство теоремы 5

Необходимость. Предположим, что условие (17) не выполнено, то есть имеет место соотношение

$$\operatorname{mes}\left(E\cdot \bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=l}^{\infty} \Delta_n\right) < \operatorname{mes} E. \tag{18}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\operatorname{mes}\left(E - E\cdot \bigcap_{l=1}^{\infty}\bigcup_{n=l}^{\infty} \Delta_n\right) > 0. \tag{19}$$

Можно указать такой номер N, чтобы множество

$$A = E - E\cdot \bigcup_{n=N}^{\infty} \Delta_n \tag{20}$$

имело положительную меру.

Из определения множества A вытекает, что

$$\varphi_n(x) = 0 \text{ при } x \in A \subset E;\ n > N. \tag{21}$$

Отсюда непосредственно следует необходимость условия (17) теоремы 5.

Для доказательства достаточности нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть множество E и система* (15) *таковы, что имеет место соотношение* (17) *и $f(x)$ — непрерывная функция, определенная на E. Пусть далее заданы $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и натуральное число τ_0.*

Тогда существует множество

$$G \subset E,\ \operatorname{mes} G > \operatorname{mes} E - \varepsilon \tag{22}$$

и полином по системе (15)

$$Q(x) = \sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x),\ N > \tau_0, \tag{23}$$

удовлетворяющие условиям

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x) - f(x) \right| < \delta, \text{ при } x \in G \tag{24}$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{N+\mu} |a_n \varphi_n(x)| \leqslant \frac{16\,|f(x)|}{\varepsilon}, \text{ при } x \in G. \tag{25}$$

Лемма 2. *Пусть множество E и система* (15) *таковы, что имеет место соотношение* (17); *$f(x)$ измеримая почти везде конечная функция, определенная на E, и пусть заданы $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ и натуральное число τ_0.*

Тогда существует множество

$$G \subset E, \text{ mes } G > \text{mes } E - \varepsilon \tag{26}$$

и полином по системе (15), *удовлетворяющие условиям*

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x) - f(x) \right| < \delta, \ N > \tau_0, \ x \in G \tag{27}$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{N+\mu} |a_n \varphi_n(x)| < \frac{16\,|f(x)|}{\varepsilon}, \text{ при } x \in G. \tag{28}$$

Доказательство леммы 1. Пусть $P \subset E$ — совершенное множество, удовлетворяющее условию

$$\text{mes } P > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{29}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна на P, следовательно для $\delta > 0$ существует $\sigma > 0$ такое, что из соотношения $|x - x_1| < \sigma$, где $x, x_1 \in P$, следует неравенство

$$|f(x) - f(x_1)| < \frac{\delta}{4}. \tag{30}$$

Существует число N_1, удовлетворяющее условию

$$\text{mes } \Delta_n < \sigma, \text{ при } n > N_1. \tag{31}$$

Действительно, выберем натуральное число k настолько большим, чтобы имело место соотношение

$$\frac{1}{2^k} < \sigma. \tag{32}$$

Выберем далее n_1 настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{mes}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n - \bigcup_{n=1}^{n_1} \Delta_n \right) < \frac{1}{2}. \tag{33}$$

Если $t > n_1$, то либо $\Delta_t \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n - \bigcup_{n=1}^{n_1} \Delta_n$, либо $\Delta_t \subset \bigcup_{n=1}^{n_1} \Delta_n$. Очевидно, что в первом случае $\text{mes } \Delta_t < \frac{1}{2}$. Во втором случае, как видно из определения системы (10), $\Delta_t \subset \Delta_{n'}$, где $n' < n_1$, и, следовательно, в силу определения системы имеем

$$\text{mes } \Delta_t < \frac{1}{2} \text{ mes } \Delta_{n'} < \frac{1}{2}.$$

Допустим мы указали такое n_l, что $\text{mes } \Delta_n < \frac{1}{2^l}$ при $n > n_l$. Для множества $\bigcup_{n=n_l+1}^{\infty} \Delta_n$ выберем n_{l+1} настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\text{mes} \left(\bigcup_{n=n_l+1}^{\infty} \Delta_n - \bigcup_{n=n_l+1}^{n_{l+1}} \Delta_n \right) < \frac{1}{2^{l+1}}.$$

Если $t > n_{l+1}$, то либо $\Delta_t \subset \bigcup_{n=n_l+1}^{\infty} \Delta_n - \bigcup_{n=n_l+1}^{n_{l+1}} \Delta_n$, либо $\Delta_t \subset \bigcup_{n=n_l+1}^{n_{l+1}} \Delta_n$.

Очевидно, что в первом случае $\text{mes } \Delta_t < \frac{1}{2^{l+1}}$, а во втором случае $\Delta_t \subset \Delta_j$, где j — некоторое число, удовлетворяющее соотношению $n_l < j \leqslant n_{l+1}$, и, следовательно,

$$\text{mes } \Delta_t < \frac{1}{2} \text{ mes } \Delta_j \leqslant \frac{1}{2^{l+1}}.$$

Отсюда следует существование такого числа n_k, что $\text{mes } \Delta_t < \frac{1}{2^k} < \varepsilon$ при $t > n_k = N_1$. Обозначим

$$N = \max (\tau_0, N_1). \tag{34}$$

Выберем l так, чтобы

$$\frac{1}{2^l} < \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \frac{1}{2^{l-1}}. \tag{35}$$

Из соотношения (17) следует, что для произвольного k

$$\text{mes} \left(E - \bigcup_{n=k}^{\infty} \Delta_n \right) = 0. \tag{36}$$

Следовательно, можно выбрать число m_1 так, чтобы имело место соотношение

$$\text{mes} \left(E - \bigcup_{n=N+1}^{N+m_1} \Delta_n \right) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{37}$$

В последовательности

$$\Delta_{N+1}, \Delta_{N+2}, \cdots, \Delta_{N+m_1} \tag{38}$$

рассмотрим те интервалы Δ_{n_t}, для которых

$$\text{mes } (\Delta_{n_t} \cdot P) \neq 0 \tag{39}$$

и выберем тот из них, который имеет наименьший номер. Обозначим этот интервал через $\Delta_{1,1}^{(1)}$. Среди оставшихся интервалов, удовлетворяющих условию (30), выберем тот, для которого $\Delta_{n_t} \cdot \Delta_{1,1}^{(1)} = 0$ и Δ_{n_t}

имеет наименьший номер в последовательности (38). Этот интервал обозначим через $\Delta_{2,1}^{(1)}$.

Допустим таким способом выбраны все интервалы из последовательности (38)

$$\Delta_{1,1}^{(1)},\ \Delta_{2,1}^{(1)}, \cdots,\ \Delta_{k,1}^{(1)}. \tag{40}$$

Обозначим через $\varphi_{l,1}^{(1)}(x)$ ту функцию $\varphi_n(x)$ из системы (15), для которой имеет место соотношение

$$\Delta_{l,1}^{(1)} = \{x : \varphi_n(x) \neq 0\},$$

а через $\overset{+}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}$, $\overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}$— те интервалы, для которых имеет место

$$\overset{+}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)} = \{x : \varphi_n(x) > 0\},\ \overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)} = \{x : \varphi_n(x) < 0\}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes} E_1 = \operatorname{mes}\left(E - \bigcup_{l=1}^{k} \Delta_{l,1}^{(1)}\right) < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{41}$$

Отсюда

$$\operatorname{mes} E \cdot \bigcup_{l=1}^{k} \overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)} < \frac{\operatorname{mes} E}{2}. \tag{42}$$

Из соотношения (36) следует, что можно указать натуральное число m_2, которое удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{mes}\left(E \cdot \overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)} - \bigcup_{n=N+m_1+1}^{N+m_2} \Delta_n\right) < \frac{\varepsilon}{16 \cdot k},\ i=1, 2, \cdots, k. \tag{43}$$

В последовательности

$$\Delta_{N+m_1+1},\ \Delta_{N+m_1+2}, \cdots,\ \Delta_{N+m} \tag{44}$$

рассмотрим те интервалы, которые удовлетворяют соотношению $\Delta_{n_l} \subset \overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)}$, и обозначим через $\Delta_{l,1}^{(2)}$ тот из них, который в последовательности (44) имеет наименьший номер.

Выбранные таким образом интервалы обозначим через

$$\Delta_{l,1}^{(2)},\ \Delta_{l,2}^{(2)}, \cdots,\ \Delta_{l,k-1}^{(2)}.$$

Рассмотрим те интервалы последовательности (44), которые удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_{n_l} \subset \overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)} \text{ и } \Delta_{n_l} \cdot \bigcup_{j=1}^{k-1} \Delta_{l,j}^{(2)} = 0. \tag{45}$$

Обозначим через $\Delta_{l,k}^{(2)}$ тот из этих интервалов, который имеет наименьший номер.

Допустим таким образом выбраны всевозможные интервалы последовательности (44)

$$\Delta_{l,1}^{(2)},\ \Delta_{l,2}^{(2)}, \cdots,\ \Delta_{l,k(l,2)}^{l(2)}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes} E_2 = \operatorname{mes}\left(E \cdot \bigcup_{l=1}^{k} \overset{-}{\Delta}{}_{l,1}^{(1)} - \bigcup_{l=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(l,2)} \Delta_{l,j}^{(2)}\right) < \frac{\varepsilon}{16}. \tag{46}$$

Отсюда и из (42) следует

$$\operatorname{mes}\left(E \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,2)} \overline{\Delta}_{i,j}^{(2)}\right) < \frac{\operatorname{mes} E}{2^2}. \tag{47}$$

Далее допустим, что уже выбраны число m_{l-1} и последовательность интервалов

$$\Delta_{i,1}^{(l-1)},\ \Delta_{i,2}^{(l-1)}, \cdots,\ \Delta_{i,k(i,l-1)}^{(l-1)};\ i = 1, 2, \cdots, k, \tag{48}$$

которые удовлетворяют соотношению

$$\operatorname{mes}\left(E \cdot \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)} \overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)}\right) < \frac{\operatorname{mes} E}{2^{l-1}}. \tag{49}$$

Возьмем m_l настолько большим, чтобы имело место соотношение

$$\operatorname{mes} E_l = \operatorname{mes}\left(E \cdot \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)} \overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)} - \bigcup_{n=N+m_{l-1}+1}^{N+m_l} \Delta_n\right) < \frac{\varepsilon}{2^{l+2}}. \tag{50}$$

В последовательности

$$\Delta_{N+m_{l-1}+1},\ \Delta_{N+m_{l-1}+2}, \cdots,\ \Delta_{N+m_l} \tag{51}$$

рассмотрим те интервалы, для которых имеет место соотношение $\Delta_{n_i} \subset \bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)} \overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)}$, и обозначим через $\Delta_{i,1}^{(l)}$ тот из них, который в последовательности (51) имеет наименьший номер. Допустим выбраны интервалы

$$\Delta_{i,1}^{(l)},\ \Delta_{i,2}^{(l)}, \cdots,\ \Delta_{i,q-1}^{(l)}.$$

Рассмотрим те интервалы в последовательности (51), которые удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_{n_i} \subset \bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)} \overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)} \text{ и } \Delta_{n_i} \cdot \bigcup_{j=1}^{q-1} \Delta_{i,j}^{(l)} = 0. \tag{52}$$

Обозначим через $\Delta_{i,q}^{(l)}$ тот из этих интервалов, который в последовательности (51) имеет наименьший номер. Предположим таким способом выбраны всевозможные интервалы последовательности (51)

$$\Delta_{i,1}^{(l)},\ \Delta_{i,2}^{(l)}, \cdots,\ \Delta_{i,k(i,l)}^{(l)}.$$

Ясно, что

$$\operatorname{mes}\left(E \cdot \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l-1)} \overline{\Delta}_{i,j}^{(l-1)} - \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l)} \Delta_{i,j}^{(l)}\right) < \frac{\varepsilon}{2^{l+2}}. \tag{53}$$

Из (35), (49) и из определения системы (11) следует, что

$$\operatorname{mes}\left(E \cdot \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l)} \overline{\Delta}_{i,j}^{(l)}\right) < \frac{\operatorname{mes} E}{2^l} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{54}$$

Положим $k(i, 1) = 1$ и рассмотрим множество

$$G = P \cdot \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{l=1}^{l} \bigcup_{j=1}^{k(i,l)} \overset{+}{\Delta}{}_{i,j}^{(l)}. \tag{55}$$

Нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$G = P \cdot \left(\bigcup_{l=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l)} \overset{+}{\Delta}{}_{i,j}^{(l)}\right) = E - C_E\left[P \cdot \left(\bigcup_{l=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l)} \overset{+}{\Delta}{}_{i,j}^{(l)}\right)\right] =$$

$$= E - \left[C_E \cdot P + C_E \left(\bigcup_{t=1}^{l} \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,t)+} \Delta_{i,j}^{(t)} \right) \right] \supset E -$$

$$- \left(C_E \cdot P + E \cdot \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l)-} \Delta_{i,j}^{(l)} + \bigcup_{t=1}^{l} E_t \right). \tag{56}$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{mes}\, G \geqslant \text{mes}\, E - C_E \cdot P - \text{mes} \left| E \cdot \left(\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{k(i,l)-} \Delta_{i,j}^{(l)} \right) \right| -$$

$$- \bigcup_{t=1}^{l} \text{mes}\, E_t \geqslant \text{mes}\, E - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{4} - \sum_{t=1}^{l} \frac{\varepsilon}{2^{2+t}} > \text{mes}\, E - \varepsilon; \tag{57}$$

Обозначим через $\varphi_{i,j}^{(t)}(x)$ ту функцию $\varphi_n(x)$ из системы (15), для которой имеет место соотношение

$$\Delta_{i,j}^{(t)} = \{x : \varphi_n(x) \neq 0\}. \tag{58}$$

Рассмотрим полином

$$T(x) = \sum_{t=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{r(i,t)} 2^{t-1} \varphi_{i,j}^{(t)}(x). \tag{59}$$

и докажем, что

$$\sum_{t=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(i,t)} 2^{t-1} \varphi_{i,j}^{(t)}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \bigcup\limits_{t=1}^{\nu} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{k(i,t)+} \Delta_{i,j}^{(t)} \\ -2^{\nu}+1 \text{ при } x \in \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{k(i,\nu)-} \Delta_{i,j}^{(\nu)}, \end{cases} \tag{60}$$

а в остальных точках $[0,1]$ имеет место соотношение

$$-2^{\nu}+1 < \sum_{t=1}^{\nu} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(i,t)} 2^{t-1} \varphi_{i,j}^{(t)}(x) \leqslant 0. \tag{61}$$

При $\nu = 1$ утверждения очевидны.

Допустим, что соотношения (60) и (61) верны для $\nu = n \geqslant 1$. Для $\nu = n+1$ справедливость утверждений (60) и (61) вытекает из следующих соотношений:

$$\Delta_{i,j}^{(n+1)} \subset \bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{l=1}^{k(i,n)-} \Delta_{i,l}^{(n)} \quad \text{и} \quad \Delta_{i,j}^{(n+1)} \cdot \Delta_{i,s}^{(n+1)}, \; s \neq j. \tag{62}$$

Отсюда следует, что при $x \in \bigcup\limits_{t=1}^{l} \bigcup\limits_{i=1}^{k} \bigcup\limits_{j=1}^{k(i,t)+} \Delta_{i,j}^{(t)}$

$$T(x) = 1 \tag{63}$$

и

$$\sum_{t=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(i,t)} 2^{t-1} |\varphi_{i,j}^{(t)}(x)| < 2^{l}-1, \; x \in [0, 1]. \tag{64}$$

Пусть точки $x_1, x_2, \cdots, x_k$ таковы, что

$$x_i \in \Delta_{i,1}^{(1)} \cdot P. \tag{65}$$

Положим

$$a_i = \begin{cases} f(x_i) \text{ при } |f(x_i)| > \frac{\delta}{2} \\ 0 \text{ при } |f(x_i)| < \frac{\delta}{2} \end{cases}. \tag{66}$$

Рассмотрим полином

$$Q(x) = \sum_{l=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(l,i)} a_i 2^{l-1} \varphi_{l,j}^{(i)}(x). \tag{67}$$

Из определения функции $\varphi_{l,j}^{(i)}(x)$ следует, что $\varphi_{l,j}^{(i)}(x) = 0$ при $x \overline{\in} \Delta_{l,1}^{(1)}$. Следовательно при $x \in \Delta_{l,1}^{(1)} \cdot G$

$$Q(x) = f(x_i). \tag{68}$$

Пусть $x \in G$. Тогда $x \in \Delta_{l,1}^{(i)}$, где i принимает некоторое значение в промежутке $1 \leqslant i \leqslant k$.

Из (30), (34) и (68) вытекает, что при $x \in G$

$$|Q(x) - f_1(x)| < \frac{\delta}{4}. \tag{69}$$

Покажем, что для $x \in G$ имеет место соотношение

$$\sum_{l=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(l,i)} |a_i 2^{l-1} \varphi_{l,j}^{(i)}(x)| < \frac{16|f(x)|}{\varepsilon}. \tag{70}$$

Так как $x \in G$, то $x \in \Delta_{l,1}^{(i)}$ для некоторого i из промежутка $1 \leqslant i \leqslant k$

Тогда, либо $|f(x_i)| < \frac{\delta}{2}$, и тогда $a_i = 0$ и (70) выполнено, либо $|f(x_i)| \geqslant \frac{\delta}{2}$ и значит, используя (30), мы получим

$$|f(x)| > |f(x_i)| - |f(x_i) - f(x)| > \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{4} = \frac{\delta}{4}. \tag{71}$$

Отсюда, из (64) и из (35) следует

$$\sum_{l=1}^{l} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k(l,i)} |a_i 2^{l-1} \varphi_{l,j}^{(i)}(x)| \leqslant |f(x_i)| (2^l - 1) \leqslant$$

$$\leqslant |f(x_i) - f(x)| 2^{l-1} \cdot 2 + |f(x)| 2^{l-1} \cdot 2 \leqslant$$

$$\leqslant 4|f(x)| \cdot \frac{4}{\varepsilon} = \frac{16|f(x)|}{\varepsilon}, \text{ при } x \in G. \tag{72}$$

Соотношения (34), (57), (69) и (72) доказывают справедливость леммы 1.

Доказательство леммы 2. Пусть $\psi(x)$—непрерывная функция такая, что

$$\psi(x) = f(x),\ x \in G_1,\ G_1 \subset E,\ \text{mes } G_1 > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{73}$$

Возьмем совершенное множество P такое, чтобы выполнялись соотношения

$$P \subset G_1, \text{ mes } P > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{4}. \tag{74}$$

В силу леммы 1 существует множество G

$$G \subset P, \text{ mes } G > \text{mes } P - \frac{\varepsilon}{2} \tag{75}$$

и полином $\sum\limits_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x)$, для которых выполняется условие

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+\mu} a_n \varphi_n(x) - \psi(x) \right| < \delta, \; x \in G \tag{76}$$

и

$$\sum_{n=N+1}^{N+\mu} |a_n \varphi_n(x)| < \frac{16\,|\psi(x)|}{\varepsilon}, \; x \in G. \tag{77}$$

Выполнение соотношений (27) и (28) следует из (73)—(78).

Тем самым лемма 2 доказана.

Доказательство достаточности теоремы 5. Пусть

$$1 > \alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_n > \cdots > 0 \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n < +\infty. \tag{78}$$

Положим $\delta_k = \alpha_{k+1}^2$, $k=0, 1, 2, \cdots$, $f_0(x) = f(x)$, $\tau_0 = 0$. В силу леммы 2 существует множество G_0, $\text{mes } G_0 > \text{mes } E - \alpha_0$ и полином по системе (15)

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} a_n \varphi_k(x), \; n_1 > \tau_0, \tag{79}$$

удовлетворяющий соотношениям

$$\left| \sum_{k=n_1}^{n_2} a_k \varphi_k(x) - f_0(x) \right| < \delta_0, \; x \in G_0 \tag{80}$$

и

$$\sum_{k=n_L}^{n_2} |a_k \varphi_k(x)| > \frac{16\,|f_1(x)|}{\alpha_0}, \; x \in G_0. \tag{81}$$

Пусть уже определены функции $\{f_k(x)\}$, $0 \leqslant k \leqslant p$, множества G_k, $0 \leqslant k \leqslant p$ и полином $\sum\limits_{k=n_{2t+1}}^{n_{2t+2}} a_k \varphi_k(x)$, $0 \leqslant t \leqslant p$ следующим образом:

$$n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \cdots < n_{2p+2}, \tag{82}$$

$$f_j(x) = f_0(x) - \sum_{t=0}^{j-1} \sum_{k=n_{2t+1}}^{n_{2t+2}} a_k \varphi_k(x), \; 1 \leqslant j \leqslant p, \tag{83}$$

$$\text{mes } G_j > \text{mes } E - \alpha_j, \; 1 \leqslant j \leqslant p, \tag{84}$$

$$\left| \sum_{k=n_{2j}+1}^{n_{2j+2}} a_k \varphi_k(x) - f_j(x) \right| < \delta_j, \; x \in G_j, \tag{85}$$

$$\sum_{k=n_{2j}+1}^{n_{2j+1}} |a_k \varphi_k (x)| \leqslant \frac{16 |f_j (x)|}{\alpha_j} \quad x \in G_j. \tag{86}$$

Положим

$$f_{p+1} (x) = f_0 (x) - \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} a_k \varphi_k (x) \tag{87}$$

Применяя лемму 2 к $f(x) = f_{p+1}(x)$, $\varepsilon = \alpha_{p+1}$, $\delta = \delta_{p+1}$ и $\tau_0 = n_{2(p+1)+1}$, находим множество G_{p+1} и полином $\sum\limits_{k=n_{2(p+1)+1}}^{n_{2(p+1)+2}} a_k \varphi_k (x)$, удовлетворяющие соотношениям (83)—(86), где вместо j берется $p+1$.

Обозначим

$$\overline{G}_j = G_{j-1} \cdot G_j, \; j = 1, 2, \cdots. \tag{88}$$

Из (78) и (84) следует

$$\overline{G}_j = E - [(E - G_{j-1}) + (E - G_j)], \operatorname{mes} \overline{G}_j > \operatorname{mes} E - 2\alpha_{j-1}. \tag{89}$$

В силу (85) при $x \in G_{j-1}$ из (73) получим

$$|f_j(x)| = |f_0 (x) - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} a_k \varphi_k (x)| =$$

$$= \left| f_0(x) - \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} a_k \varphi_k(x) - \sum_{k=n_{2(j-1)+1}}^{n_{2(j-1)+2}} a_k \varphi_k (x) \right| =$$

$$= \left| f_{j-1} (x) - \sum_{k=n_{2(j-1)}+1}^{n_{2(j-1)+2}} a_k \varphi_k (x) \right| < \delta_{j-1}, \; j \geqslant 1. \tag{90}$$

Отсюда, из (86) и (88) при $x \in \overline{G}_j$ получим

$$|f_j (x)| < \delta_{j-1} < \alpha_j \tag{91}$$

и

$$\sum_{k=n_{2j}+1}^{n_{2j+2}} |a_k \varphi_k(x)| \leqslant \frac{16 |f_j(x)|}{\alpha} \leqslant \frac{16\, \delta_{j-1}}{\alpha_j} 16\, \alpha_j. \tag{92}$$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k (x) \tag{93}$$

удовлетворяет требованиям теоремы. В самом деле, убедимся прежде всего в том, что ряд (93) абсолютно сходится почти всюду.

Обозначим

$$R_n = \bigcap_{j=n}^{\infty} G_j \text{ и } R = \bigcup_{n=1}^{\infty} R_n. \tag{94}$$

Имеем

$$R_1 \subset R_2 \subset R_3 \subset \cdots \subset R_n \subset \cdots. \tag{95}$$

Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{mes} R_n = \operatorname{mes} R. \tag{96}$$

Очевидно

$$R_n = E - \sum_{j=n}^{\infty} (E - \overline{G}_j). \tag{97}$$

Значит в силу (89)

$$\operatorname{mes} R_n \geqslant \operatorname{mes} E - \sum_{j=n}^{\infty} 2\alpha_j \to \operatorname{mes} E \text{ при } n \to \infty. \tag{98}$$

Пусть теперь $x_0 \in R$, тогда существует такое p_0, что $x \in R_p$ для всех $p \geqslant p_0$ и, следовательно, $x_0 \in \overline{G}_p$ для $p \geqslant p_0$.

Из (92) имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k \varphi_k(x_0)| = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| =$$

$$= \sum_{l=0}^{p_0-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| + \sum_{l=p_0}^{\infty} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=0}^{p_0-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} |a_k \varphi_k(x_0)| + \sum_{l=p_0}^{\infty} 16\,\alpha_l < \infty \tag{99}$$

Далее при $p \geqslant p_0$ из (87) и (91) получим

$$\left| f_0(x_0) - \sum_{l=0}^{p-1} \sum_{k=n_{2l}+1}^{n_{2l+2}} a_k \varphi_k(x_0) \right| = |f_p(x_0)| < \alpha_p \to 0 \text{ при } p \to \infty. \tag{100}$$

Из соотношений (96), (98)—(100) следует справедливость достаточности условий теоремы 5. Теорема доказана.

Считаю своим приятным долгом выразить благодарность А. А. Талаляну за постановку задачи и за оказанную помощь при ее решении.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 8.V.1968

Ն. Հ. ՍԻՆԱՆՅԱՆ. Օրթոգոնալ սիստեմների մի դասի մասին (*ամփոփում*)

Օրթոգոնալ սիստեմների որոշակի դասի համար գտնված է անհրաժեշտ և բավարար պայման, որին եթե բավարարում է այդ սիստեմներից որևէ մեկի ինչ որ ենթասիստեմ, ապա ամեն մի համարյա ամենուրեք վերջավոր չափելի ֆունկցիայի համար այդ ենթասիստեմով կարելի է գրել համարյա ամենուրեք այդ ֆունկցիային զուգամիտող բացարձակ զուգամետ շարք։

N. H. SINANIAN. On a class of orthogonal systems (summary)

For a class of orthogonal systems the necessary and sufficient conditions are found under which every subsystem of a system is a representation system in the sence of convergence almost everywhere, in the set of all finite measurable functions. The series, representing $f(x)$ may be chosen in a way, ensuring absolute convergence almost everywhere.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. Н. Лузин.* Интеграл и тригонометрический ряд. Москва, 1957, стр. 627.
2. *А. А. Талалян.* О рядах, универсальных относительно перестановок, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, 567—604.
3. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН АрмССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
4. *А. А. Талалян.* О сходимости почти всюду последовательности частных сумм общих ортогональных рядов, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. н., 10, 1957, 17—34.
5. *J. J. Price* and *Robert E.* Zink. On sets of completeness for families of Haar functions, Trans. Amer. Math. Society, 119, № 2, 1965, 262—269.