

Կ. Ա. ԹԱԼՏԱՋՅԱՆ

ՏՐԱՄԱՐԱՆԱԿԱՆ ԲԱՆԱՋԵՎԵՐ, ՈՐՈՆԲ ՊԱՀՊԱՆՎՈՒՄ ԵՆ
ՈՒԺԵՂ ՀՈՄՈՄՈՐՖԻԶՄԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Տիպար ասելով հասկանում ենք M ոչ դատարկ բազմությունը և պրիդի-
կատներ որոշված M -ում:

$$\Gamma = \langle M, P_1, P_2, \dots, P_k \rangle:$$

Դիտարկենք մեկ ուրիշ տիպար:

$$\Gamma' = \langle M', P'_1, P'_2, \dots, P'_k \rangle$$

ալիսին, որ P_i -ն և P'_i -ը ($1 \leq i \leq k$) նույն տեղանի են: P_i -ն և P'_i -ը
($1 \leq i \leq k$) կանվանենք իրար համապատասխան պրիդիկատներ:

Ունենք M բազմության φ արտապատկերում M' -ի վրա, այդ նշանա-
կենք այսպես $M \xrightarrow{\varphi} M'$:

Եթե կամայական $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ համար $P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -ի
ճշմարտացիությունից բխում է $P'_i(x_1\varphi, x_2\varphi, \dots, x_n\varphi)$ — ի ճշմարտացիու-
թյունը, ապա φ արտապատկերումը կանվանենք Γ -ի հոմոմորֆիզմ Γ' -ի վրա
և դա կնշանակենք այսպես $\Gamma \xrightarrow{\varphi} \Gamma'$: φ հոմոմորֆիզմը կոչվում է ուժեղ ալի-
դեպում, եթե $P'_i(x_1\varphi, x_2\varphi, \dots, x_n\varphi)$ -ի ճշմարտացիությունից հետևում է, որ
գոյություն ունեն $y_1, y_2, \dots, y_n \in M$ այնպես, որ $x_1\varphi = y_1, \dots, x_n\varphi = y_n$
և $P_i(y_1, \dots, y_n)$ ճշմարիտ է:

Այժմ դիտարկենք առաջին աստիճանի պրիդիկատների հաշվի բանաձե-
րը, որոնք բաղկացած են $\forall, \exists, \&, \vee, \neg$ նշաններից $P_1, P_2, \dots, P_k$ պրիդի-
կատալին տառերից և առարկայական փոփոխականներից: Դիտարկենք միայն
ալիսի բանաձևեր, որոնց մեջ բացասման նշանները գտնվում են բացա-
ռապես անմիջապես պրիդիկատալին տառից առաջ և իրար անմիջապես հա-
ջորդող բացասման նշաններ չկան:

Հայտնի է, որ ալի բանաձևերը, որոնք բացասման նշան չունեն պահ-
պանվում են հոմոմորֆիզմի ժամանակ: Առանց բացասման նշանի բանա-
ձևերը կոչվում են դրական: Կանգ առնենք ալիսի բանաձևերի վրա, որոնք
պահպանվում են ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ: Պարզ է, որ դրական
բանաձևերը պահպանվում են ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ, քանի որ ու-
ժեղ հոմոմորֆիզմը դա և հոմոմորֆիզմ է:

Ապացուցենք հետևյալ լեմմաները: Ունենք փոփոխական $A_1, A_2, \dots$
 $\dots, A_n$ ասույթներից բաղկացած դրական բանաձև, որտեղ չի մասնակցում
իմպլիկացիայի նշանը: Այդ բանաձևը նշանակենք այսպես՝

$$U(A_1, A_2, \dots, A_n):$$

Լեմմա 1. Թող $A_1, A_2, \dots, A_r$ ($1 \leq r \leq n$) ընդունեն ճշմարիտ արժեք-
ներ, իսկ $A_{r+1}, \dots, A_n$ -ը սխալ արժեքներ և այդ դեպքում $U(A_1, A_2, \dots$

..., A_n) ճշմարիտ է, ապա, եթե որոշ սխալ արժեքների դարձնենք ճշմարիտ, մնացած արժեքների դեպք չտալով, բանաձևը իր ճշմարտացիությունը չի փոխի:

Ապացույց. Փոփոխական ասույթների համար լեմմայի պնդումը ճիշտ է: Երբ A -ի և B -ի համար ճիշտ է, ապա հեշտ է տեսնել, որ $A \& B$ -ի և $A \vee B$ -ի համար նույնպես ճիշտ է:

Ապացույցը հեշտ ստացվում է ինդուկցիայով ըստ բանաձևի կառուցման:

Φ տիպի բանաձև կանվանենք այն բանաձևը, որում նույն առարկայական փոփոխականը մեկ անգամից ավելի չի մասնակցում ազատ բացասման նշանից:

Γ տիպի բանաձև կանվանենք այն բանաձևը, որում նույն առարկայական փոփոխականը մեկ անգամից ավելի չի մասնակցում բացասման նշանի տակ:

Պարզ է, որ $\Gamma \Phi$ -ն Γ տիպի բանաձև է և $\Gamma \Gamma$ -ն Φ տիպի բանաձև է:

Վերցնենք Φ տիպի բաց բանաձև (այսինքն առանց կվանտորների) որում $x_1, x_2, \dots, x_r$ բոլոր առարկայական փոփոխականներն են, նշանակենք այն $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_r)$:

Ինթերքենը $\Gamma \Phi, \Gamma'$ և Φ -ն ուժեղ հոմոմորֆիզմ է:

Լեմմա 2. Եթե $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ' -ի վրա ինչ որ $x'_1, x'_2, \dots, x'_r \in M'$ համար, ապա գոյություն ունեն $x_1, x_2, \dots, x_r \in M$, որոնք բավարարում են $x_1 \Phi = x'_1, \dots, x_r \Phi = x'_r$ պայմաններն և $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ -ն ճշմարիտ է Γ -ում:

Ապացույց. $\Phi(x'_1, \dots, x'_r)$ բանաձևից առանձնացնենք այն պրեդիկատները, որոնք ճշմարիտ են $x'_1, \dots, x'_r$ -ի համար և չեն գտնվում բացասման նշանից անմիջապես հետո. առանձնացնենք նաև այն պրեդիկատները: Դրոնք սխալ են և որոնց առջևում կա բացասման նշան:

Այսպես

$$P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k} \quad (1)$$

$$\neg P_{j_1}, \neg P_{j_2}, \dots, \neg P_{j_e} \quad (2)$$

Φ անի որ մեր բանաձևը Φ տիպի է, ապա բոլոր առարկայական փոփոխականները, որոնք մասնակցում են (1) շարքի պրեդիկատներում, իրարից սուրբեր են և Φ անի որ Φ հոմոմորֆիզմը ուժեղ է, ուստի մենք այնպես կարող ենք ընտրել $x_1, x_2, \dots, x_r \in M$, որ $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_k}$ պրեդիկատները նույնպես մնան ճշմարիտ Γ -ում և $x_1 \Phi = x'_1, \dots, x_r \Phi = x'_r$, այդ դեպքում (2) շարքի անդամների ճշմարտացիությունը մեքենայապես կմնա նույնը: Այստեղ ունենք լեմմա 1-ի պայմանները և հետևաբար $\Phi(x_1, x_2, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է:

Մենք ապացուցեցինք, որ եթե $\exists x_1, \dots, \exists x_r \Phi(x_1, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ' -ում, ապա ճշմարիտ է և Γ -ում:

Վերցնենք Γ տիպի բաց բանաձև:

Ե ուրեմ $\forall x_1, \dots, \forall x_r \Gamma(x_1, \dots, x_r)$ բանաձևը պահպանվում է ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ:

Ապացույց. Ընթացիկում, որ չի պահպանվում՝ այդ պեպքում գոյություն ունեն Γ և Γ' այնպես, որ $\Gamma \supset \Gamma'$ և Φ -ն ուժեղ հոմոմորֆիզմ է, բայց $\forall x_1, \dots, \forall x_r \neg(x_1, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ -ում և սխալ է Γ' -ում. հետևաբար $\neg \forall x_1, \dots, \forall x_r \neg(x_1, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ' -ում, այսինքն $\exists x_1, \dots, \exists x_r \neg \neg(x_1, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ' -ում:

Հայտնի է որ $\neg \Gamma$ -ն Ք տիպի բանաձև է և ըստ լեմմա 2-ի $\exists x_1 \dots \exists x_r \neg \Gamma(x_1, \dots, x_r)$ ճշմարիտ է Γ -ում, ստացանք հակասություն:

Թերեման ապացուցված է:

Նույնպես հեշտ ապացուցվում է, որ $\mathcal{L}$ -ն ունենք $\neg_1, \dots, \neg_k$ տիպի բաց բանաձևեր, ապա $\forall x_1, \dots, \forall x_c (\neg_1 \& \dots \& \neg_k)$ -ն պահպանվում է ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ:

Կառուցենք $\neg$ տիպի փակ բանաձև՝ $\forall x \neg P(x)$, որը չի պահպանվում հոմոմորֆիզմի ժամանակ (չնայած, որ պահպանվում է ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ): $\Gamma = \langle \{a\}, P(x) \equiv u \rangle$, $\Gamma' = \langle \{a'\}, P'(x) \equiv \delta \rangle$, Γ -ում $\forall x \neg P(x)$ ճշմարիտ է, իսկ Γ' -ում՝ սխալ:

Ուժեղ հոմոմորֆիզմի ժամանակ պահպանվում են նաև հետևյալ տիպի բանաձևերը՝

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \forall y_1 \dots \forall y_m R(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

$$\forall y_1 \dots \forall y_m \exists x_1 \dots \exists x_n R(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m),$$

որտեղ $R(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ $\neg$ տիպի բանաձև է և x_i -ն ($1 \leq i \leq n$) ոչ մի բացաման նշանի տակ չի մասնակցում:

Այս փաստերի ապացույցը հեշտությամբ ստացվում է վերոհիշյալ ապացուցման եղանակներով:

ՀՄՄ ԳԱ և ԵՐ. պետական համալսարանի

Հաշվադատական կենտրոն

Ընդունված է 19.XI.1968

K. A. TAKHTADJIAN. О логических формулах, сохраняющихся при сильном гомоморфизме (резюме)

Рассматриваются формулы исчисления предикатов первой степени, где знаки отрицания находятся непосредственно перед предикатными буквами. Указывается конкретный класс формул, сохраняющихся при сильном гомоморфизме.

K. A. TAKHTADJIAN. On a class of formulae closed under strong homomorphism (summary)

We investigate the formulae of the first order predicate calculus, in which the symbols of negations are found immediately before the symbols of predicates. The concrete class of formulas closed under strong homomorphism is pointed out.

Գ Բ Ա Կ Ա Ն ՈՒ Ք Յ ՈՒ Ն

1. A. Horn. On sentences which are true of direct unions of algebras, J. Symb. Logic. 16, 1951, 14 — 21.
2. R. Lyndon. Properties preserved under algebraic constructions, Bull. Amer. Math. Soc., 65, 1959, 287—299.