ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

С. Г. ОВСЕПЯН

ПОСТРОЕНИЕ ПОРОЖДАЮЩЕГО МНОЖЕСТВА И ОБОБЩЕННЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ В КЛАССЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

В настоящей работе исследуется однородная задача Дирихле для уравнения колебания стручы

$$(1+\lambda)\, u_{xx} - (1-\lambda)\, u_{yy} = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0 \tag{2}$$

в выпуклой области D с кусочно гладкой границей Γ, где λ — действительный параметр с модулем, меньшим единицы.

Основные результаты этой работы без доказательств опубликованы в заметке [1].

В связи с необходимостью рассмотрения обобщенных решений задачи (1), (2) в классе измеримых функций, в работе [1] было дано следующее определение обобщенного решения, представляющее собой естественное обобщение принадлежащего Р. А. Александряну понятия обобщенной собственной функции [2, 3].

Определение. *Измеримая функция* $u_\lambda(x, y)$ *называется обобщенным решением задачи* (1), (2), *если она представима в виде суммы двух измеримых в* D *функций*

$$u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y),$$

где $f_\lambda(x, y)$ *постоянна почти на всех характеристиках первого семейства, а* $g_\lambda(x, y)$ — *почти на всех характеристиках второго семейства характеристик уравнения* (1), *и если на границе* Γ $u_\lambda(x, y)$ *почти везде равна нулю.*

Если при $\lambda = \lambda_0$ *существует нетривиальное обобщенное решение* $u_{\lambda_0}(x, y)$ *задачи* (1), (2), *то* λ_0 *называется обобщенным собственным значением* (ОСЗ), *а* $u_{\lambda_0}(x, y)$ — *обобщенной собственной функцией* (ОСФ) *этой задачи.*

В случае выпуклых областей Р. А. Александряном [3] построено порождающее множество граничных точек для класса кусочно непрерывных функций и доказано, что любая ОСФ из этого класса представляет собой предел линейных комбинаций так называемых элементарных ОСФ, принимающих лишь три значения 0 и ± 1 и соответствующих тому же ОСЗ.

В работе [4] эти же результаты были доказаны для случая невыпуклых и даже многосвязных областей.

В настоящей работе для выпуклых областей удается построить порождающее множество граничных точек уже для класса измеримых функций.

Оказывается, что построенное порождающее множество не уже соответствующего порождающего множества для класса кусочно непрерывных функций и может совпадать с ним лишь для частного вида областей. Именно в этих исключительных случаях можно обойтись лишь кусочно непрерывными ОСФ. В общем же случае не всякая ОСФ из $L_p(D)$ $(p>0)$ может быть приближена в $L_p(D)$ кусочно непрерывными ОСФ.

Вместе с тем оказывается, что указанные Р. А. Александряном элементарные ОСФ, рассматриваемые уже в более широком классе функций и поэтому необязательно кусочно постоянные, но имеющие ту же простую структуру (принимающие лишь три значения $0, \pm 1$), образуют полную систему в том смысле, что любая ОСФ из $L_p(D)$ есть предел в метрике $L_p(D)$ конечных линейных комбинаций элементарных ОСФ.

Напомним определение специальных автоморфизмов S_λ^+, S_λ^- границы Г, которые впервые были привлечены к исследованию задач на собственные значения Р. А. Александряном в работах [2, 3, 5].

Будем считать область D допустимой, т. е. такой, что при всех рассматриваемых λ характеристики уравнения (1) пересекают ее границу не более, чем в двух точках.

Автоморфизм S_λ^+ *(соответственно* S_λ^-*) относит каждой точке* $\theta\in\Gamma$ *точку пересечения с границей* Г *характеристики первого семейства (соответственно второго семейства), проходящей через* θ. *При этом, если проходящая через* θ *характеристика не пересекает границы в другой точке, то образом точки* θ *при соответствующем отображении считается сама* θ.

Будем говорить, что отображение S_λ^+ (S_λ^-) *абсолютно непрерывно, если для любого числа* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$ *такое, что для любого множества* e *граничных точек из* $\text{mes}\, e<\delta$ *следует* $\text{mes}\, S_\lambda^+ e<\varepsilon$ $(\text{mes}\, S_\lambda^- e<\varepsilon)$.

§ 1. Построение порождающего множества граничных точек для класса измеримых функций

В дальнейшем рассматриваются лишь такие допустимые области, для которых автоморфизмы S_λ^+ и S_λ^-, следовательно $S_\lambda = S_\lambda^- S_\lambda^+$ являются абсолютно непрерывными (например, области с кусочно гладкими границами).

Множество точек $\mathfrak{M}_\lambda(\theta) = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^k\theta$ *называется циклом точки* $\theta\in\Gamma$ *относительно автоморфизма* S_λ *(*S_λ^{-k} *означает* k*-ую итерацию обратного отображения* S_λ^{-1}*).*

Множество точек $M_\lambda(\theta) = \mathfrak{M}_\lambda(\theta) \cup \mathfrak{M}_\lambda(S_\lambda^- \theta)$ *называется циклом точки* θ *относительно автоморфизмов* S_λ^+ *и* S_λ^-.

Множество $E \subset \Gamma$ *назовем инвариантным относительно* S_λ^+ *и* S_λ^-, *если* $S_\lambda^+ E = E$ *и* $S_\lambda^- E = E$.

Лемма 1. *Множество* $M_\lambda(\theta)$, *а также его замыкание* $\overline{M_\lambda(\theta)}$, *инвариантны относительно* S_λ^+ *и* S_λ^- *для любой точки* $\theta \in \Gamma$.

Доказательство. Инвариантность множества $M_\lambda(\theta)$ непосредственно вытекает из его определения.

Пусть $\theta^* \in \overline{M_\lambda(\theta)}$, тогда существует последовательность точек $\theta_n \in M_\lambda(\theta)$ такая, что $\theta_n \to \theta^*$. В силу непрерывности автоморфизма S_λ^+ $S_\lambda^+\theta_n \to S_\lambda^+\theta^*$. Но $S_\lambda^+\theta_n \in M_\lambda(\theta)$, следовательно $S_\lambda^+\theta^* \in \overline{M_\lambda(\theta)}$, т. е. $S_\lambda^+ \overline{M_\lambda(\theta)} \subset \overline{M_\lambda(\theta)}$. Учитывая, что $(S_\lambda^+)^{-1} = S_\lambda^-$, получим $S_\lambda^+ \overline{M_\lambda(\theta)} = \overline{M_\lambda(\theta)}$.

Совершенно так же убеждаемся в инвариантности множества $\overline{M_\lambda(\theta)}$ относительно S_λ^-.

Точка $\theta \in \Gamma$ *называется периодической точкой автоморфизма* S_λ, *или* λ*-периодической, если множество* $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ *состоит из конечного числа точек, при этом число точек этого множества называется периодом точки* θ.

Значение $\lambda \in (-1, 1)$ *назовем неэргодическим, если число вращения Пуанкаре* [6] *автоморфизма* S_λ *рационально.*

Поскольку S_λ является сохраняющим ориентацию непрерывным отображением замкнутой кривой Γ на себя, то, как показал Пуанкаре [6], в случае неэргодического значения λ существует целое число r такое, что отображение S_λ^r имеет неподвижную точку θ, т. е. $S_\lambda^r\theta = \theta$. А это означает, что θ является периодической точкой автоморфизма S_λ.

Таким образом, для неэргодического значения λ множество $A(\lambda, \Gamma)$ периодических точек автоморфизма S_λ границы Γ не пусто.

Лемма 2. *Пусть* λ — *неэргодическое значение. Тогда для любой точки* $\theta \in \Gamma$ *множество* $\overline{M_\lambda(\theta)}$ *имеет меру нуль и содержит конечное число* λ*-периодических точек, причем все предельные точки этого множества* λ*-периодические.*

Доказательство. Известно, что множество всех λ-периодических точек $A(\lambda, \Gamma)$ замкнуто и все точки из $A(\lambda, \Gamma)$ имеют один и тот же период.

Рассмотрим дополнение этого множества на Γ, которое состоит из не более чем счетного числа интервалов, т. е.

$$CA(\lambda, \Gamma) = \bigcup_i (a_i, b_i).$$

Очевидно множество $A(\lambda, \Gamma)$ инвариантно относительно S_λ, следовательно его дополнение тоже инвариантно относительно S_λ. Концы интервалов (a_i, b_i) принадлежат инвариантному относительно S_λ множеству, поэтому образ любого интервала (a_i, b_i) из $CA(\lambda, \Gamma)$ при отображении S_λ совпадает с некоторым интервалом из $CA(\lambda, \Gamma)$, в частности $S_\lambda^r(a_i, b_i) = (a_i, b_i)$, где r — период λ-периодических точек.

Если θ является λ-периодической точкой, то, очевидно, $S_\lambda^+\theta$ также является λ-периодической, следовательно $M_\lambda(\theta)$ состоит из конечного числа λ-периодических точек, т. е. в этом случае утверждения леммы очевидны.

Пусть θ не является λ-периодической точкой, тогда она принадлежит некоторому интервалу (a, b) из $CA(\lambda, \Gamma)$, и, поскольку S_λ сохраняет ориентацию, то точки $S_\lambda^{rn+k}\theta$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ образуют монотонную последовательность на интервале $S_\lambda^k(a, b)$ $(k=1, 2, \cdots, r)$, и, стало быть, эта последовательность имеет лишь одну предельную точку θ_k^*, принадлежащую замыканию интервала $S_\lambda^k(a, b)$.

Таким образом, в силу непрерывности отображения S_λ^r, будем иметь

$$S_\lambda^r\,\theta_k^* = \lim_{n\to\infty} S_\lambda^r S_\lambda^{nr+k}\theta = \lim_{n\to\infty} S_\lambda^{(n+1)r+k}\theta = \theta_k^*,$$

т. е. θ_k^* является λ-периодической точкой. Но $S_\lambda^k[a, b]$ имеет только две λ-периодические точки $S_\lambda^k a$ и $S_\lambda^k b$, следовательно θ_k^* совпадает с одной из этих точек.

Аналогичным образом убеждаемся, что монотонная последовательность $S_\lambda^{-rn+k}\theta$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ стремится к другому концу интервала $S_\lambda^k(a, b)$ $(k=1, 2, \cdots, r)$, т. е. множество $\mathfrak{M}_\lambda(\theta)$ имеет всего $2r$ предельных точек, которые λ-периодические.

Поскольку $S_\lambda^+\theta$ не является λ-периодической, то совершенно так же множество $\mathfrak{M}_\lambda(S_\lambda^+\theta)$ имеет $2r$ предельных точек $S_\lambda^k S^+ a$ и $S_\lambda^k S_\lambda^+ b$ $(k=1, 2, \cdots, r)$, которые λ-периодические.

Таким образом, множество $\overline{M_\lambda(\theta)}$ получается из счетного множества $M_\lambda(\theta)$ присоединением конечного числа λ-периодических точек, следовательно $\operatorname{mes}\overline{M_\lambda(\theta)} = 0$ и лемма доказана.

Заданная на Γ измеримая функция $f(s)$ называется инвариантной относительно автоморфизмов S_λ^+ и S_λ^-, если для почти всех $\theta \in \Gamma$

$$f(\theta) = f(S_\lambda^+\theta) = f(S_\lambda^-\theta). \tag{3}$$

Лемма 3. *Для того чтобы λ было ОСЗ задачи* (1), (2) *необходимо и достаточно, чтобы либо существовала отличная от константы инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- измеримая функция $f(s)$, либо существовало инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- подмножество $Q \subset \Gamma$ такое, что* $\operatorname{mes}\Gamma > \operatorname{mes} Q > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$ ОСФ задачи (1), (2), а $f_\lambda(s)$ и $g_\lambda(s)$ — функции на Γ, совпадающие соответственно с граничными значениями функций $f_\lambda(x, y)$ и $g_\lambda(x, y)$. Покажем, что $f_\lambda(s)$ и $g_\lambda(s)$ являются инвариантными относительно S_λ^+ и S_λ^- функциями. В самом деле, из определения обобщенного решения и из абсолютной непрерывности отображений S_λ^+ и S_λ^- нетрудно заключить, что существует инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- и имеющее полную меру подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$, на котором $u_\lambda(x, y) = 0$, т. е. $g_\lambda(s) = -f_\lambda(s)$, и, кроме того, функции $f_\lambda(x, y)$ и $g_\lambda(x, y)$ постоянны на всех характеристиках соответствующих семейств, проходящих через точки множества Γ_0.

Из сказанного следует, что если $\theta \in \Gamma_0$ и $f_\lambda(\theta) = a$, то $f_\lambda(S_\lambda^+\theta) = a$ и $g_\lambda(\theta) = -a$. Отсюда вытекает, что $g_\lambda(S_\lambda^-\theta) = g_\lambda(S_\lambda^+\theta) = -a$ и, следовательно $f_\lambda(S_\lambda^-\theta) = a$, т. е. $f_\lambda(s)$ и $g_\lambda(s)$ являются инвариантными относительно S_λ^+ и S_λ^- функциями. Кроме того, поскольку $v_\lambda(x, y)$— нетривиальное решение задачи (1), (2), то, очевидно, $f_\lambda(s)$ отлична от постоянной.

Легко убедиться, что существование функции $f_\lambda(s)$ с указанными свойствами равносильно существованию инвариантного относительно S_λ^+ и S_λ^- подмножества Q граничных точек такого, что $0 < \operatorname{mes} Q < \operatorname{mes} \Gamma$.

В самом деле, поскольку $f_\lambda(s)$ отлична от постоянной, то существует такое число ξ, что множество $Q^* = E(f_\lambda(s) > \xi)$ и его дополнение CQ^* имеют положительную меру. Пусть $Q = Q^* \cap \Gamma_0$, тогда имеем

$$\operatorname{mes} \Gamma > \operatorname{mes} Q = \operatorname{mes} Q^* > 0.$$

Пусть $\theta \in Q$, тогда $f_\lambda(\theta) > \xi$ и, кроме того, во всех точках множества $M_\lambda(\theta) \subset \Gamma_0$ f_λ принимает одно и то же значение $f_\lambda(\theta)$, т. е. $M_\lambda(\theta) \subset Q^*$. Таким образом, точки $S_\lambda^\pm\theta$ принадлежат как множеству Γ_0, так и множеству Q^*, т. е. $S_\lambda^\pm\theta \in Q$, и, поскольку очевидно $(S_\lambda^+)^{-1} = S_\lambda^-$, то отсюда заключаем, что Q инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-.

Обратно, пусть существует инвариантное относительно S_λ^+ и S_λ^- множество $Q \subset \Gamma$ такое, что $0 < \operatorname{mes} Q < \operatorname{mes} \Gamma$.

Рассмотрим функцию

$$f(s) = \begin{cases} 1, & \text{на } Q \\ 0, & \text{на } CQ. \end{cases}$$

Очевидно $f(s)$—отличная от постоянной измеримая и инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция.

Достаточность. Продолжая функцию $f(s)$ по характеристикам первого семейства на всю область D, полагая ее постоянной на этих характеристиках, определим функцию $\dot{f}_\lambda(x, y)$. Такое продолжение возможно, поскольку множество Q, следовательно и его дополнение, инвариантны относительно S_λ^+ и S_λ^-. Продолжая функцию $g(s) = -f(s)$ аналогичным образом по характеристикам второго семейства, определим функцию $\dot{g}_\lambda(x, y)$. Заметим, что из гладкости границы Γ следует, что множества точек из D, лежащих на характеристиках каждого из семейств, проходящих через Q (соответственно через CQ), имеют положительную плоскую меру. Так что сумма этих функций

$$u_\lambda^{*}(x, y) = f_\lambda^{*}(x, y) + g_\lambda^{*}(x, y)$$

будет нетривиальным решением задачи (1), (2), т. е. $u_\lambda^{*}(x, y)$ является ОСФ соответствующей ОСЗ λ. Лемма доказана.

Таким образом, исследование ОСФ задачи (1), (2) сводится к исследованию заданных на Г инвариантных относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} функций. Но значения инвариантной относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} функции на каком-либо участке Г жестко определяют эту функцию на определенных участках границы. Поэтому возникает вопрос о выделении такого по возможности узкого множества граничных точек, значениями на котором полностью определяется инвариантная относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} функция. В этой связи Р. А. Александряном было введено понятие порождающего множества граничных точек и в случае выпуклых областей это множество построено для класса кусочно непрерывных функций [3].

Приведем определение порождающего множества граничных точек для класса измеримых функций.

Измеримое множество $E \subset \Gamma$ называется множеством единственности относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} для класса измеримых функций, если из того, что инвариантная относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} функция равна нулю почти всюду на E, следует, что она равна нулю почти всюду на Г.

Измеримое множество $F \subset \Gamma$ называется множеством продолжимости относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} для класса измеримых функций, если для любой измеримой функции f, заданной на F, существует определенная на Г инвариантная относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} измеримая функция f^{*}, которая почти всюду на F совпадает с f.

Измеримое множество $\gamma \subset \Gamma$ называется порождающим множеством относительно S_λ^{+} и S_λ^{-} для класса измеримых функций, если оно одновременно является как множеством единственности, так и множеством продолжимости.

Очевидно любое расширение множества единственности E снова есть множество единственности и любое сужение множества продолжимости F снова есть множество продолжимости. Поэтому для существования порождающего множества необходимо и достаточно, чтобы существовали настолько узкое множество единственности E и настолько широкое множество продолжимости F, чтобы $E \subseteq F$.

Очевидно далее, что, в силу абсолютной непрерывности отображений S_λ^{+} и S_λ^{-}, из измеримости множества E следует измеримость множества $M_\lambda(E)$.

Лемма 4. *Для того чтобы измеримое множество E было множеством единственности для класса измеримых функций, необходимо и достаточно, чтобы множество $M_\lambda(E)$ имело полную меру.*

Доказательство. Необходимость. Допустим обратное, пусть E — множество единственности, а $\mathrm{mes}\, M_\lambda(E) < \mathrm{mes}\, \Gamma$. По лемме 1 $M_\lambda(E)$ инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, следовательно его дополнение $CM_\lambda(E)$ тоже инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^- и имеет положительную меру.

Таким образом, вопреки предположению, E не является множеством единственности, поскольку, например, функция

$$f(s) = \begin{cases} 0, & \text{на } M_\lambda(E) \\ 1, & \text{на } CM_\lambda(E) \end{cases}$$

инвариантна, исчезает на E и не эквивалентна нулю.

Достаточность. Пусть $\mathrm{mes}\, M_\lambda(E) = \mathrm{mes}\, \Gamma$ и $f(s)$ — произвольная инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- измеримая функция, равная нулю почти всюду на E. Пусть E_1 — множество точек из E, где $f(s)$ равна нулю. Из инвариантности функции $f(s)$ следует, что для почти всех $\theta \in \Gamma$ она принимает одно и то же значение на всем множестве $M_\lambda(\theta)$. В самом деле, множество $e \subset \Gamma$, на котором нарушается равенство (3), имеет меру нуль, а в силу абсолютной непрерывности S_λ^+ и S_λ^- множество $M_\lambda(e)$ также имеет меру нуль. Таким образом, для любой точки θ из инвариантного и имеющего полную меру множества $CM_\lambda(e)$ выполняется указанное равенство и, следовательно, $f(s)$ принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$.

Пусть E_2 множество таких точек θ из E_1, для которых $f(s)$ принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$. Согласно сказанному выше $\mathrm{mes}\, E_2 = \mathrm{mes}\, E_1$, кроме того, $f(s)$ равна нулю на множестве $M_\lambda(E_2)$.

Имеем $M_\lambda(E) = M_\lambda(E_2) \cup M_\lambda(E \setminus E_2)$. И поскольку $E \setminus E_2$ имеет меру нуль, то $\mathrm{mes}\, M_\lambda(E \setminus E_2) = 0$. Таким образом, множество $M_\lambda(E_2)$, на котором $f(s)$ равна нулю, имеет полную меру, и лемма доказана.

Лемма 5. *Для того чтобы измеримое множество $F \subset \Gamma$ было множеством продолжимости для класса измеримых функций, необходимо и достаточно, чтобы для почти всех точек этого множества из $\theta_1 \neq \theta_2$ следовало, что $M_\lambda(\theta_1) \cap M_\lambda(\theta_2) = \varnothing$.*

Доказательство. Необходимость. Допустим обратное, пусть F — множество продолжимости, и пусть для любого множества $\tilde{F} \subset F$, мера которого совпадает с мерой F, найдутся хотя бы две разные точки $\theta_1, \theta_2 \in \tilde{F}$ такие, что $M_\lambda(\theta_1) = M_\lambda(\theta_2)$. (Здесь мы воспользовались тем, что для любых двух граничных точек p, q множества $M_\lambda(p)$ и $M_\lambda(q)$ либо совпадают, либо не имеют общих точек).

Пусть f — измеримая функция на F такая, что в разных точках этого множества принимает разные значения (например, сужение на множестве F линейной функции).

Поскольку F является множеством продолжимости, то на Γ существует инвариантная функция $f^*(s)$, почти всюду на F совпадающая с f.

Обозначим через F_1 подмножество множества F, где $f^*(s)$ совпадает с f. Пусть Γ_1 множество всех точек θ из Γ, для каждой из которых $f^*(s)$ принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$. Тогда, как уже было замечено, $\operatorname{mes}\Gamma_1 = \operatorname{mes}\Gamma$. Рассмотрим множество $F^* = F_1 \cap \Gamma_1$. Имеем $\operatorname{mes} F^* = \operatorname{mes} F_1 = \operatorname{mes} F$.

Таким образом, на множестве F^* функция $f^*(s)$ совпадает с f, и для каждой точки $\theta \in F^*$ она принимает одно и то же значение во всех точках множества $M_\lambda(\theta)$. С другой стороны, согласно предположению, существуют точки θ_1, $\theta_2 \in F^*$ такие, что $\theta_1 \neq \theta_2$ и $M_\lambda(\theta_1) = M_\lambda(\theta_2)$, т. е. $f^*(\theta_1) = f^*(\theta_2)$. Кроме того, имеем

$$f(\theta_1) = f^*(\theta_1) = f^*(\theta_2) = f(\theta_2),$$

которое противоречит тому, что f принимает разные значения в разных точках из F^*.

Достаточность. Пусть f—произвольная измеримая функция на некотором измеримом множестве F и пусть F_1 такое подмножество этого множества, что $\operatorname{mes} F_1 = \operatorname{mes} F$ и для любых двух разных точек θ_1 и θ_2 из F_1 $M_\lambda(\theta_1) \cap M_\lambda(\theta_2) = \varnothing$. Надо показать, что F является множеством продолжимости, т. е. что существует на Γ инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- измеримая функция $f^*(s)$, почти всюду на F совпадающая с f.

Для этого напомним, что $M_\lambda(F_1) = \bigcup_{\theta \in F_1} M_\lambda(\theta)$ и определим на всем Γ функцию $f^*(s)$ следующим образом: для каждой точки $\theta \in F_1$ положим $f^*(s)$ на всем множестве $M_\lambda(\theta)$ равной значению f в точке θ и равной нулю на множестве $CM_\lambda(F_1)$. Учитывая измеримость множества F_1, следовательно множеств $M_\lambda(F_1)$ и $CM_\lambda(F_1)$, а также инвариантность последних двух множеств, легко заключить, что $f^*(s)$ является измеримой и инвариантной относительно S_λ^+ и S_λ^- функцией, которая на F_1 совпадает с f, т. е. почти всюду на F совпадает с f, и лемма доказана.

Точка $p \in \Gamma$ называется λ-вершиной, если хотя бы одна из двух характеристик, проходящих через эту точку, не имеет других пересечений с границей Γ. Очевидно допустимая область может иметь не более чем четыре λ-вершины p_λ^i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Пусть λ неэргодическое значение. Согласно лемме 1 замыкание множества

$$Q_\lambda = \bigcup_{i=1}^{4} M_\lambda(p_\lambda^i)$$

инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, а, в силу леммы 2, оно имеет меру нуль. Поэтому дополнение множества $\overline{Q}_\lambda$ инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, имеет полную меру и состоит из не более чем счетного числа интервалов

$$C\overline{Q}_\lambda = \bigcup_i \delta_i.$$

Концы этих интервалов принадлежат инвариантному множеству $\overline{Q}_\lambda$..

Следовательно, образ каждого интервала δ_l при отображении S_λ^+ (S_λ^-) совпадает с некоторым из этих интервалов, т. е. $C\overline{Q}_\lambda$ образует инвариантную относительно S_λ^+ и S_λ^- систему интервалов. При этом, в силу того, что $C\overline{Q}_\lambda$ не содержит λ-вершин, для любого интервала $\delta_l \in C\overline{Q}_\lambda$

$$S_\lambda^+ \delta_l \cap \delta_l = \varnothing.$$

Из сказанного следует, что если δ некоторый из этих интервалов, то возможны два случая:

1. $S_\lambda^r \delta = \delta$, где r — период λ-периодических точек, следовательно концы этого интервала — λ-периодические точки. Легко видеть, что при этом $S_\lambda^r S_\lambda^+ \delta = S_\lambda^+ \delta$, т. е. δ и $S_\lambda^+ \delta$ — периодические интервалы автоморфизма S_λ, и в силу сказанного выше

$$\mathfrak{M}_\lambda(\delta) \cap \mathfrak{M}_\lambda(S_\lambda^+ \delta) = \varnothing. \tag{4}$$

2. При $n \neq m$ $S_\lambda^n \delta \cap S_\lambda^m \delta = \varnothing$. Следовательно, $S_\lambda^n S_\lambda^+ \delta \cap S_\lambda^m S_\lambda^+ \delta = \varnothing$, т. е. δ и $S_\lambda^+ \delta$ — непериодические интервалы автоморфизма S_λ, и справедливо (4).

Пусть G_λ^1 — множество всех периодических, а G_λ^2 — множество всех непериодических интервалов из $C\overline{Q}_\lambda$. Очевидно эти множества не пересекаются между собой и инвариантны относительно S_λ^+ и S_λ^-.

По лемме 2 $\overline{Q}_\lambda$ содержит конечное число λ-периодических точек. Поэтому G_λ^1 состоит из конечного числа интервалов. Пусть α_i $(i = 1, 2, \cdots, n_1)$ такие интервалы из G_λ^1, что

$$\bigcup_{i=1}^{n_1} M_\lambda(\alpha_i) = G_\lambda^1 \text{ и при } i \neq j \; M_\lambda(\alpha_i) \cap M_\lambda(\alpha_j) = \varnothing. \tag{5}$$

Пусть β_1 — некоторый интервал из G_λ^2 с концами a_1, b_1. Поскольку $\overline{Q}_\lambda$ получается из счетного множества Q_λ присоединением конечного числа λ-периодических точек, то очевидно a_1 принадлежит множеству $M_\lambda(p_\lambda^k)$, где p_λ^k — некоторая из четырех вершин. При этом очевидно $M_\lambda(a_1) = M_\lambda(p_\lambda^k)$. Аналогичным образом $M_\lambda(b_1) = M_\lambda(p_\lambda^j)$. Если β_2 такой интервал с концами a_2, b_2, что $M_\lambda(a_2) \cup M_\lambda(b_2) = M_\lambda(p_\lambda^k) \cup M_\lambda(p_\lambda^j)$, то, очевидно, $M_\lambda(\beta_1) = M_\lambda(\beta_2)$. Отсюда, в силу конечности числа λ-вершин, легко заключить, что существует конечное число интервалов β_i $(i = 1, 2, \cdots, n_2)$ из G_λ^2 таких, что

$$\bigcup_{i=1}^{n_2} M_\lambda(\beta_i) = G_\lambda^2 \text{ и при } i \neq j \; M_\lambda(\beta_i) \cap M_\lambda(\beta_j) = \varnothing. \tag{6}$$

Пусть A_i — множество всех λ-периодических точек на замыкании $\overline{\alpha}_i$ λ-периодического интервала α_i. Известно, что все λ-периодические точки образуют замкнутое множество на Γ, так что A_i замкнуто на $\overline{\alpha}_i$ и следовательно его дополнение на α_i состоит из не более чем счетного числа λ-периодических интервалов α_l^j, т. е.

$$C_{\alpha_l} A_l = \bigcup_j \alpha_l^j .$$

Пусть θ_l^j — произвольная точка в интервале α_l^j. Тогда точка $S_\lambda^r \theta_l^j$ принадлежит интервалу α_l^j и не совпадает с θ_l^j. Пусть $[\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j)$ тот из двух полуинтервалов, образованных точками θ_l^j и $S_\lambda^r \theta_l^j$, который принадлежит α_l^j.

Образуем множество

$$\gamma_\lambda = \left\{ \bigcup_{l=1}^{n_1} A_l \right\} \cup \left\{ \bigcup_{l=1}^{n_1} \bigcup_j [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{l=1}^{n_2} \beta_l \right\}.$$

Теорема 1. *Пусть значение параметра λ для рассматриваемой области D является неэргодическим. Тогда построенное множество γ_λ является порождающим множеством граничных точек для класса измеримых функций.*

Доказательство. Из структуры множества γ_λ очевидным образом следует его измеримость. Покажем, что γ_λ является множеством единственности для класса измеримых функций. В силу леммы 4 для этого надо показать, что множество $M_\lambda(\gamma_\lambda)$ имеет полную меру.

Имеем

$$M_\lambda \left\{ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \right\} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^n \left\{ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \cup S_\lambda^+ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \right\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{r} \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_\lambda^{nr+k} \left\{ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j) \cup S_\lambda^+ [\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j \right\} =$$

$$= \bigcup_{k=1}^{r} \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ [S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j, S_\lambda^{(n+1)r+k} \theta_l^j) \cup [S_\lambda^{nr+k} S_\lambda^+ \theta_l^j, S_\lambda^{(n+1)r+k} S_\lambda^+ \theta_l^j) \right\}. \quad (7)$$

Поскольку точки множества $\bigcup_{n=0}^{+\infty} S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j$ образуют монотонную последовательность на интервале $S_\lambda^k \alpha_l^j$ (см. доказательство леммы 2), которая стремится к одному концу этого интервала, а точки множества $\bigcup_{n=0}^{-\infty} S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j$ образуют противоположно направленную последовательность на том же интервале, которая сходится к другому концу этого интервала, то легко заключить, что

$$\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ [S_\lambda^{nr+k} \theta_l^j, S_\lambda^{(n+1)r+k} \theta_l^j) \right\} = S_\lambda^k \alpha_l^j \quad (k=1, 2, \cdots, r). \quad (8)$$

Кроме того, в силу λ-периодичности интервала α_l^j, имеем

$$M_\lambda(\alpha_l^j) = \bigcup_{k=1}^{r} S_\lambda^k (\alpha_l^j \cup S_\lambda^+ \alpha_l^j). \quad (9)$$

Из (7), (8) и (9) вытекает равенство

$$M_\lambda \{[\theta_l^j, S_\lambda^r \theta_l^j)\} = M_\lambda (\alpha_l^j). \quad (10)$$

Учитывая (10), получим

$$M_\lambda(\gamma_\lambda)=\left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(A_l)\right\}\cup\left\{\bigcup_{l=1}^{n_1}\bigcup_j M_\lambda([\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j))\right\}\cup\left\{\bigcup_{l=1}^{n_2} M_\lambda(\beta_l)\right\}=$$

$$=\left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(A_l)\right\}\cup\left\{\bigcup_{l=1}^{n_1}\bigcup_j M_\lambda(\alpha_l^j)\right\}\cup G_\lambda^2=$$

$$=\left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(A_l\cup\bigcup_j\alpha_l^j)\right\}\cup G_\lambda^2=\left\{\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(\alpha_l)\right\}\cup G_\lambda^2=G_\lambda^1\cup G_\lambda^2=C\overline{Q}_\lambda.$$

В силу леммы 2 множество $\overline{Q}_\lambda$ имеет меру нуль, следовательно $C\overline{Q}_\lambda$ имеет полную меру, т. е. γ_λ является множеством единственности для класса измеримых функций.

Покажем теперь, что γ_λ является множеством продолжимости. Для этого согласно лемме 5 достаточно показать, что для любых двух разных точек θ_1 и θ_2 из γ_λ справедливо соотношение

$$M_\lambda(\theta_1)\cap M_\lambda(\theta_2)=\varnothing. \tag{11}$$

Это соотношение очевидно, если θ_1 и θ_2 — разные периодические точки из γ_λ, а также если θ_1—периодическая, а θ_2—непериодическая точки из γ_λ.

Пусть θ_1 и θ_2—две разные точки, причем $\theta_1\in\beta_i$, $\theta_2\in\beta_j$, где β_i и β_j—непериодические интервалы γ_λ. Тогда условие (11) для этих точек при $i\neq j$ вытекает из (6), а при $i=j$ — из (4) и из того, что для любого непериодического интервала δ из $C\overline{Q}_\lambda$, при $n\neq m$ $S_\lambda^n\delta\cap S_\lambda^m\delta=\varnothing$.

Аналогичным образом, исходя из (4) и (5), заключаем, что (11) справедливо, если $\theta_1\in[\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j)$, а $\theta_2\in[\theta_k^j, S_\lambda^r\theta_k^j)$. Остается рассмотреть случай, когда $\theta_1\in[\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j)$, а $\theta_2\in\beta_k$. Справедливость соотношения (11) в этом случае вытекает из того, что множества G_λ^1 и G_λ^2 не пересекаются.

Таким образом, для любых двух разных точек θ_1 и θ_2 из γ_λ имеет место соотношение (11), т. е. γ_λ является множеством продолжимости для класса измеримых функций и, тем самым, теорема доказана.

Следствие 1. *γ_λ целиком содержит хотя бы один интервал.* В самом деле, пусть $\operatorname{mes} G_\lambda^2>0$, тогда γ_λ содержит хотя бы один непериодический интервал β_l. Если G_λ^2 имеет меру нуль, то в силу леммы 2 множество $G_\lambda^1=\bigcup_{l=1}^{n_1} M_\lambda(\alpha_l)$ имеет полную меру. Если при этом все точки некоторого интервала α_l λ-периодические, то α_l входит в γ_λ, в противном случае γ_λ содержит хотя бы один полуинтервал $[\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j)$.

Следствие 2. *Все неэргодические значения λ являются ОСЗ задачи* (1), (2).

В самом деле, пусть (a, b)—некоторый интервал, принадлежащий множеству γ_λ, а θ—некоторая точка из (a, b). Рассмотрим множество $M_\lambda[(a, \theta)]$. Это множество инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-

(см. лемму 1), имеет положительную меру, строго меньшую чем мера Γ, поскольку оно не имеет точек из (θ, b). В силу леммы 3 λ является ОСЗ задачи (1), (2).

Пусть Φ_λ — линейная система измеримых на γ_λ функций, факторизованная по подгруппе констант, а U_λ — линейная система всех ОСФ задачи (1), (2), соответствующих ОСЗ λ.

Следствие 3. *Линейные системы* Φ_λ *и* U_λ *изоморфны*. В самом деле. Пусть $u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$ принадлежит линейной системе U_λ. Рассмотрим на Γ измеримую функцию $f_\lambda(s) = f_\lambda(x, y)|_\Gamma$. Как было показано при доказательстве леммы 3 $f_\lambda(s)$ является инвариантной относительно S_λ^+ и S_λ^- функцией. Пусть $\overset{*}{f}_\lambda$ — сужение функции $f_\lambda(s)$ на порождающее множество γ_λ. Сопоставим $u_\lambda(x, y)$ тот элемент ξ из Φ_λ, который содержит $\overset{*}{f}_\lambda$. Поскольку $u_\lambda(x, y)$ определяет $f_\lambda(x, y)$ с точностью до постоянного слагаемого, то $f_\lambda(s)$, а следовательно и $\overset{*}{f}_\lambda$ определяются с точностью до постоянного слагаемого, т. е. $u_\lambda(x, y)$ при таком соответствии однозначно определяет элемент ξ из Φ_λ. Таким образом, определено отображение T линейной системы U_λ в линейную систему Φ_λ. Очевидно, что T сохраняет линейную комбинацию

$$T\left(\sum_l a_l \; u_\lambda^l(x, y)\right) = \sum_l a_l \xi_l,$$

т. е. оно является гомоморфизмом.

Пусть $Tu_\lambda(x, y) = 0$, где 0—нулевой элемент из Φ_λ. Это означает, что $\overset{*}{f}_\lambda$ константа на γ_λ, и поскольку инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция однозначно определяется своими значениями $\overset{*}{f}_\lambda$ на γ_λ, то $f_\lambda(s)$ постоянна на Γ. Отсюда следует, что $f_\lambda(x, y)$ постоянна и следовательно $u_\lambda(x, y) = 0$, т. е. T является мономорфизмом.

Покажем, что T является эпиморфизмом. Пусть ξ—произвольный элемент из Φ_λ, а $\overset{*}{f}_\lambda$—некий представитель из ξ. Из определения порождающего множества γ_λ следует, что существует на Γ инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция $f_\lambda(s)$, которая почти всюду на γ_λ совпадает с $\overset{*}{f}_\lambda$. Продолжая функцию $f_\lambda(s)$, как и в лемме 3, по характеристикам первого семейства на всю область D, полагая ее постоянной на этих характеристиках, определим функцию $f_\lambda(x, y)$. Такое продолжение возможно в силу инвариантности функции $f_\lambda(s)$ относительно S_λ^+ и S_λ^-. Продолжая функцию $g_\lambda(s) = -f_\lambda(s)$ аналогичным образом по характеристикам второго семейства, определим функцию $g_\lambda(x, y)$. Сумма этих функций

$$u_\lambda(x, y) = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$$

будет ОСФ задачи (1), (2), соответствующей ОСЗ λ.

Очевидно

$$Tu_\lambda(x, y) = \xi,$$

т. е. T отображает U_λ на все множество Φ_λ. Таким образом, T является изоморфизмом линейных систем U_λ и Φ_λ.

Следствие 4. *Неэргодические значения λ являются бесконечнократными ОСЗ.*

В самом деле, в силу следствия 1, γ_λ содержит целый интервал, следовательно размерность линейной системы Φ_λ бесконечна. Применяя следствие 3, заключаем, что каждому неэргодическому значению λ соответствует бесчисленное множество линейно независимых ОСФ, которые в частности могут быть выбраны из $L_p(D)$.

Следствие 5. *Если область D такова, что для неэргодического значения λ не все точки границы Γ являются λ-периодическими, то кусочно постоянные собственные функции задачи* (1), (2), *соответствующие ОСЗ λ, не полны в классе всех ОСФ из $L_p(D)$, соответствующих тому же ОСЗ λ.*

В самом деле, в этом случае порождающее множество γ_λ содержит хотя бы один непериодический интервал $\beta=(a, b)$. Пусть $u_\lambda(x,y)= = f_\lambda(x, y) + g_\lambda(x, y)$ — кусочно постоянная собственная функция. Тогда функция $f_\lambda(s) = f_\lambda(x, y)|_\Gamma$ постоянна на интервале (a, b). В самом деле, допустим обратное, пусть $f_\lambda(s)$ имеет разрыв в некоторой точке $\theta\in(a, b)$. Тогда, поскольку (a, b) — непериодический интервал, $f_\lambda(s)$ будет разрывной во всех точках счетного множества $M_\lambda(\theta)$, что противоречит кусочной постоянности $f_\lambda(s)$. Пусть σ—множество всех точек из D, которые находятся на пересечениях характеристик разных семейств, проходящих через точки $M_\lambda(\beta)$. Очевидно σ имеет положительную меру. Пусть $f_\lambda(s) = c$ на β, тогда $g_\lambda(s) = -c$ на β и следовательно $u_\lambda(x, y) = 0$ на σ. Таким образом, любая кусочно постоянная собственная функция, отвечающая ОСЗ λ, равна нулю на σ. Рассмотрим на γ_λ функцию $\mathring{f}_\lambda$, которая равна единице на (a, θ) и нулю—в остальных точках γ_λ, где θ—некоторая точка из (a, b). Пусть ξ тот элемент из Φ_λ, который содержит $\mathring{f}_\lambda$. Тогда легко убедиться, что собственная функция $u_\lambda(x, y) = T^{-1}\xi$, которая принимает три значения 0 и ±1, принадлежит $L_p(D)$ и отлична от нуля на некотором подмножестве положительной меры множества σ, т. е. эту собственную функцию нельзя приблизить кусочно постоянными.

§ 2. О полноте системы элементарных ОСФ в классе всех ОСФ из $L_p(D)$

В этом параграфе с помощью построенного для класса измеримых функций порождающего множества γ_λ (см. § 1) доказывается, что конечные линейные комбинации элементарных ОСФ, которые принимают лишь три значения 0 и ±1 (следовательно имеют весьма простую структуру), плотны в классе всех ОСФ, а именно, имеет место следующая

Теорема 2. *Пусть D — произвольная область из рассматриваемого класса, а λ-неэргодическое для этой области значение параметра, тогда совокупность отвечающих λ элементарных ОСФ полна в метрике $L_p(D)$ $(p>0)$ в классе всех ОСФ из $L_p(D)$, отвечающих этому же ОСЗ λ.*

Заметим, что в случае $0<p<1$ под нормой $\|\cdot\|^p_{L_p(D)}$ будем, как это принято, понимать выражение $\int\limits_D |\cdot|^p\, dxdy$

Для доказательства этой теоремы нам понадобится следующая лемма.

Пусть H_λ — класс всех элементарных измеримых функций на Γ (принимающих только два значения 0 и 1), инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^-.

Лемма 6. *Каждую инвариантную относительно S_λ^+ и S_λ^- функцию из $L_p(\Gamma)$ $(p>0)$ можно аппроксимировать в метрике $L_p(\Gamma)$ с любой степенью точности конечной линейной комбинацией функций из H_λ.*

Доказательство. Пусть $f(s)\in L_p(\Gamma)$ — инвариантная относительно S_λ^+ и S_λ^- функция. Образуем функцию

$$f_N(s)=\begin{cases} f(s), & \text{при } |f|\leqslant N\\ 0, & \text{при } |f|>N.\end{cases}$$

Известно, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое N, что

$$\|f-f_N\|_{L_p(\Gamma)}<\varepsilon. \tag{12}$$

Легко видеть, что $f_N(s)$ является инвариантной относительно S_λ^+ и S_λ^- функцией. В самом деле, пусть K — множество всех точек на Γ, для которых $f(s)$ удовлетворяет условию (3). В тех точках $\theta\in K$, в которых $|f(s)|\leqslant N$, функция $f_N(s)$ совпадает с $f(s)$, следовательно в этих точках $f_N(s)$ удовлетворяет условию (3).

Пусть в точке $\theta\in K$ $|f(s)|>N$. Тогда в силу (3)

$$|f(S_\lambda^+\theta)|>N \text{ и } |f(S_\lambda^-\theta)|>N.$$

Следовательно, в точках θ, $S_\lambda^+\theta$ и $S_\lambda^-\theta$ $f_N(s)$ равна нулю и, стало быть, удовлетворяет условию (3), т. е. $f_N(s)$ инвариантна относительно S_λ^+ и S_λ^-.

На границе Γ рассмотрим множества

$$\Gamma_i=\begin{cases} M_\lambda(\alpha_i) & (i=1, 2,\cdots, n_1)\\ M_\lambda(\beta_i) & (i=n_1+1,\ n_1+2,\cdots,\ n_1+n_2),\end{cases}$$

где α_i — периодические, а β_i — непериодические интервалы автоморфизма S_λ, удовлетворяющие соответственно условиям (5) и (6).

Напомним, что Γ_i — непересекающиеся между собой, инвариантные относительно S_λ^+ и S_λ^- множества на Γ, сумма которых имеет полную меру. Поэтому $f_N(s)$ с точностью до эквивалентности можно представить в виде

$$f_N(s)=\sum_{l=1}^{n_1+n_2} f_l(s), \tag{13}$$

где

$$f_l(s)=\begin{cases} f_N(s), & \text{на } \Gamma_l \\ 0, & \text{на } \Gamma\setminus\Gamma_l. \end{cases}$$

Очевидно $f_l(s)$—инвариантные относительно S_λ^+ и S_λ^- функции.

Пусть $l>n_1$, т. е. β_l — непериодический интервал, принадлежащий порождающему множеству γ_λ. По заданному $\varepsilon>0$ можно выбрать такой номер $n>0$, что

$$\operatorname{mes} B_n^{\pm}(\beta_l)<\frac{\varepsilon}{3\,(2N)^p}, \tag{14}$$

где

$$B_n^-(\beta_l)=\bigcup_{k=-\infty}^{-n} S_\lambda^k(\beta_l \cup S_\lambda^+\beta_l),\quad B_n^+(\beta_l)=\bigcup_{k=n}^{+\infty} S_\lambda^k(\beta_l \cup S_\lambda^+\beta_l).$$

В силу абсолютной непрерывности отображений S_λ^+ и S_λ^- по данному n можно выбрать такое $\delta>0$, чтобы из $e\subset\Gamma$, $\operatorname{mes} e<\delta$ следовало

$$\operatorname{mes} B_n(e)<\frac{\varepsilon}{3\,(2N)^p}, \tag{15}$$

где $B_n(e)=\bigcup\limits_{k=-n}^{n} S_\lambda^k(e\cup S_\lambda^+e)$.

По теореме Лузина для данного числа δ на интервале β_l существует непрерывная функция φ такая, что мера множества $e\subset\beta_l$, где φ не совпадает с функцией $f_l(s)$, не превосходит числа δ и, кроме того, $|\varphi|\leqslant N$.

Продолжим функцию φ с множества β_l нулем вне $M_\lambda(\beta_l)$, а на этом множестве инвариантным относительно S_λ^+ и S_λ^- образом, т. е. для любой точки $\theta\in\beta_l$ положим ее на всем множестве $M_\lambda(\theta)$ равной значению φ в точке θ. Обозначим через φ_l полученную таким образом функцию.

Учитывая (14) и (15), получаем

$$\int_\Gamma |f_l-\varphi_l|^p\,ds=\left(\int_{B_n(e)}|f_l-\varphi_l|^p\,ds+\int_{B_n^+(\beta_l)}|f_l-\varphi_l|^p\,ds+\int_{B_n^-(\beta_l)}|f_l-\varphi_l|^p\,ds\right)<\varepsilon. \tag{16}$$

Пусть ψ — кусочно постоянная функция на интервале β_l такая, что во всем интервале β_l выполняется неравенство

$$|\varphi_l-\psi|^p<\frac{\varepsilon}{\operatorname{mes}\Gamma_l}.$$

Пусть ψ_l — функция, полученная путем продолжения функции ψ на все множество $M_\lambda(\beta_l)$ инвариантным образом и нулем вне $M_\lambda(\beta_l)$. В силу инвариантности функций φ_l и ψ_l на всем множестве Γ_l сохранится оценка

$$|\varphi_l - \psi_l|^p < \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} \Gamma_l}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) получаем

$$\|f_l - \psi_l\|_{L_p(\Gamma)} < 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad \text{при } p > 1$$

$$\|f_l - \psi_l\|_{L_p(\Gamma)} < 2\varepsilon, \quad \text{при } p < 1. \tag{18}$$

Заметим, что поскольку множество точек, где ψ_l постоянна, инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^-, то ψ_l можно представить в виде конечной линейной комбинации функций из H_λ, а именно

$$\psi_l = \sum_{j=1}^{l} c_j h_j^l,$$

где h_j^l равна 1 на всем множестве, на котором ψ_l принимает отличное от нуля значение c_j, и равна нулю вне этого множества.

Замечание. Поскольку $M_\lambda(\beta_l)$ имеет конечное число предельных точек (см. лемму 2), то разрывы функций h_j^l накапливаются в окрестности конечного числа точек и следовательно вне любых окрестностей этих точек функции h_j^l кусочно постоянны.

Пусть α_l — один из удовлетворяющих условию (5) λ-периодических интервалов. Представим дополнение множества A_l на интервале α_l в виде

$$C_{\alpha_l} A_l = \left\{\bigcup_{j=1}^{n} \alpha_l^j\right\} \cup \left\{\bigcup_{j=n+1}^{+\infty} \alpha_l^j\right\} = D_n \cup R_n.$$

В силу абсолютной непрерывности отображений S_λ^+ и S_λ^- по заданному $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое число $\delta > 0$, чтобы из $\operatorname{mes} e < \delta$ следовало

$$\operatorname{mes} M_\lambda^r(e) < \frac{\varepsilon}{2(2N)^p}, \tag{19}$$

где $M_\lambda^r(e) = \bigcup_{n=0}^{r-1} S_\lambda^n (e \cup S_\lambda^+ e)$, r—период λ-периодических точек.

Возьмем n настолько большим, чтобы мера множества R_n не превосходила δ. Тогда из (19), учитывая равенство

$$M_\lambda(R_n) = M_\lambda^r(R_n),$$

получаем

$$\operatorname{mes} M_\lambda(R_n) < \frac{\varepsilon}{2(2N)^p}. \tag{20}$$

Пусть дополнение множества D_n на отрезке $\bar{\alpha}_l$ имеет положительную меру. Тогда она, с точностью до конечного числа точек, состоит из конечного числа λ-периодических отрезков $[a_k, b_k]$ $(k=1, 2, \cdots$

$\cdots, m$). Очевидно множества $M_\lambda(\alpha_l^j)$ $(j=1, 2,\cdots, n)$ и $M_\lambda([a_k, b_k])$ $(k=1, 2,\cdots, m)$ не пересекаются между собой и инвариантны относительно S_λ^+ и S_λ^-. Следовательно функцию $f_l(s)$ можно представить в виде

$$f_l(s)=\sum_{j=1}^{n} f_l^j(s)+\sum_{k=1}^{m}\widetilde{f}_l^k(s), \tag{21}$$

где

$$f_l^j(s)=\begin{cases} f_l(s), \text{ на } M_\lambda(\alpha_l^j)\\ 0, \text{ вне } M_\lambda(\alpha_l^j),\end{cases} \quad \widetilde{f}_l^k(s)=\begin{cases} f_l(s), \text{ на } M_\lambda([a_k, b_k])\\ 0, \text{ вне } M_\lambda([a_k, b_k]).\end{cases}$$

Очевидно $f_l^j(s)$ и $\widetilde{f}_l^k(s)$ — инвариантные относительно S_λ^+ и S_λ^- функции.

Для любого полуинтервала $[\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j)$ $(j=1, 2,\cdots, n)$ из порождающего множества γ_λ, учитывая равенство $M_\lambda(\alpha_l^j)=M_\lambda([\theta_l^j, S_\lambda^r\theta_l^j))$ и поступая совершенно так же, как и в случае непериодического интервала β_l, построим функцию ψ_l^j, представляющую собой конечную линейную комбинацию инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^- элементарных функций и удовлетворяющую условию

$$\|f_l^j-\psi_l^j\|_{L_p(\Gamma)}<\frac{\varepsilon}{n} \quad (j=1, 2,\cdots, n).$$

Следовательно

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} f_l^j-\sum_{j=1}^{n}\psi_l^j\right\|_{L_p(\Gamma)}<\varepsilon. \tag{22}$$

Рассмотрим теперь периодические отрезки $[a_k, b_k]$ $(k=1, 2,\cdots, m)$. По той же теореме Лузина на каждом отрезке $[a_k, b_k]$ существует непрерывная функция φ_k такая, что

$$|\varphi_k|\leqslant N \text{ и } \operatorname{mes} e_k<\frac{\delta}{m}, \tag{23}$$

где e_k — множество всех точек из $[a_k, b_k]$, где φ_k отлична от $\widetilde{f}_l^k$.

Пусть $\widetilde{\varphi}_l$ — функция на Γ, которая для любой точки $\theta\in[a_k\, b_k]$ во всех точках множества $M_\lambda^r(\theta)$ совпадает с $\varphi_k(\theta)$ $(k=1, 2,\cdots, m)$ и равна нулю вне множества $M_\lambda(C_{\alpha_l} D_n)$.

Учитывая (19) и (23), получим

$$\int_\Gamma\left|\sum_{k=1}^{m}\widetilde{f}_l^k-\widetilde{\varphi}_l\right|^p ds=\int_{\bigcup_{k=1}^{m} M_\lambda^r(e_k)}\left|\sum_{k=1}^{m}\widetilde{f}_l^k-\widetilde{\varphi}_l\right|^p ds<\varepsilon. \tag{24}$$

На множестве $\bigcup_{k=1}^{m}[a_k, b_k]$ выберем кусочно постоянную функцию ψ_l такую, что

$$|\psi_l| \leqslant N \text{ и } |\bar{\varphi}_l - \psi_l|^p < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mes} M_\lambda (A_l)}. \tag{25}$$

Заметим, что с точностью до конечного числа точек

$$C_{\bar{\alpha}_l} D_n = \bigcup_{k=1}^{m} [a_k, b_k] = A_l \cup R_n$$

и, поскольку множество R_n не является множеством продолжимости, функцию ψ_l, вообще говоря, нельзя продолжить из $C_{\alpha_l} D_n$ инвариантным образом относительно S_λ^+ и S_λ^-. Поэтому поправим ψ_l следующим образом: пусть $\bar{\psi}_l$ — функция на $C_{\alpha_l} D_n$, которая совпадает с ψ_l на множестве A_l, а на каждом интервале $\alpha_l^j \in R_n$ равна одному из значений ψ_l на α_l^j. Очевидно $|\bar{\psi}_l| \leqslant N$ и, кроме того, она кусочно постоянна, поскольку ψ_l может не быть постоянной только на конечном числе интервалов α_l^j из R_n.

Поскольку A_l принадлежит порождающему множеству γ_λ, а α_l^j — периодические интервалы, то легко убедиться, что заданную на $C_{\alpha_l} D_n$ произвольную функцию, которая постоянна на каждом интервале $\alpha_l^j \in R_n$, можно продолжить из $C_{\alpha_l} D_n$ на все множество $M_\lambda (C_{\alpha_l} D_n)$ инвариантным образом.

Продолжим $\bar{\psi}_l$ инвариантно относительно S_λ^+ и S_λ^- на все множество $M_\lambda (C_{\alpha_l} D_n)$ и нулем—вне этого множества, и обозначим полученную таким образом функцию снова через $\bar{\psi}_l$. Таким образом, $\bar{\psi}_l$ уже инвариантна, кусочно постоянна, на множестве $M_\lambda (A_l)$ удовлетворяет условию

$$|\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p < \frac{\varepsilon}{2 \operatorname{mes} M_\lambda (A_l)} \tag{26}$$

и, кроме того, $|\bar{\psi}_l| < N$.

Учитывая (20) и (26), получим

$$\int_\Gamma |\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p ds = \left(\int_{M_\lambda (A_l)} |\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p ds + \int_{M_\lambda (R_n)} |\bar{\varphi}_l - \bar{\psi}_l|^p ds \right) < \varepsilon. \tag{27}$$

Отсюда и из (24) вытекает

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \bar{f}_l^k - \bar{\psi}_l \right\|_{L_p(\Gamma)} < 2\, \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad \text{при } p > 1, \tag{28}$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{m} \bar{f}_l^k - \bar{\psi}_l \right\|_{L_p(\Gamma)} < 2\varepsilon, \quad \text{при } 0 < p < 1.$$

Заметим, что $\bar{\psi}_l$ можно представить в виде конечной линейной комбинации кусочно постоянных элементарных функций, инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^-. Поэтому, учитывая, что n_1 и n_2—конечные числа, зависящие только от области D, и сопоставляя (12), (13), (18), (21), (22) и (28), легко завершить доказательство леммы.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $u_\lambda(x, y)=f_\lambda(x, y)+g_\lambda(x, y)$— —ОСФ задачи (1), (2), принадлежащая $L_p(D)$. Тогда легко убедиться, что функция $f(s)=f_\lambda(x, y)_\Gamma$ принадлежит $L_p(\Gamma)$ и, по лемме 6, для любого $\varepsilon>0$ существует конечная линейная комбинация инвариантных относительно S_λ^+ и S_λ^- элементарных функций $h_l(s)$ такая, что

$$\left\|f(s)-\sum_{l=1}^{l} c_l h_l^+(s)\right\|_{L_p(\Gamma)}<\varepsilon \text{ и } \left\|g(s)-\sum_{l=1}^{l} c_l h_l^-(s)\right\|_{L_p(\Gamma)}<\varepsilon, \tag{29}$$

где $g(s)=g_\lambda(x, y)|_\Gamma$, $h_l^-(s)=-h_l^+(s)$.

В силу сделанных замечаний относительно функций h_j^l и $\bar{\varphi}_l$ можно на Γ указать конечное число точек, вне любых окрестностей которых функция $\sum_{l=1}^{l} c_l h_l^+(s)$ кусочно постоянна.

Пусть ξ—тот элемент из Φ_λ, который содержит $h_l(s)$ $(i=1, 2,\cdots$ $\cdots, l)$ (см. следствие 3 теоремы 1). Тогда

$$T^{-1}\xi_l=h_l^+(x, y)+h_l^-(x, y)=v_\lambda^l(x, y)$$

будет элементарной ОСФ, соответствующей ОСЗ λ.

Поскольку функции $f_\lambda(x, y)$, $h_l^+(x, y)$ и $g_\lambda(x, y)$, $h_l^-(x, y)$ постоянны на почти всех характеристиках соответствующих семейств, то из неравенств (29) вытекает оценка

$$\left\|u_\lambda(x, y)-\sum_{l=1}^{l} c_l v_\lambda^l(x, y)\right\|<\varepsilon d,$$

где d — константа, зависящая от области D, и теорема 2 доказана.

Отметим, что в силу сказанного выше, можно указать конечное число характеристик, вне любых окрестностей которых функция $\sum_{l=1}^{l} c_l v_\lambda^l(x, y)$ кусочно постоянна.

В работе [7] доказано, что для любой выпуклой области D с гладкой границей множество всех неэргодических значений параметра λ состоит из счетного числа компонент, каждая из которых является либо точкой, либо отрезком, и что дополнение этого множества на интервале $(-1,1)$, т. е. множество всех эргодических значений параметра λ, имеет положительную меру, и для почти всех эргодических значений λ решение соответствующей задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 3.IX.1968

Ս. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ. Լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի ծնող բազմության և չափելի ֆունկցիաների դասում ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների կառուցումը *(ամփոփում)*

Աշխատության մեջ ուռուցիկ տիրույթներում դիտարկվում է լարի տատանման հավասարման համար Դիրիխլեի (1), (2) համասեռ խնդիրը։ λ պարամետրի ոչ էրգոդիկ արժեքների համար կառուցվում է այդ խնդրի եզրային կետերի ծնող բազմությունը։ Այդ բազմության կառուցումը հնարավորություն է տալիս ապացուցել հետևյալ հիմնական թեորեմը։

Թեորեմ. Եթե λ-ն դիտարկվող D տիրույթի համար պարամետրի ոչ էրգոդիկ արժեք է, ապա λ-ին համապատասխանող էլեմենտար ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների բազմությունը (սեփական ֆունկցիաներ, որոնք ընդունում են միայն 0 և ± 1 արժեքներ) $Lp(D)$-ի մետրիկայով լրիվ է $Lp(D)$-ին պատկանող և միևնույն λ սեփական արժեքին համապատասխանող բոլոր ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների դասում։

S. G. HOVSEPIAN. The construction of the generating set and generalized eigenfunctions in the class of measurable functions of the Dirichlet problem for vibrating string equation (summary)

The homogeneous Dirichlet problem (1), (2) for the vibrating string equation is considered in convex domains. The generating set of the boundary points is constructed, λ taken to be non-ergodic. This enables to prove the following

Theorem. If λ is non-ergodic parameter value for the domain D, so the set of elementary generalized eigenfunctions (eigenfunctions assuming only the valued $0, \pm 1$) corresponding to λ is complete with respect to $L_p(D)$ metrics in the class of generalised eigenfunctions, which belong to $L_p(D)$ and correspond to the same eigenvalue λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Г. Овсепян.* О порождающем множестве граничных точек и о полноте системы обобщенных собственных функций задачи Дирихле для уравнения струны, ДАН АрмССР, XLVII, № 1, 1968, 3—8.
2. *Р. А. Александрян.* Диссертация, МГУ, 1949.
3. *Р. А. Александрян.* Докторская диссертация, МГУ, 1962.
4. *С. Г. Овсепян.* Диссертация, ЕГУ, 1965.
5. *Р. А. Александрян.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева, Труды ММО, 9, 1960, 455—505.
6. *H. Poincaré.* Sur les courbes définies par les équations différentiales, Journ. Math. pures et appl., 1, 1885, 167—244.
7. *С. Г. Овсепян.* Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. II, Известия АН АрмССР, „Математика", 2, № 3, 1967, 195—209.