ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 2, 1969 Математика

Э. В. МОРОЗЮК

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЯДОВ Р. ЛАГРАНЖА

Статья посвящена распространению некоторых классических теорем анализа на ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}, \tag{1}$$

где $|\lambda_k| \to \infty$ и $|\mu_k| \to \infty$ при $k \to \infty$.

Ряды (1) изучались Р. Лагранжем [1], а затем Г. В. Бадаляном [2]. Следуя Г. В. Бадаляну, мы будем называть их рядами Р. Лагранжа.

Нетрудно проверить, что если сходятся ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k|}$, то ряд (1) сходится на всей плоскости, кроме точек $z = -\mu_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что хотя бы один из этих рядов расходится.

И Р. Лагранж, и Г. В. Бадалян предполагали, что все λ_k лежат на одном луче, а все μ_k—на другом. Мы положим, что λ_k и μ_k находятся внутри угла раствора, меньшего π. Не уменьшая общности, можно считать, что вершина этого угла лежит в начале координат, а ось симметрии совпадает с положительной частью вещественной оси. Тогда $|\arg \lambda_k| \leqslant \psi_0$, $|\arg \mu_k| \leqslant \psi_0$, $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$.

Удобно ввести следующие определения.

Определение 1. Будем говорить, что последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ удовлетворяют условиям (β), если

1) $|\lambda_k| \to \infty$ и $|\mu_k| \to \infty$ при $k \to \infty$;

2) $|\arg \lambda_k| < \psi_0$, $|\arg \mu_k| \leqslant \psi_0$, где $0 \leqslant \psi_0 < \frac{\pi}{2}$;

3) по крайней мере один из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k|} \text{ расходится.}$$

Отметим, что в условиях (β) не содержится требования монотонности возрастания $|\lambda_k|$ и $|\mu_k|$.

Определение 2. Пусть последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ удовлетворяют условиям (β), а z_0—некоторая точка плоскости. Тогда $G(z_0, \delta, R, \rho)$ мы будем называть сектор

$$|z - z_0| \leqslant R, \ |\arg(z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \delta,$$

где $R > 0$, $0 < \delta < \frac{\pi}{2} - \psi_0$,

с выброшенными из него достаточно малыми окрестностями $|z - \mu_k| < \rho$, $\rho > 0$ точек μ_k, попавших в этот сектор.

Для рядов Р. Лагранжа имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть последовательности* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\mu_k\}$ *удовлетворяют условиям* (β) *и ряд* (1) *сходится в точке* z_0, *отличной от* λ_k, $k = 1, 2, \cdots$. *Тогда он равномерно сходится в любой области* $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Доказательство. Ряд (1) сходится в точке z_0, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N_0 такой, что при $n > N_0$ остатки

$$|R_n| = \left|\sum_{q=n+1}^{\infty} a_q \frac{\prod\limits_{k=1}^{q}\left(1 - \frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{q}\left(1 + \frac{z_0}{\mu_k}\right)}\right| < \varepsilon.$$

Пусть $K = \max\{N_0, K_0\}$, где K_0 будет определено ниже.

Применив к отрезку ряда (1) преобразование Абеля при $N > K$, $M > K$, получим

$$|T_{N,M}(z)| = \left|\sum_{n=N}^{M} a_n \prod_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{\lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z + \mu_k}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n=N}^{M} R_n\left(\prod_{k=1}^{n+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right) + \right.$$

$$\left. + R_{N-1} \prod_{k=1}^{N} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{N} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - R_M \prod_{k=1}^{M+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{M+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left(\sum_{n=N}^{M}\left|\prod_{k=1}^{n+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| + \right.$$

$$\left. + \prod_{k=1}^{N}\left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| \prod_{k=1}^{N}\left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| + \prod_{k=1}^{M+1}\left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| \cdot \prod_{k=1}^{M+1}\left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right|\right).$$

Оценим дробь $\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}$, если z принадлежит $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Пусть числам 0, $z_0 + \mu_k$, $z + \mu_k$ соответствуют точки O, A_k, B_k. Рассмотрим ΔOA_kB_k. Очевидно

$$A_kB_k = |z - z_0|, \ OA_k = |z_0 + \mu_k|, \ OB_k = |z + \mu_k|.$$

По условию

$$|\arg(z - z_0)| \leqslant \frac{\pi}{2} - \psi_0 - \delta, \quad |\arg \lambda_k| < \psi_0.$$

Можно указать такой номер K_1, что при всех $k > K_1$ выполняется неравенство

$$|\arg(z_0 + \mu_k)| < \psi_0 + \frac{\delta}{2}.$$

Пусть OB_k' — проекция отрезка OB_k на направление OA_k. Тогда

$$\angle B_k A_k B_k' < |\arg(z - z_0)| + |\arg(z_0 + \mu_k)| < \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}.$$

Поэтому

$$OB_k > OB_k' > OA_k + A_k B_k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right)$$

или

$$|\mu_k + z| > |\mu_k + z_0| + |z - z_0| \sin\frac{\delta}{2},$$

или

$$\left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < 1 - \frac{|z - z_0|}{|\mu_k + z|} \sin\frac{\delta}{2}$$

для всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ и всех $k > K_1$.

Аналогично оценивается дробь

$$\left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| < 1 - \frac{|z - z_0|}{|\lambda_k - z_0|} \sin\frac{\delta}{2}$$

для всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ и всех $k > K_2$.

Выберем $K_0 = \max\{K_1, K_2\}$. При $k > K_0$ и всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ дроби

$$\left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < 1 \quad \text{и} \quad \left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| < 1$$

и, следовательно, произведение

$$\prod_{k=1}^{N} \left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| \prod_{k=1}^{N} \left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < \prod_{k=1}^{K_0} \left|\frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k}\right| \cdot \prod_{k=1}^{K_0} \left|\frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| < c, \tag{2}$$

где c — постоянная, не зависящая от N, $N > K_0$, и z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Перейдем к оценке суммы

$$H_{N,M}(z) = \sum_{n=N}^{M} \left|\prod_{k=1}^{n+1} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z - \lambda_k}{z_0 - \lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0 + \mu_k}{z + \mu_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c \sum_{n=N}^{M} \left(\prod_{k=K_0+1}^{n} \left|\frac{\lambda_k - z}{\lambda_k - z_0}\right| \cdot \left|\frac{\mu_k + z_0}{\mu_k + z}\right| \frac{|z - z_0| \cdot |\lambda_{n+1} + \mu_{n+1}|}{|\lambda_{n+1} - z_0| \cdot |\mu_{n+1} + z|}\right).$$

Обозначим

$$\sum_{k=K_0+1}^{n} \left[\left(1 - \frac{|z - z_0| \sin\frac{\delta}{2}}{|\lambda_k - z_0|}\right)\left(1 - \frac{|z - z_0| \sin\frac{\delta}{2}}{|\mu_k + z|}\right)\right] = P_n(z).$$

Очевидно $P_n(z)<1$ для всех $n>K_0$ и всех z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$. Тогда получим

$$H_{N,M}(z)\leqslant c\sum_{n=N}^{M} P_n(z)\frac{|z-z_0|\,|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\lambda_{n+1}-z_0|\,|\mu_{n+1}+z|}=$$

$$=\frac{c}{\sin\frac{\delta}{2}}\sum_{n=N}^{M}\left[P_n(z)\left(\frac{|z-z_0|}{|\lambda_{n+1}-z_0|}\sin\frac{\delta}{2}+\frac{|z-z_0|}{|\mu_{n+1}+z|}\sin\frac{\delta}{2}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{|z-z_0|^2\sin^2\frac{\delta}{2}}{|\lambda_{n+1}-z_0|\,|\mu_{n+1}+z|}\right)\frac{|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|-|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}}\right]=$$

$$=\frac{c}{\sin\frac{\delta}{2}}\sum_{n=N}^{M}[P_n(z)-P_{n+1}(z)]\frac{|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|-|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}}.$$

Выражение

$$\frac{|\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|-|z-z_0|\sin\frac{\delta}{2}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|\lambda_{n+1}-z_0|+|\mu_{n+1}+z|+|z-z_0|}{\frac{1}{2}(|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|)}=$$

$$=2+\frac{2|z-z_0|}{|\mu_{n+1}+z|+|\lambda_{n+1}-z_0|}<d,$$

где постоянная d не зависит от n и z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Поэтому

$$H_{N,M}(z)\leqslant\frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}}\sum_{n=N}^{M}[P_n(z)-P_{n+1}(z)]=$$

$$=\frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}}[P_N(z)-P_{M+1}(z)]\leqslant\frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}}. \qquad (3)$$

Окончательно имеем

$$|T_{N,M}(z)|\leqslant\varepsilon\left(2c+\frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}}\right).$$

Теорема доказана.

Нетрудно получить несколько следствий теоремы 1.

Понятно, что вследствие непрерывности суммы равномерно сходящегося ряда из теоремы 1 вытекает вторая теорема Абеля в том виде, как ее обычно формулируют, то есть справедливо

Следствие 1 (аналог второй теоремы Абеля). Если выполняются условия теоремы 1, то

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)}$$

при $z \to z_0$ по путям, лежащим в $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

Благодаря произвольности δ, R и ρ получаем некоторую информацию об области сходимости ряда (1), следующую из его сходимости в одной точке.

Следствие 2 (аналог первой теоремы Абеля). Если выполняются условия теоремы 1, то ряд (1) сходится по крайней мере в угле

$$|\arg(z-z_0)| < \frac{\pi}{2} - \psi_0$$

с выброшенными точками $z = -\mu_k$, $k = 1, 2, \cdots$, попавшими в этот угол.

Следствие 3. Если ряд (1) расходится в точке z_1, причем последовательности $\{\lambda_k\}$ и $\{\mu_k\}$ удовлетворяют условиям (β), то он расходится по крайней мере в угле

$$|\arg(z-z_0) - \pi| < \frac{\pi}{2} - \psi_0,$$

за исключением попавших в него точек λ_k, $k = 1, 2, \cdots$.

Третье следствие легко доказывается от противного.

Вторая теорема Абеля для рядов Р. Лагранжа при определенных условиях на порядок a_n при $n \to \infty$ имеет обращение, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (Таубера). *Пусть последовательности* $\{\lambda_k\}$ *и* $\{\mu_k\}$ *удовлетворяют условиям* (β) *и*

$$\lim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} = S$$

при $z \to z_0$ *по некоторому пути, лежащему в* $G(z_0, \delta, R, \rho)$. *Если при* $n \to \infty$

$$\left| a_n \frac{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)} \right| = o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{4}$$

то ряд (1) *сходится в точке* z_0 *и сумма его равна* S.

Доказательство. Положим $N = \left[\frac{1}{|z-z_0|}\right]$ и покажем, что при $z \to z_0$ стремится к нулю

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)} - \sum_{n=1}^{N} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)} = S_1(z) - S_2(z),$$

где

$$S_1(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}$$

и

$$S_2(z) = \sum_{n=1}^{N} a_n \left[\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)} - \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}\right].$$

Оценим слагаемое $S_1(z)$.

При достаточно больших n из (4) следует, что

$$\left| a_n \frac{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\mu_k}\right)} n \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Будем считать z настолько близким к z_0, что для $N+1$ это неравенство выполняется. Тогда

$$|S_1(z)| < \varepsilon \frac{1}{N+1} \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{n} \frac{1-\frac{z}{\lambda_k}}{1-\frac{z_0}{\lambda_k}} \prod_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{z_0}{\mu_k}}{1+\frac{z}{\mu_k}} \frac{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k} \right| \cdot |z-z_0| \left| \frac{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\mu_{n+1}} \right| =$$

$$= \varepsilon \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k} - \prod_{k=1}^{n} \frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k} \prod_{k=1}^{n} \frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k} \right| \times$$

$$\times \frac{|(z_0-\lambda_{n+1})(z+\mu_{n+1})|}{|\lambda_{n+1}\mu_{n+1}|} \leqslant \varepsilon h \frac{cd}{\sin\frac{\delta}{2}}, \tag{5}$$

где неравенство

$$\frac{1}{N+1}<|z-z_0|$$

следует из определения N; неравенство

$$\left|\frac{(z_0-\lambda_{n+1})(z+\mu_{n+1})}{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}\right|=\left|1-\frac{z_0}{\lambda_{n+1}}\right|\cdot\left|1+\frac{z}{\mu_{n+1}}\right|<h$$

очевидно, причем h не зависит от z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$ и n; кроме того, в оценке (5) использовано неравенство (3), справедливость которого установлена при доказательстве теоремы 1; там же введены постоянные c и d.

Итак

$$S_1(z)\to 0 \text{ при } z\to z_0.$$

Перейдем к оценке второго слагаемого

$$|S_2(z)|\leqslant\sum_{n=1}^{N}\left[\left|a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)}\frac{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}\,n\right|\cdot\frac{1}{n}\right|1-$$

$$-\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\Bigg|\cdot\left|\frac{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}\right|.$$

Дробь $\left|\frac{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}\right|\to 0$ при $n\to\infty$. Поэтому

$$\left|\frac{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}\right|<p=\text{const}.$$

Преобразуем множитель

$$\frac{1}{n}\left|1-\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\right|=P_1(z, n)\,P_2(z, n),$$

где

$$P_1(z, n)=\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\right)^{\frac{j-1}{n}}\right|$$

и

$$P_2(z, n)=\left|1-\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\right)^{\frac{1}{n}}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\right)^{\frac{1}{n}}\right|.$$

Множитель

$$P_1(z, n)\leqslant g_1$$

как среднее арифметическое слагаемых, модули которых не превышают g_1, причем $g_1=\max\{1, c\}$; постоянная c введена в неравенстве (2).

Нетрудно показать, что

$$P_2(z, n)\leqslant g_2\,|z-z_0|,$$

g_2 не зависит от n и z из $G(z_0, \delta, R, \rho)$.

В результате получаем

$$\frac{1}{n}\left|1-\prod_{k=1}^{n}\frac{z-\lambda_k}{z_0-\lambda_k}\prod_{k=1}^{n}\frac{z_0+\mu_k}{z+\mu_k}\right|<g\,|z-z_0|,$$

где $g=g_1g_2$.

Из определения N следует, что $|z-z_0|\leqslant\frac{1}{N}$.

Поэтому для $S_2(z)$ окончательно имеем

$$|S_2(z)|\leqslant pg\,\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left|a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z_0}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z_0}{\mu_k}\right)}\;\frac{\lambda_{n+1}\,\mu_{n+1}}{\lambda_{n+1}+\mu_{n+1}}\,n\right|\to 0$$

при $N\to\infty$, то есть при $z\to z_0$, по известной лемме [3], как среднее арифметическое слагаемых, стремящихся к нулю. Теорема доказана.

По своим свойствам ряд Р. Лагранжа близок к рядам Ньютона

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right) \tag{6}$$

и факториальному

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}. \tag{7}$$

Существует связь между областями равномерной сходимости рядов (1) и (6), а также (1) и (7). Приведем одну из теорем такого типа.

Теорема 3. *Пусть последовательность* $\{\mu_k\}$ *такова, что* $|\mu_k|\to\infty$ *при* $k\to\infty$ *и* $|\arg\mu_k|\leqslant\psi_0<\frac{\pi}{2}$, *а ряд Ньютона* (6) *равномерно сходится в конечной области* G, *не содержащей сколь угодно малой окрестности* $z=0$; *все точки области* G *удовлетворяют неравенству*

$$|\arg z|<\frac{\pi}{2}-\psi_0-\delta,\quad 0<\delta<\frac{\pi}{2}-\psi_0.$$

Тогда ряд Р. Лагранжа (1) *сходится равномерно в той же области.*

Доказательство. При $n>N_0$ для всех z из G

$$|R_n(z)|=\left|\sum_{q=n+1}^{\infty}a_q\prod_{k=1}^{q}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\right|<\varepsilon,\quad \varepsilon>0.$$

К отрезку ряда (1) применим преобразование Абеля, $N>N_0$, $M>N_0$.

$$|T_{M,N}(z)|=\left|\sum_{n=N}^{M}a_n\frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon\left[\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}+\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{M+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}+\sum_{n=N}^{M}\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}\right|\right].$$

Аргумент $\left|\arg\frac{z}{\mu_k}\right|<\frac{\pi}{2}-\delta$, значит $\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|>1$, а дробь $\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}<1$ для всех z из G и всех n и монотонно убывает с ростом n. Поэтому выражение

$$\sum_{n=N}^{M}\left(\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}\right)=$$

$$=\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{N}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{M+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}<1$$

для всех z из G и любых N и M.

Покажем, что

$$\left|\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}\right|<\gamma\left(\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}-\frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n+1}\left|1+\frac{z}{\mu_k}\right|}\right),$$

где γ — положительная постоянная, не зависящая от z из G и n. Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\frac{|\mu_k+z|-|\mu_k|}{|z|}>\frac{1}{\gamma}>0\ (k=n+1).$$

Так как область G конечна, то $\frac{1}{|z|}>\gamma_1=\mathrm{const}$.

Рассмотрим

$$|\mu_k+z|-|\mu_k|=$$

$$=\frac{2\,Re\,\mu_k\,Re\,z+2\,Im\,\mu_k\,Im\ z+|z|}{\sqrt{(Re\,\mu_k+Re\,z)^2+(Im\,\mu_k+Im\,z)^2}+\sqrt{(Re\,\mu_k)^2+(Im\,\mu_k)^2}}.$$

По условию теоремы

$$|Im\,\mu_k|<Re\,\mu_k\,\mathrm{tg}\,\psi_0,\ Re\,z>0 \text{ и } |Im\,z|<Re\,z\,\mathrm{ctg}\,(\psi_0+\delta).$$

Поэтому

$$|\mu_k+z|-|\mu_k|>$$

$$>\frac{2Re\,\mu_k\,Re\,z-2\,Re\,\mu_k\,\mathrm{tg}\,\psi_0\,Re\,z\,\mathrm{ctg}\,(\psi_0+\delta)}{\sqrt{(Re\,\mu_k+Re\,z)^2+[Re\,\mu_k\,\mathrm{tg}\psi_0+Re\,z\,\mathrm{ctg}\,(\psi_0+\delta)]^2}+\sqrt{(Re\mu_k)^2(1+\mathrm{tg}^2\,\psi_0)}}=$$

$$=\frac{2\,Re\,z\left|1-\frac{\operatorname{tg}\psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0+\delta)}\right|}{\sqrt{\left(1+\frac{Re\,z}{Re\,\mu_k}\right)^2+\left[\operatorname{tg}\psi_0+\frac{Re\,z\operatorname{ctg}(\psi_0+\delta)}{Re\,\mu_k}\right]^2}+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi_0}}>\gamma_2,$$

где γ_2 — постоянная, не зависящая от z из G и k, так как последняя дробь равномерно по z из G стремится к положительному пределу, равному

$$\frac{Re\,z\left[1-\frac{\operatorname{tg}\psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0+\delta)}\right]}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi_0}}>\frac{\eta\left[1-\frac{\operatorname{tg}\psi_0}{\operatorname{tg}(\psi_0+\delta)}\right]}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi_0}}>0,$$

причем $Re\,z>\eta>0$ согласно условиям теоремы.

Значит

$$|T_{N,M}(z)|<\varepsilon\,(2+\gamma),$$

где $\gamma=\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}$.

Теорема доказана.

В заключение приношу глубокую благодарность профессору М. Г. Хапланову за внимание к работе.

Ростовский-на Дону
государственный университет

Поступило 2.XII.1967.

Է. Վ. ՄՈՐՈԶՅՈՒԿ. Ռ. Լագրանժի շարքերի որոշ հատկությունների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում դիտարկված են

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}$$

Ռ. Լագրանժի շարքերը հետևյալ պայմանների դեպքում՝

1. $|\lambda_k|\to\infty,\ |\mu_k|\to\infty$ երբ $k\to\infty$.

2. $|\arg\lambda_k|<\psi_0,\ |\arg\mu_k|<\psi_0$, որտեղ $0<\psi_0<\frac{\pi}{2}$.

3. $\sum\frac{1}{|\lambda_k|}$ և $\sum\frac{1}{|\mu_k|}$ շարքերից թեկուզ մեկը տարամետ է։

Այդ շարքերի վրա տարածված են Աբելի առաջին և երկրորդ թեորեմները, Տաուբերի թեորեման. կապ է հաստատված Ռ. Լագրանժի և Նյուտոնի շարքերի համաչափ-զուգամիտության որոշ տիրույթների միջև։

E. V. MOROSUK. *Some properties of Lagrange series* (summary)

The Lagrange series

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{\mu_k}\right)}$$

subject to the conditions

1) $|\lambda_k| \to \infty$, $|\mu_k| \to \infty$ when $k \to \infty$;

2) $|\arg \lambda_k| < \psi_0$, $|\arg \mu_k| < \psi_0$, where $0 < \psi_0 < \frac{\pi}{2}$;

3) at last one of the series $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|}$ or $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\mu_k|}$ diverges are studied. The first and the second Abel's theorems and Tauber's theorem are extended on these series. An interrelation between some domains of uniform convergence of Lagrange and Newton series is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Lagrange.* Mémoire sur les séries d'interpolation, Acta Mathematica, vol. 64.
2. *Г. В. Бадалян.* Обобщенные факториальные ряды, Сообщения института математики и механики Академии наук Армянской ССР, вып. 5, 1950.
3. *Е. Титчмарш.* Теория функций, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.