ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

Г. М. МУШЕГЯН

О МНОЖЕСТВАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ХААРА

§ 1. Введение

Система Хаара

$$\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_0^{(1)}(x),\ \chi_1^{(1)}(x),\ \chi_1^{(2)}(x),\ \cdots,\ \chi_n^{(1)}(x),\cdots,\ \chi_n^{(2^n)}(x),\cdots \tag{1}$$

определяется следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x)=1,\ \text{при}\ 0\leqslant x\leqslant 1.$$

$$\chi_0^{(1)}(x)=\begin{cases} 1, & \text{при}\ 0\leqslant x<\frac{1}{2}\\ -1, & \text{при}\ \frac{1}{2}<x\leqslant 1\\ 0, & \text{при}\ x=\frac{1}{2}\cdot\end{cases} \tag{2}$$

Для определения функций $\chi_n^{(k)}(x)$ $(n=1,2,\cdots;\ k=1,2,\cdots,2^n)$ разделим отрезок $[0,1]$ на 2^{n+1} равных частей и положим

$$\chi_n^{(k)}(x)=\begin{cases} \sqrt{2^n}, & \text{при}\ \frac{2k-2}{2^{n+1}}<x<\frac{2k-1}{2^{n+1}}\\ -\sqrt{2^n}, & \text{при}\ \frac{2k-1}{2^{n+1}}<x<\frac{2k}{2^{n+1}}\\ 0, & \text{при}\ x\overline{\in}\left[\frac{2k-2}{2^{n+1}},\ \frac{2k}{2^{n+1}}\right]\cdot\end{cases} \tag{3}$$

Далее полагаем

$$\chi_n^{(k)}(0)=\chi_n^{(k)}(+0)\ \text{и}\ \chi_n^{(k)}(1)=\chi_n^{(k)}(1-0),$$

а в каждой точке разрыва функция Хаара считается равной полусумме ее левого и правого пределов в этой же точке.

Для удобства обозначим через $\overset{+}{\gamma}{}_n^k$ $(\overset{-}{\gamma}{}_n^k)$ множество всех внутренних точек множества $E\{\chi_n^{(k)}(x)>0\}$ $(E\{\chi_n^{(k)}(x)<0\})$. Интервалы $\overset{+}{\gamma}{}_n^k$ и $\overset{-}{\gamma}{}_n^k$ будем называть γ-интервалами функции $\chi_n^{(k)}(x)$.

Определение 1. Будем говорить, что множество E является M-множеством при условии A для системы Хаара, если существует ряд

$$a_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^n}a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x), \tag{4}$$

сходящийся к нулю вне E, коэффициенты которого удовлетворяют условию А и не все $a_n^{(k)}$ равны нулю.

Определение 2. Если задан ряд по системе Хаара, то будем говорить, что коэффициенты ряда (4) удовлетворяют условию В, если для произвольной точки $x_0\in[0,1]$ выполняется соотношение

$$\lim_{l\to\infty}\frac{a_{n_l}^{(k_l)}}{\chi_{n_l}^{(k_l)}(x_0)}=0,\quad 1\leq k_l\leq 2^{n_l}, \tag{5}$$

где $\{\chi_{n_l}^{(k_l)}(x)\}_{l=1}^{\infty}$ — множество всех тех функций, которые не равны нулю в точке x_0.

В последние годы появился ряд работ, посвященных вопросам единственности рядов по системе Хаара и проблеме восстановления коэффициентов всюду сходящихся рядов по этой системе.

В работе [2] было установлено существование совершенных M-множеств при довольно сильных ограничениях на коэффициенты рядов (4).

В работе [1] было доказано, что если условие (В) нарушается хотя бы в одной точке, то для таких рядов Хаара M-множеством может служить даже множество, состоящее из одной точки. В работе [4] была доказана следующая

Теорема 1. Для того чтобы множество E для системы Хаара было M-множеством при условии (В) необходимо и достаточно, чтобы множество E содержало непустое совершенное подмножество.

В настоящей работе доказывается, что теорема 1 в некотором смысле окончательна. Именно: для класса рядов по системе Хаара, для которых в условии (В) отношения $\frac{a_{n_l}^{(k_l)}}{\chi_{n_l}^{(k_l)}(x_0)}$ в каждой точке имеют произвольную фиксированную и стремящуюся к нулю мажоранту, доказывается существование совершенных непустых множеств, не являющихся M-множествами.

Теорема 2. *Для любой наперед заданной последовательности положительных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, сходящейся к нулю всюду на отрезке [0,1], существует непустое совершенное множество, не являющееся M-множеством для класса рядов, коэффициенты которых удовлетворяют следующему условию: для произвольной точки $x_0\in[0,1]$ имеет место соотношение*

$$\frac{a_{n_l}^{(k_l)}}{\chi_{n_l}^{(k_l)}(x_0)}<\varphi_{n_l}(x_0)\quad (i=1,2,\cdots), \tag{c}$$

где $\{\chi_{n_i}^{(k_i)}(x)\}_{i=1}^{\infty}$ *— множество всех тех функций, которые не равны нулю в точке* x_0*.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Прежде чем приступить к доказательству теоремы напомним некоторые известные факты.

а) Лемма. Если ряд (4) сходится к нулю всюду в некотором интервале δ, кроме, быть может, счетного множества точек и его коэффициенты удовлетворяют условию (B), то $a_n^{(k)}=0$ для всех тех функций $\chi_n^{(k)}(x)$, которые тождественно равны нулю вне сегмента $\bar{\delta}$. Доказательство этого утверждения можно найти в работе [4].

в) Пусть δ является γ-интервалом функции $\chi_n^{(k_n)}(x)$, где k_n — некоторое целое число, удовлетворяющее соотношению $1\leqslant k_n\leqslant 2^n$. Все те функции системы Хаара, один из γ-интервалов которых содержит δ, назовем основными функциями относительно δ, а указанные γ-интервалы назовем основными γ-интервалами относительно δ. Остальные γ-интервалы основных функций назовем сопряженными γ-интервалами относительно δ.

Пусть

$$\chi_0^{(0)}(x),\ \chi_0^{(1)}(x),\ \chi_1^{(k_1)}(x),\ \chi_2^{(k_2)}(x),\cdots,\ \chi_{n-1}^{(k_{n-1})}(x),\ \chi_n^{(k_n)}(x)$$

являются основными функциями относительно интервала δ, и пусть задана сумма

$$S_n^{(k_n)}(x)=a_0^{(0)}\chi_0^{(0)}(x)+\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{2^m}a_m^{(k)}\chi_m^{(k)}(x)+\sum_{k=1}^{k_n}a_n^{(k)}\chi_n^{(k)}(x). \tag{6}$$

Если при некотором $t<n$ выполняется условие $|S_t^{(k_t)}(x)|>d>0$ для всех $x\in\delta$ и $S_{t+1}^{(k_t+1)}(x)$, $S_{t+2}^{(k_t+2)}(x),\cdots$, $S_n^{(k_n)}(x)$ соответственно равны нулю на сопряженных относительно δ интервалах функций $\chi_{t+1}^{(k_t+1)}(x)$, $\chi_{t+2}^{(k_t+2)}(x),\cdots$, $\chi_{n-1}^{(k_n-1)}(x)$, $\chi_n^{(k_n)}(x)$, то для всех $x\in\delta$ имеют место следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{|a_{t+1}^{(k_t+1)}|}{|\chi_{t+1}^{(k_t+1)}(x)|}=\frac{|a_{t+2}^{(k_t+2)}|}{|\chi_{t+2}^{k_t+2}(x)|}=\cdots=\frac{|a_{n-1}^{(k_n-1)}|}{|\chi_{n-1}^{(k_n-1)}(x)|}=\frac{|a_n^{(k_n)}|}{|\chi_n^{(k_n)}(x)|}>\frac{d}{2^{t+1}}\\&|S_n^{(k_n)}(x)|\geqslant 2^{n-t}\cdot d\end{aligned}\right|. \tag{7}$$

В самом деле, допустим, что $S_t^{(k_t)}(x)=c$ при $x\in\delta$. Из определения системы Хаара следует, что среди функций $\chi_t^{(k)}(x)$, $k_t<k\leqslant 2^t$ и $\chi_{t+1}^{(k)}(x)$, $1\leqslant k\leqslant k_{t+1}$ только $\chi_{t+1}^{(k_t+1)}(x)$ отлична от нуля на δ и на со-

---

* Как будет видно из доказательства теорема будет верной, если условие (c) задать только на двоично рациональных точках, а на остальном множестве требовать выполнения условия (B).

пряженном относительно δ γ-интервале функции $\chi_{l+1}^{(k_l+1)}(x)$. Так как $S_l^{(k_l)}(x)=c$, $\chi_{l+1}^{(k_l+1)}(x)=\mathrm{const}$, а $S_{l+1}^{(k_l+1)}(x)=0$ на сопряженном относительно δ γ-интервале функции $\chi_{l+1}^{(k_l+1)}(x)$, то на этом же множестве имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} a_{l+1}^{(k_l+1)}\ \chi_{l+1}^{(k_l+1)}(x)| = |\sqrt{2^{l+1}}\ a_{l+1}^{(k_l+1)}| = |c| \\ \frac{|a_{l+1}^{(k_l+1)}|}{|\chi_{l+1}^{(k_l+1)}(x)|} = \frac{|c|}{2^{l+1}} > \frac{d}{2^{l+1}} \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Поскольку функция $\chi_{l+1}^{(k_l+1)}(x)$ на своих γ-интервалах, один из которых содержит δ, принимает равные по модулю и разные по знаку значения, то отсюда и из (5) следует, что

$$S_{l+1}^{(k_l+1)}(x)=2c \text{ и } \frac{|a_{l+1}^{(k_l+1)}|}{|\chi_{l+1}^{(k_l+1)}(x)|} > \frac{d}{2^{l+1}} \text{ для всех } x \in \delta.$$

Продолжив это рассуждение, мы докажем утверждение в).

Построим совершенное множество P следующим образом. Так как последовательность положительных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю в точках $x=0$ и $x=1$, то существует номер M_1 такой, что имеет место соотношение

$$\varphi_n(0) < \frac{1}{4},\ \varphi_n(1) < \frac{1}{4} \quad \text{для всех } n > M_1. \tag{9}$$

Обозначим $N_1=M_1+2$ и выберем точки $x_1^{(1)}, x_1^{(2)}$, удовлетворяющие соотношениям $|x_1^{(1)}-0|=\frac{1}{2^{N_1+1}}$, $|x_1^{(2)}-1|=\frac{1}{2^{N_1+1}}$. Интервал $(x_1^{(1)}, x_1^{(2)})$ обозначим через $\delta_1^{(1)}$.

Множество $[0, 1]-\delta_1^{(1)}$ представляет собой сумму двух сегментов (обозначим их через $\overline{\Delta}_1^{(1)}$ и $\overline{\Delta}_1^{(2)}$). Ясно, что интервалы $\Delta_1^{(1)}$ и $\Delta_1^{(2)}$ являются γ-интервалами разных функций системы Хаара из группы с номером N_1 (номером группы считается нижний индекс).

На втором шагу рассмотрим точки $x=0$, $x=1$, $x=x_1^{(i)}$, $i=1, 2$, и выберем натуральное число M_2 так, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi_n(0) < \frac{1}{4^2}, \quad \varphi_n(1) = \frac{1}{4^2}, \varphi_n(x_1^{(i)}) = \frac{1}{4^2}, \ i=1, 2 \text{ для всех } n \geqslant M_2. \tag{10}$$

Обозначим через $N_2=\max[M_2, N_1+2]$. Рассмотрим сегменты $\Delta_1^{(i)}$, $i=$ $=1, 2$. Обозначим через $x_2^{(2i-1)}$, $(x_2^{(2i)})$ ту точку, которая принадлежит сегменту $\overline{\Delta}_1^{(i)}$ и находится от его левого (правого) конца на расстоянии $\frac{1}{2^{N_2+1}}$. Интервал $(x_2^{(2i-1)}, x_2^{(2i)})$ обозначим через $\delta_2^{(i)}$. Множество $\Delta_2^{(i)}-\delta_2^{(i)}$ представляет собой сумму двух сегментов. Обозначим их через $\Delta_2^{(2l-1)}$ и $\Delta_2^{(2l)}$. Ясно, что интервалы $\Delta_2^{(2l-1)}$ и $\Delta_2^{(2l)}$ являются γ-интервалами разных функций системы Хаара из группы с номером N_2, а точки $x_2^{(2l-1)}$, $x_2^{(2l)}$ являются точками разделимости этих же функций (для удобства в дальнейшем общий конец γ-интервалов функции $\chi_n^{(k)}(x)$ будем называть точкой разделимости этой же функции).

Действительно, так как $\Delta_1^{(l)}$ является γ-интервалом некоторой функции из группы с номером $N_1 < N_2$, то его концы являются двоично рациональными числами порядка* не выше, чем N_1+1. Пусть даны два двоично-рациональных числа α и β, порядки которых равны соответственно P_α и P_β. Допустим $P_\beta > P_\alpha$, тогда $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$ являются двоично-рациональными числами порядка P_β. Следовательно $x_2^{(2l-1)}$ и $x_2^{(2l)}$ имеют порядок N_2+1. Отсюда и из определения системы Хаара следует справедливость утверждения.

Допустим на k—1-ом шагу построены числа $N_1, N_2, \cdots, N_{k-1}$ и интервалы $\Delta_{k-1}^{(i)}$, $i=1, 2, \cdots, 2^{k-1}$, которые являются γ-интервалами разных функций системы Хаара из группы с номером N_{k-1}. Выберем натуральное число M_k настолько большим, чтобы выполнялось соотношение

$$\varphi_n(0) < \frac{1}{4^k},\quad \varphi_n(1) < \frac{1}{4^k},\ \varphi_n(x_i^j) < \frac{1}{4^{k-i}} \text{ для всех } n > M_k, \tag{11}$$

где $i=1, 2, \cdots, k-1$; $j=1, 2, \cdots, 2^i$. Обозначим через $N_k = \max[M_k, N_{k-1}+2]$ и рассмотрим сегменты $\bar{\Delta}_{k-1}^{(l)}$. Обозначим через $x_k^{(2l-1)}$ $(x_k^{(2l)})$ ту точку, которая принадлежит сегменту $\bar{\Delta}_{k-1}^{(l)}$ и находится от его левого (правого) конца на расстоянии $\dfrac{1}{2^{N_{k+1}}}$. Интервал $(x_k^{(2l-1)}, x_k^{(2l)})$ обозначим через δ_k^l. Множество $\bar{\Delta}_{k-1}^{(l)} - \delta_k^{(l)}$ можно представить как сумму двух сегментов. Обозначим их через $\bar{\Delta}_k^{(2l-1)}$ и $\Delta_k^{(2l)}$. Можно убедиться, как и выше, что каждый из этих интервалов является γ-интервалом некоторой функции системы Хаара из группы с номером N_k, а точки $x_k^{(2l-1)}$ и $x_k^{(2l)}$ являются точками разделения γ-интервалов этих функций. Продолжив этот процесс бесконечно, мы построим последовательность интервалов

$$\delta_1^{(1)}, \delta_2^{(1)}, \delta_2^{(2)}, \cdots, \delta_k^{(1)}, \cdots, \delta_k^{(2^{k-1})}, \cdots. \tag{12}$$

Рассмотрим множество

$$P = [0, 1] - \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \delta_k^{(l)}. \tag{13}$$

Ясно, что P является непустым совершенным множеством, так как интервалы $\delta_k^{(l)}$ не имеют общих точек и общих концов. Легко видеть,

---

* Порядком двоично рационального числа считается степень числа 2 в знаменателе несократимой дроби.

что $\operatorname{mes} P=0$, потому что, как видно из построения, $\operatorname{mes} \delta_{k+1}^{(l)} > \frac{1}{2} \operatorname{mes} \overline{\Delta}_k^{(l)}$ для всех $k=1, 2, \cdots$ и $l=1, 2, \cdots, 2^k$.

Докажем, что множество P не является M-множеством при условии (с). Предположим обратное, то есть, что существует ряд

$$a_0^{(0)} \chi_0^{(0)}(x)+\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x), \tag{14}$$

сходящийся к нулю всюду вне множества P, коэффициенты которого удовлетворяют условию (с) и хотя бы один из них отличен от нуля. Пусть $a_{n_0}^{(k_0)}$ первый отличный от нуля коэффициент ряда (8). Покажем, что n_0 принадлежит множеству $\{0, (N_k+1)_{k=1}^{\infty}\}$.

Допустим обратное, т. е., что $N_j+1<n_0<N_{j+1}+1$. Функция $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ должна быть тождественно равной нулю на множестве

$$\sum_{k=1}^{j} \sum_{l=1}^{2^{k-1}} \delta_k^{(l)}. \tag{15}$$

Предположим обратное, пусть соотношение $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x) \equiv 0$ не выполняется на множестве (15) и, следовательно, на некотором интервале $\delta_e^{(i_0)}$, где $1 \leqslant e \leqslant j$, $1 \leqslant i_0 \leqslant 2^{e-1}$. Так как концы интервала $\delta_e^{(i_0)}$ являются двоично рациональными точками, порядок которых не больше N_j+1, то легко видеть, что сегмент $\overline{\delta}_e^{(i_0)}$ можно представить как сумму замыканий γ-интервалов функций системы Хаара, которые принадлежат группе с номером N_j. Отсюда и из соотношения $N_{j+1}<n_0$ следует, что функция $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ тождественно равна нулю вне сегмента $\overline{\delta}_e^{(i_0)}$. Так как ряд (14) сходится к нулю во всех точках интервала $\delta_e^{(i_0)}$, то в силу условия а) имеем $a_{n_0}^{(k_0)}=0$, что противоречит условию $a_{n_0}^{(k_0)} \neq 0$, откуда и следует справедливость утверждения.

Поскольку $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x) \equiv 0$ на множестве (15), то отсюда следует, что $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x) \equiv 0$ вне некоторого сегмента $\overline{\Delta}_j^{(i_0)}$, $1 \leqslant i_0 \leqslant 2^j$. $\Delta_j^{(i_0)}$ является γ-интервалом некоторой функции системы Хаара, принадлежащей группе с номером N_j. Так как $n_0>N_j+1$, то $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ отлична от нуля только на одной половине интервала $\Delta_j^{(i_0)}$. Эту половину обозначим через α. Тогда из определения интервала $\delta_{j+1}^{(i_0)}$ и из соотношения $n_0<N_{j+1}+1$ легко следует, что один из γ-интервалов функции $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ принадлежит интервалу $\delta_{j+1}^{(i_0)}$. Этот γ-интервал обозначим через γ_1. Рассмотрим частную сумму

$$S_{n_0}^{(k_0)}(x)=a_0^{(0)} \chi_0^{(0)}(x)+\sum_{n=1}^{n_0-1} \sum_{k=1}^{2^n} a_n^{(k)} \chi_n^{(k)}(x)+\sum_{k=1}^{k_0} a_{n_0}^{(k)} \chi_{n_0}^{(k)}(x). \tag{16}$$

Она принимает отличное от нуля постоянное значение на интервале γ_1. Функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n>n_0$ или тождественно равны нулю в интервале γ_1, или вне сегмента $\overline{\gamma}_1$. Согласно а) коэффициенты $a_n^{(k)}=0$ для функций, тождественно равных нулю вне сегмента $\bar{\gamma}_1$. А так как ряд (14) сходится к нулю в интервале γ_1, то

$$S_{n_0}^{(k_0)}(x) = a_{n_0}^{(k_0)} \chi_{n_0}^{(l_0)}(x) = 0, \text{ если } x \in \gamma_1.$$

Последнее равенство противоречит предположению $a_{n_0}^{(k_0)} \neq 0$.

Рассмотрим случай $n_0 = N_j + 1$ (если $n_0 = 0$, $k_0 = 0$, то рассуждение можно провести аналогично нижеприводимому, причем надо начинать со второго шага). Точно так же, как это делалось выше, взяв $n_0 = N_j + 1$, можно доказать, что $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x) \equiv 0$ на множестве (15). Следовательно $\chi_{n_0}^{(k_0)}(x) \equiv 0$ вне некоторого сегмента $\bar{\Delta}_j^{(l_0)}$. Интервал $\Delta_j^{(l_0)}$ является γ-интервалом некоторой функции системы Хаара из группы с номером N_j. Отсюда следует, что $a_{n_0}^{(k_0)} \chi_{n_0}^{(k_0)}(x)$ принимает на каждой половине интервала $\Delta_j^{(l_0)}$ равные по модулю и разные по знаку значения. Один из них обозначим через Δ_1 Допустим

$$|a_{n_0}^{(k_0)} \chi_{n_0}^{(k_0)}(x)| = |c| \qquad \text{для всех } x \in \Delta_1. \tag{17}$$

Функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n_0 < n < N_{j+1}$ тождественно равны нулю или на интервале Δ_1, или вне сегмента $\bar{\Delta}_1$. Через $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$ обозначим тот из интервалов $\Delta_{j+1}^{(2l_0-1)}$ и $\Delta_{j+1}^{(2l_0)}$, который содержится в Δ_1. Рассмотрим функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $N_j + 1 = n_0 < n \leqslant N_{j+1}$, являющиеся основными относительно $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$. Обозначим их через $\chi_{n_0+1}^{(\alpha_1)}(x)$, $\chi_{n_0+2}^{(\beta_1)}(x), \cdots, \chi_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x)$. Из определения интервала $\delta_{j+1}^{(l_0)}$ легко следует, что те γ-интервалы указанных основных функций, которые сопряжены относительно $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$, принадлежат множеству $\delta_{j+1}^{(l_0)}$. Возьмем произвольную основную функцию $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$ относительно $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$, причем $n_0 < n_1 \leqslant N_{j+1}$. γ-интервал функции $\chi_{n_1}^{(k_1)}(x)$, сопряженный относительно интервала $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$, обозначим через γ. Функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n > n_1$ тождественно равны нулю или на интервале γ, или вне сегмента $\bar{\gamma}$. Так как ряд (14) сходится к нулю на множестве $\delta_{j+1}^{(l_0)}$, следовательно и на интервале γ, то, в силу условия а), справедливо соотношение $a_n^{(k)} = 0$ для тех n и k, для которых $n > n_1$ и $\chi_n^{(k)}(x) \equiv 0$ при $x \bar{\in} \bar{\gamma}$. Отсюда следует, что

$$S_{n_1}^{(k_1)}(x) = 0 \qquad \text{для всех } x \in \gamma. \tag{18}$$

Так как n_1—произвольное целое число, удовлетворяющее неравенству $n_0 < n_1 \leqslant N_{j+1}$, то, как видно из (18), условия утверждения в) выполнены. Отсюда следует, что

$$S_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x) = 2^{N_{j+1} - N_j - 1} \cdot c \qquad \text{для всех } x \in \Delta_{j+1}^{(l_1)},$$

$$\frac{|a_{n_0+1}^{(\alpha_1)}|}{|\chi_{n_0+1}^{(\alpha_1)}(x)|} = \frac{|a_{n_0+2}^{(\beta_1)}|}{|\chi_{n_0+2}^{(\beta_1)}(x)|} = \cdots = \frac{|a_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}|}{|\chi_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x)|} = \frac{|c|}{2^{N_j+2}}, \text{ где } x \in \Delta_{j+1}^{(l_1)}. \tag{19}$$

На втором шагу рассмотрим интервал $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$, который является γ-интервалом функции $\chi_{N_{j+1}}^{(\sigma_1)}(x)$. Из функций $\chi_{N_{j+1}}^{(k)}(x)$, где $\sigma_1 < k \leqslant 2^{N_{j+1}}$ и

$\chi_{N_{j+1}+1}^{(k)}(x)$, $1 \leqslant k \leqslant 2^{N_{j+1}+1}$, только одна функция не равна тождественно нулю на интервале $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$. Эту функцию обозначим через $\chi_{N_{j+1}+1}^{(k')}(x)$. Она на каждой половине интервала $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$ принимает равные по модулю и разные по знаку значения. Следовательно, хотя бы на одной половине интервала $\Delta_{j+1}^{(l_1)}$ (ее обозначим через Δ_2) имеет место соотношение

$$|S_{N_{j+1}+1}^{(k')}(x)| > 2^{N_{j+1}-N_j-1} \cdot c|. \tag{20}$$

Через $\Delta_{j+2}^{(l_2)}$ обозначим тот из интервалов $\Delta_{j+2}^{(2l_1-1)}$ и $\Delta_{j+2}^{(2l_1)}$, который содержится в интервале Δ_2. Рассмотрим те функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $N_{j+1}+2 \leqslant \leqslant n \leqslant N_{j+2}$, которые являются основными относительно интервала $\Delta_{j+2}^{(l_2)}$ (их обозначим через $\chi_{N_{j+1}+2}^{(\alpha_2)}(x), \chi_{N_{j+1}+3}^{(\beta_2)}(x), \cdots, \chi_{N_{j+2}}^{(\sigma_2)}(x)$. Возьмем произвольную функцию $\chi_{n_2}^{(k_2)}(x)$ из множества указанных основных функций. Через γ_2 обозначим сопряженный γ-интервал относительно $\Delta_{j+2}^{(l_2)}$ функции $\chi_{n_2}^{(k_2)}(\chi)$. Функции $\chi_n^{(k)}(x)$, $n > n_2$ тождественно равны нулю или на интервале γ_2, или вне сегмента $\bar{\gamma}_2$. Поскольку ряд (14) сходится к нулю всюду на интервале $\delta_{j+2}^{(l_2)}$, следовательно и на множестве γ_2, то согласно а) $a_n^{(k)}=0$ для тех функций, которые тождественно равны нулю вне сегмента $\bar{\gamma}_2$, откуда следует, что

$$S_{n_2}^{(k_2)}(x) = 0 \qquad \text{для всех } x \in \gamma_2. \tag{21}$$

Так как n_2—произвольное целое число из промежутка $N_{j+1}+2 \leqslant \leqslant n \leqslant N_{j+2}$, то из (17) и (16) вытекает, что условия утверждения в) выполнены. Следовательно имеют место соотношения

$$|S_{N_{j+2}}^{(\sigma_2)}(x)| > |2^{N_{j+2}-N_j-2} \cdot c| \qquad \text{для всех } x \in \Delta_{j+2}^{(l_2)}$$

и

$$\frac{|a_{N_{j+1}+2}^{(\alpha_2)}|}{|\chi_{N_{j+1}+2}^{(\alpha_2)}(x)|} = \frac{|a_{N_{j+1}+3}^{(\beta_2)}|}{|\chi_{N_{j+1}+3}^{(\beta_2)}(x)|} = \cdots = \frac{|a_{N_{j+2}}^{(\sigma_2)}|}{|\chi_{N_{j+2}}^{(\sigma_2)}(x)|} = \frac{|c|}{2^{N_j+3}} \text{ при } x \in \Delta_{j+2}^{(l_2)} \tag{22}$$

Допустим, что после некоторого $(n-1)$-ого шага мы получили интервал $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$, являющийся γ-интервалом функции $\chi_{N_{j+n-1}}^{(\sigma_{n-1})}(x)$. Предположим, что имеет место соотношение

$$|S_{N_{j+n-1}}^{(\sigma_{n-1})}(x)| > |2^{N_{j+n}-N_j-n+1} \cdot c| \quad \text{для всех} \quad x \in \Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}. \tag{23}$$

Из функций $\chi_{N_{j+n-1}}^{(k)}(x)$, $\sigma_3 < k \leqslant 2^{N_{j+n-1}}$ и $\chi_{N_{j+n-1}}^{(k)}(x)$, $1 < k < < 2^{N_{j+n-1}+1}$ только одна не равна тождественно нулю на интервале $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$. Обозначим ее через $\chi_{N_{j+n-1}}^{(k_{n-1})}(x)$. Ясно, что функция $\chi_{N_{j+n-1}+1}^{(k_{n-1})}(x)$ на разных половинах интервала $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$ принимает равные по модулю и разные по знаку значения. Следовательно хотя бы на одной половине интервала $\Delta_{j+n-1}^{(l_{n-1})}$ (ее обозначим через Δ_{n-1}) имеет место соотношение

$$|S^{(k_{n-1})}_{N_{j+n-1}}(x)| > |2^{N_{j+n-1}-N_j-n+1}\cdot c| \quad \text{для всех } x\in\Delta_{n-1}. \tag{24}$$

Тот из интервалов $\Delta^{(2l_{n-1}-1)}_{j+n}$ и $\Delta^{(2l_{n-1})}_{j+n}$, который содержится в множестве Δ_{n-1}, обозначим через $\Delta^{(l_n)}_{j+n}$. Те функции $\chi^{(k)}_m(x)$, $N_{j+n-1}+1 < m \leqslant N_{j+n}$, $1\leqslant k\leqslant 2^m$, которые являются основными относительно интервала $\Delta^{(l_n)}_{j+n}$, обозначим через

$$\chi^{(\alpha_n)}_{N_{j+n-1}+2}(x), \chi^{(\beta_n)}_{N_{j+n-1}+3}(x), \cdots, \chi^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}(x). \tag{25}$$

Возьмем произвольную функцию из множества (25), обозначим её через $\chi^{(k_n)}_{m_n}(x)$; γ-интервал функции $\chi^{(k_n)}_{m_n}(x)$, сопряженный относительно $\Delta^{(l_n)}_{j+n}$, обозначим через γ_n. Ясно, что $\gamma_n\in\delta^{(l_{n-1})}_{j+n}$. Функции $\chi^{(k)}_m(x)$, $m>m_n$ тождественно равны нулю или на интервале γ_n, или вне сегмента $\bar\gamma_n$. Поскольку ряд (14) сходится к нулю на интервале $\delta^{(l_{n-1})}_{j+n}$, следовательно и на множестве γ_n, то $a^{(k)}_n=0$ для функций, тождественно равных нулю вне сегмента $\bar\gamma_n$. Следовательно для последовательности (25) условия утверждения в) выполнены. Отсюда следует, что

$$|S^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}(x)| > |2^{N_{j+n}-N_j-n}\cdot c \qquad \text{для всех} \quad x\in\Delta^{(l_n)}_{j+n},$$

$$\frac{|a^{(\alpha_n)}_{N_{j+n-1}+2}|}{|\chi^{(\alpha_n)}_{N_{j+n-1}+2}(x)|} = \frac{|a^{(\beta_n)}_{N_{j+n-1}+3}|}{|\chi^{(\beta_n)}_{N_{j+n-1}+3}(x)|} = \cdots = \frac{|a^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}|}{|\chi^{(\sigma_n)}_{N_{j+n}}(x)|} > \frac{|c|}{2^{N_j+n+1}} \tag{26}$$

для всех $x\in\Delta^{(l_n)}_{j+n}$. Продолжив этот процесс бесконечно, мы получим последовательность интервалов

$$\Delta^{(l_1)}_{j+1}\supset\Delta^{(l_2)}_{j+2}\supset\Delta^{(l_3)}_{j+3}\supset\cdots\supset\Delta^{(l_n)}_{j+n}\supset\cdots. \tag{27}$$

Выберем число k_0 настолько большим, чтобы имело место соотношение

$$\frac{1}{4^{j+k_0-1}} < \frac{|c|}{2^{N_j+k_0+1}}. \tag{28}$$

Интервал $\Delta^{(l_{k_0})}_{j+k_0}$ является γ-интервалом функции $\chi^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}(x)$. Обозначим через x_0 тот конец интервала $\Delta^{(l_{k_0})}_{j+k_0}$, у которого порядок меньше числа $N_{j+k}+1$. В силу определения чисел N_k из (11) и условия (с) следует, что для точки x_0 имеет место соотношение

$$\frac{|a^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}|}{|\chi^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}(x)|} < \varphi_{N_{j+k_0}}(x_0) < \frac{1}{4^{j+k_0-1}}. \tag{29}$$

Из (26) следует, что

$$\frac{|a^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}|}{|\chi^{(\sigma_{k_0})}_{N_{j+k_0}}(x_0)|} > \frac{|c|}{2^{N_j+k_0+1}}. \tag{30}$$

Сопоставляя (30), (28) и (29), мы придем к противоречию, чем и заканчивается доказательство теоремы.

Считаю своим приятным долгом поблагодарить А. А. Талаляна за постановку задачи и за оказанное внимание при ее решении.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 2.II.1968

Հ. Մ. ՄՈՒՇԵՂՅԱՆ. *Հաարի սիստեմի համար միակության բազմությունների մասին (ամփոփում)*

Կասենք, որ Հաարի սիստեմով $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ *շարքը պատկանում է (*) դասին, եթե կամայական* $y \in [0, 1]$ *կետի համար*

$$\frac{|a_{n_k}|}{|\chi_{n_k}(y)|} \to 0, \text{ երբ } k \to \infty. \qquad (**)$$

որտեղ $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *այն բոլոր ֆունկցիաների բազմությունն է, որոնց համար* $\chi_{n_k}(y) \neq 0$.

[4] *աշխատանքում ստացված էր հետևյալ արդյունքը՝*

Թեորեմա. Որպեսզի E-ն (*) դասի շարքերի համար լինի միակության բազմություն, անհրաժեշտ է և բավարար որպեսզի E-ն չպարունակի կատարյալ ենթաբազմություն։

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ նշված արդյունքը որոշ իմաստով վերջնական է։ Այսինքն, եթե (**) հարաբերությունը մնում է փոքր $[0,1]$*-ում որոշված և ամենուրեք զերոյի ձգտող* $\{\varphi_k(y) > 0\}_{k=1}^{\infty}$ *մաժորանտից, ապա նոր դասի շարքերի համար գոյություն ունի P կատարյալ միակության բազմություն։*

H. M. MOUSHEKHIAN *On the uniqueness sets for Haar system* (summary)

Definition. The series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi_k(x)$ with respect to Haar systems is said to belong to the class (*), if for every $y \in [0, 1]$

$$\frac{|a_{n_k}|}{|\chi_{n_k}(x)|} \to 0, \text{ when } k \to \infty, \qquad (**)$$

with $\{\chi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ being the set of all functions for which $\chi_{n_k}(y) \neq 0$.

It was proved in [4], that in order E to be a set of uniqueness for the class (*), it is necessary and sufficient for E not to contain a non empty perfect subset.

It is shown in the present paper, that if (**) possesses a magorant $\{\varphi_k(y) > 0\}$, which is defined on [0, 1] and everywhere tends to zero, then for the new class of series a perfect set of uniqueness does exists.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Г. Арутюнян* и *А. А. Талалян.* О единственности рядов по системе Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964, 1391—1408.
2. *Н. Б. Петровская.* О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, 1964.
3. *Н. Б. Петровская.* Некоторые теоремы единственности для рядов по системе Хаара, Вестник МГУ, № 5, 1964.
4. *Г. М. Мушегян.* О множествах единственности для системы Хаара, Изв. АН АрмССР, Математика, 2, № 6, 1967, 350—361.