ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

И. А. ФЕДОТОВ

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В R^n, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРОВ, ИМЕЮЩИЕ РАЗРЫВНЫЕ НА ГИПЕРПЛОСКОСТИ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Введение

В данной статье рассматриваются эллиптические дифференциальные уравнения в R^n, зависящие от двух больших вещественных параметров $q, p\ (q<p)$, которые распадаются на два уравнения в полупространствах $R^n_+ = R^n\{x=(x_1,\cdots, x_n): x_n>0\}$ и $R^n_- = R^n\{x: x_n<0\}$. В R^n_+ уравнение зависит только от параметра q, а в R^n_- — от q и от p. Для такой задачи изучается вопрос о гладком сопряжении решений указанных уравнений на гиперплоскости $x_n=0$, а также доказывается теорема единственности гладкого решения и априорная оценка.

Примером подобных задач являются некоторые задачи диффракции, изученные в работе [1] для уравнений второго порядка. В этой работе рассматривалась, в частности, следующая задача:

$$\left|\begin{array}{l} Au \equiv \sum\limits_{l,k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_l}\left(a_{lk}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f_+(x) \text{ в } G, \\ Bu \equiv \sum\limits_{l,k=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_l}\left(b_{lk}\left(x, \dfrac{1}{\varepsilon}\right)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\right) = 0 \text{ в } R^n \backslash G, \\ u(x) \in H_2(R^n). \end{array}\right.$$

Настоящая статья представляет собой первый шаг к обобщению таких задач на случай общих эллиптических дифференциальных уравнений, когда уравнения задаются в полупространствах.

При решении указанной задачи мы используем получившую в последние годы широкое развитие теорию псевдодифференциальных операторов [2] или, как их иначе называют [3] уравнений в свертках.

Вообще говоря, вместо дифференциальных операторов мы могли бы рассматривать псевдодифференциальные операторы, но это повлекло бы за собой большое количество различных предположений, связанных с поведением факторизации символов. Ограничимся поэтому изучением только дифференциальных уравнений, используя факторизацию полиномов, рассматриваемую в [4] (гл. 4).

При доказательстве теорем существования и единственности используется метод работы [5], в которой наличие параметра позволяет обратить исходный оператор. Мы решаем задачу в пространствах, в которых нормы естественно связаны с параметрами, что оказывается существенным для данной задачи.

Для доказательства теоремы существования и априорной оценки строятся правый и левый регуляризаторы, причем при $p \to \infty$ они превращаются в регуляризаторы первой краевой задачи для уравнения в R^n_+ с нулевыми граничными условиями, следовательно, изучаемая нами задача в некотором смысле моделирует первую краевую задачу для эллиптического уравнения в R^n_+.

Мы будем использовать ряд обозначений работы [3].

§ 1. Постановка задачи

Пусть $a(x, \xi, q) = \sum\limits_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta \xi^\alpha$ — однородный порядка $2m$ эллиптический полином

$$a(x, \xi, q) \neq 0 \text{ при } |\xi| + q \neq 0,\ x = (x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \equiv (x', x_n),\ \xi = (\xi', \xi_n). \quad (1.1)$$

Предположим, что коэффициенты $a_{\alpha\beta}(x)$ удовлетворяют условию

$$a_{\alpha\beta}(x) = a_{\alpha\beta}(\infty) + a'_{\alpha\beta}(x), \quad (2.1)$$

где $a'_{\alpha\beta}(x) \in S_x$.

По функции $a(x, \xi, q)$ построим дифференциальный оператор

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta D^\alpha u(x) \quad \left(D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n},\ D_k = -i\frac{\partial}{\partial x_k}\right), \quad (3.1)$$

который в соответствии с (2.1) может быть представлен в виде

$$Au = A(\infty)\, u + A'u = \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(\infty)\, q^\beta D^\alpha u(x) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a'_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta D^\alpha u(x). \quad (4.1)$$

Функцию $a(x, \xi, q)$ будем называть символом оператора A.

Наряду с $a(x, \xi, q)$ рассмотрим символ $b(x, \xi, q, p)$

$$b(x, \xi, q, p) = \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=2m} b_{\alpha\beta\gamma}(x)\, q^\beta p^\gamma \xi^\alpha, \quad (5.1)$$

также допускающий представление вида (2.1) и эллиптический по ξ, q, p, т. е. $b(x, \xi, q, p) \neq 0$ при $|\xi| + q + p \neq 0$, q и $p > 0$.

Соответствующий $b(x, \xi, q, p)$ оператор имеет вид

$$Bu = B(\infty)\, u + B'u = \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=2m} b_{\alpha\beta\gamma}(x)\, q^\beta p^\gamma D^\alpha u(x). \quad (6.1)$$

Будем решать в R^n следующую задачу:

$$\left.\begin{aligned} \theta^+ Au_+(x) &\equiv \theta^+ \sum_{|\alpha|+\beta=2m} a_{\alpha\beta}(x)\, q^\beta D^\alpha u_+(x) = f_+(x) \\ \theta^- Bu_-(x) &\equiv \theta^- \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma=2m} b_{\alpha\beta\gamma}(x)\, q^\beta p^\gamma D^\alpha u_-(x) = f_-(x) \end{aligned}\right\}, \quad (7.1)$$

где $f_+(x)$ определена при $x_n > 0$, $f_-(x)$ — при $x_n \leqslant 0$, $\theta^+(x)$ — функция Хевисайда, а $\theta^-(x) = 1 - \theta^+(x)$. Функция $f(x) = f_+ + f_-$ определена в R^n и принадлежит $L_2(R^n)$. Задачу (7.1) будем решать при условии: $u_+ + u_- \in H_{2m}(R^n)$ при фиксированных q и p.

Определим оператор $\mathbf{A}$ по формуле $\mathbf{A}u = \theta^+ Au + \theta^- Bu$.

Тогда задача (7.1) примет вид:

$$\mathbf{A}u = f, \quad u \in H_{2m}(R^n). \tag{8.1}$$

§ 2. Некоторые нормировки в пространствах H

1. Пространство $\mathbf{H}_{m,m}$ состоит из функций, заданных на R^n. Норму в $\mathbf{H}_{m,m}$ введем по формуле

$$\|v\|_{m_1, m_2} = \|(q + p + |\xi|)^{m_1} (q + |\xi|)^{m_2} \tilde{v}(\xi)\|_0. \tag{1.2}$$

Здесь $\tilde{v}(\xi)$ есть преобразование Фурье функции $v(x)$, определяемое формулой

$$\tilde{v}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{i(x,\xi)} v(x)\, dx \equiv F[v(x)], \quad (x, \xi) \equiv x\xi \equiv x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n.$$

Очевидно, что при фиксированных q и p это пространство совпадает с $H_{m_1+m_2}$. В частности, при $m_1 = m_2 = m$ мы получаем пространство H_{2m}, а при $m_1 = m$, $m_2 = -m$ — пространство H_0.

2. Пространство $\mathbf{H}^\mu$. Введем в рассмотрение следующие функции:

$$\mu_-(\xi) \equiv \mu_-(\xi, q, p) = \frac{[\xi_n - i(q + p + |\xi'|)]^m}{[\xi_n - i(q + |\xi'|)]^m}, \tag{2.2}$$

$$\mu_+(\xi) \equiv \mu_+(\xi, q, p) = \frac{[\xi_n + i(q + |\xi'|)]^m}{[\xi_n + i(q + p + |\xi'|)]^m}. \tag{3.2}$$

Пространство $\mathbf{H}^\mu$ состоит из функций $g = g_+ + g_- = \theta^+ g + \theta^- g$, определенных на прямой сумме $\overline{H}_0^+ + \overline{H}_0^-$, для которых норма вводится по формуле

$$|||g||| = \|\Pi^+ \mu_-(\xi, q, p)\tilde{g}_+(\xi)\|_0 + \|\Pi^- \mu_+(\xi, q, p)\tilde{g}_-(\xi)\|_0 \quad (\Pi^\pm = F[\theta^\pm] \text{(см. [3])}). \tag{4.2}$$

Отметим, что при фиксированных значениях параметров q и p, следующие нормы являются эквивалентными:

$$\|\cdot\|_0 \sim \|\cdot\|_{m,-m} \sim |||\cdot|||.$$

Теорема 1.2. *Оператор* $\mathbf{A}$ *ограничен из пространства* $\mathbf{H}_{m,m}$ *в* $\mathbf{H}^\mu$, *т. е.*

$$|||\mathbf{A}u||| \leqslant c\|u\|_{m,m}. \tag{5.2}$$

Доказательство.

$$|||\mathbf{A}u||| = \|\Pi^+ \mu_- \tilde{\mathbf{A}}u\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{\mathbf{A}}u\|_0 = \|\Pi^+ \mu_- (\Pi^+ \tilde{A}u + \Pi^- \tilde{B}u)\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^+ \mu_- (\Pi^+ \tilde{A}u + \Pi^- \tilde{B}u)\|_0 = \|\Pi^+ \mu_- \tilde{A}u\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{B}u\|_0 \leqslant C(\|\mu_- \tilde{A}u\|_0 + \|\mu_+ \tilde{B}u)\|_0. \tag{6.2}$$

В последнем неравенстве мы использовали тот факт, что операторы $\Pi^{\pm}$ ограничены в H_0 (см. [3]), ($\Pi^{\pm} g_{\mp} = 0$).

Запишем формулы для $\widetilde{A}u$, $\widetilde{B}u$

$$\widetilde{A}u(\xi) = a(\infty, \xi, q)\,\widetilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \widetilde{a}'(\xi - \eta, \eta, q)\widetilde{u}(\eta)\,d\eta, \tag{7.2}$$

$$\widetilde{B}u(\xi) = b(\infty, \xi, q, p)\widetilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \widetilde{b}'(\xi - \eta, \eta, q, p)\widetilde{u}(\eta)\,d\eta, \tag{8.2}$$

что следует из (4.1) и (6.1), если в этих формулах перейти к преобразованию Фурье от x к ξ. Легко проверяются следующие оценки:

$$|a(\infty, \xi, q)| \leqslant C(q + |\xi|)^{2m}, \ |\widetilde{a}'(\xi - \eta, \eta, q)| \leqslant C_r \frac{(q + |\eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}, \tag{9.2}$$

$$|b(\infty, \xi, q, p)| \leqslant C(q + p + |\xi|)^{2m}, \ |\widetilde{b}'(\xi - \eta, \eta, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q + p + |\eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}. \tag{10.2}$$

Константа C_r зависит от r, где r может быть сколь угодно большим.

В силу этих неравенств имеем

$$\|\mu_- \widetilde{A}u\|_0 \leqslant C\left(\left\|\frac{(q + p + |\xi|)^m}{(q + |\xi|)^m}(q + |\xi|)^{2m}\widetilde{u}\right\|_0 + \left\|\frac{(q + p + |\xi|)^m}{(q + |\xi|)^m} \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \int \frac{(q + |\eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}\widetilde{u}(\eta)\,d\eta\right\|_0\right). \tag{11.2}$$

Воспользуемся элементарными неравенствами

$$(q + p + |\xi|)^m \leqslant C(q + p + |\eta|)^m (1 + |\xi - \eta|)^m, \tag{12.2}$$

$$(q + |\xi|)^{-m} \leqslant C(q + |\eta|)^{-m}(1 + |\xi - \eta|)^m, \tag{13.2}$$

тогда (11.2) примет вид

$$\|\mu_- \widetilde{A}u\|_0 \leqslant C\left(\|u\|_{m,m} + \left\|\int (q + p + |\eta|)^m (q + |\eta|)^m \frac{(1 + |\xi - \eta|)^{2m}}{(1 + |\xi - \eta|)^r}\widetilde{u}\,d\eta\right\|_0\right) \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\|u\|_{m,m} + \left\|\int (q + p + |\eta|)^m (q + |\eta|)^m \frac{\widetilde{u}|\eta|}{(1 + |\xi - \eta|)^{r_1}}\,d\eta\right\|_0\right). \tag{14.2}$$

Воспользуемся теперь известным неравенством

$$\left\|\int g(\eta)\,\varphi(\xi - \eta)\,d\eta\right\|_0 \leqslant \int |\varphi(\xi)|\,d\xi \cdot \|g\|_0. \tag{15.2}$$

Тогда, взяв в (9.2) r достаточно большим, из (14.2) получим

$$\|\mu_- \widetilde{A}u(\xi)\|_0 \leqslant C\|\widetilde{u}\|_{m,m}. \tag{16.2}$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\|\mu_+ \widetilde{B}u(\xi)\|_0 \leqslant C\|\widetilde{u}\|_{m,m}. \tag{17.2}$$

Подставляя (16.2) и (17.2) в (6.2), получаем (5.2). Теорема доказана.

§ 3. Факторизация символов a и b

Известно, что полиномы $a(x, \xi, q)$ и $b(x, \xi, q, p)$ могут быть профакторизованы по ξ_n

$$a(x, \xi, q) = a_+(x, \xi', \xi_n, q)\, a_-(x, \xi', \xi_n, q), \tag{1.3}$$

$$b(x, \xi, q, p) = b_+(x, \xi', \xi_n, q, p)\, b_-(x, \xi', \xi_n, q, p), \tag{2.3}$$

где a_+, b_+ (a_-, b_-) — аналитически продолжимы в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_n > 0$ ($\operatorname{Im} \xi_n < 0$) и однородны порядка m по ξ, q, p. Следуя работе [4], запишем a_+ в виде

$$a_+(x, \xi', \xi_n, q) = \sum_{k=0}^{m} a^+_{m-k}(x, \xi', q)\, \xi_n^k, \quad a_0^+ = 1. \tag{3.3}$$

Коэффициенты a^+_{m-k} могут быть определены из системы

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left(\oint_{\Gamma^+} \frac{\zeta_n^{j+k}\, d\zeta_n}{a(x, \xi', \zeta_n, q)} \right) a^+_{m-k}(x, \xi', q) = -\oint_{\Gamma^+} \frac{\zeta_n^{j+m}\, d\zeta_n}{a(x, \xi', \zeta_n, q)}, \tag{4.3}$$

$$(j = 0, 1, \cdots, m-1),$$

где Γ^+ — контур, охватывающий все корни полинома $a(x, \xi', \xi_n, q)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Im} \xi_n > 0$, а из условия эллиптичности следует, что

$$\Delta = \det \left\| \oint_{\Gamma^+} \frac{\zeta_n^{j+k}\, d\zeta_n}{a(x, \xi', \zeta_n, q)} \right\| \neq 0.$$

Отметим следующие важные свойства функции $a_+(x, \xi, q)$:

1) $a_+(x, \xi, q)$ — однородная степени m функция, удовлетворяющая условию эллиптичности

$$a_+(x, \xi, q) \neq 0 \text{ при } |\xi| + q \neq 0;$$

2) $a_+(x, \xi, q)$ представима в виде

$$a_+(x, \xi, q) = a_+(\infty, \xi, q) + a'_+(x, \xi, q),$$

где $a'_+(x, \xi, q) \in S_x$ $(a_+(\infty, \xi, q) \neq 0)$;

3) Дифференцирование по x не изменяет порядка однородности символа $a_+(x, \xi, q)$, т. е. для любого мультииндекса α

$$\operatorname{ord}\, [D^\alpha a_+(x, \xi, q)] = m;$$

4) Однократное дифференцирование по ξ снижает порядок однородности $a_+(x, \xi, q)$ на единицу, причем $\dfrac{\partial}{\partial \xi_l} a_+$ ограничена на единичной сфере $|\xi| + q = 1$

$$\operatorname{ord}\, [\partial^1_{\xi_l} a_+(x, \xi, q)] = m - 1 \quad \left(\partial^1_{\xi_l} = \frac{\partial}{\partial \xi_l} \right).$$

Для доказательства свойств 1)—4) достаточно разрешить систему (4.3) для какого-либо $a^{\mp}_{m-k}$ и затем проверить указанные свойства для одного из слагаемых суммы (3.3).

В дальнейшем нам понадобится рассмотрение символов вида $[a_+(x, \xi, q)]^{-1}$. Ясно, что такой символ может быть представлен в виде

$$\frac{1}{a_+(x, \xi, q)} = \frac{1}{a_+(\infty, \xi, q)} + \frac{a_+(\infty, \xi, q) - a_+(x, \xi, q)}{a_+(\infty, \xi, q)\, a_+(x, \xi, q)} = \frac{1}{a_+(\infty)} + k'_+,$$

где $k'_+ \in S_x$ и также является „плюсовой" в том смысле, что ее можно аналитически продолжить в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_n > 0$.

Все сказанное можно с небольшими видоизменениями отнести и к символам $a_-(x, \xi, q)$, $b_\pm(x, \xi, q, p)$.

§ 4. Представление решения задачи (7.1) в случае постоянного символа

Пусть символы a и b не зависят от x. Рассмотрим задачу

$$\theta^+ A(D, q)\, u(x) + \theta^- B(D, q, p)\, u(x) = f(x). \tag{1.4}$$

Сделаем в (1.4) преобразование Фурье. Тогда получим

$$\Pi^+ \tilde{A}(\xi, q)\, \tilde{u}(\xi) + \Pi^- \tilde{B}(\xi, q, p)\, \tilde{u}(\xi) = \tilde{f}(\xi). \tag{2.4}$$

Решением задачи (2.4), принадлежащим H_{2m} при фиксированных значениях q и p, является функция

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{1}{\tilde{A}_+(\xi, q)\, \tilde{B}_-(\xi, q, p)} \left[\Pi^+ \frac{\tilde{B}_-(\xi, q, p)}{\tilde{A}_-(\xi, q)} \tilde{f}(\xi) + \Pi^- \frac{\tilde{A}_+(\xi, q)}{\tilde{B}_+(\xi, q, p)} \tilde{f}(\xi) \right]. \tag{3.4}$$

Действительно

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{u}(\xi) = [\Pi^+ \tilde{A}(\xi, q) + \Pi^- \tilde{B}(\xi, q, p)] \left[\frac{1}{\tilde{A}_+ \tilde{B}_-} \left(\Pi^+ \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} + \Pi^- \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f} \right) \right] =$$

$$= \Pi^+ \frac{\tilde{A}_-}{\tilde{B}_-} \Pi^+ \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} + \Pi^+ \frac{\tilde{A}_-}{\tilde{B}_-} \Pi^- \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f} + \Pi^- \frac{\tilde{B}_+}{\tilde{A}_+} \Pi^+ \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} +$$

$$+ \Pi^- \frac{\tilde{B}_+}{\tilde{A}_+} \Pi^- \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f}.$$

Учитывая, что „минусовые" и „плюсовые" функции образуют алгебру по умножению и что $\Pi^\pm \varphi_\mp = 0$, а также, что $\Pi^\mp g_\pm \Pi^\mp f = \Pi^\mp g_\pm f$, получаем

$$\tilde{\mathbf{A}}\tilde{u}(\xi) = \Pi^+ \frac{\tilde{A}_-}{\tilde{B}_-} \frac{\tilde{B}_-}{\tilde{A}_-} \tilde{f} + \Pi^- \frac{\tilde{B}_+}{\tilde{A}_+} \frac{\tilde{A}_+}{\tilde{B}_+} \tilde{f} = \Pi^+ \tilde{f} + \Pi^- \tilde{f} = \tilde{f},$$

т. е. (3.4) есть решение задачи (1.4), причем это решение принадлежит пространству $H_{2m}(R^n)$.

§ 5. Определение псевдодифференциального оператора

В теории псевдодифференциальных операторов [2] оператор, построенный по символу $a(x, \xi)$, задается следующей формулой:

$$Au(x) = F^{-1}_{\xi\to x}\, a(x, \xi)\, \tilde{u}(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int e^{-ix\xi}\, a(x, \xi)\, \tilde{u}(\xi)\, d\xi. \qquad (1.5)$$

Если символ $a(x, \xi)$ допускает представление

$$a(x, \xi) = a(\infty, \xi) + a'(x, \xi),\ a'(x, \xi) \in S_x, \qquad (2.5)$$

то вместо (1.5) пользуются также формулой

$$\tilde{Au} \equiv \widetilde{Au} = a(\infty, \xi)\tilde{u}(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \tilde{a}'(\xi - \eta, \eta)\tilde{u}(\eta)\, q\eta, \qquad (3.5)$$

где $\tilde{a}'(\xi - \eta, \eta) = F_{x\to(\xi-\eta)}\, a'(x, \eta)$.

При построении доказательства разрешимости задачи (7.1) нам придется рассматривать операторы, построенные по символам вида

$$\frac{1}{a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p)},\ \frac{b_-(x, \xi, q, p)}{a_-(x, \xi, q)},\ \frac{a_+(x, \xi, q)}{b_+(x, \xi, q, p)} \text{ и т. п.}$$

Соответствующие этим символам операторы будем обозначать большими буквами, например,

$$\frac{1}{A_+ B_-}\, g(x) \equiv O_p\, \frac{1}{a_+ b_-}\, g(x)$$

обозначает оператор, построенный по символу $\dfrac{1}{a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p)}$.

Для композиции двух псевдодифференциальных операторов примем обозначение $A \circ B$.

Формулой композиции двух псевдодифференциальных операторов, как обычно, будем называть такую формулу:

$$A \circ B = AB + T, \qquad (4.5)$$

где оператор T имеет следующий вид:

$$T\tilde{g}(x) \equiv \tilde{T}g(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \Big[a(\infty, \xi) - a(\infty, \tau) \Big] \tilde{b}'(\xi - \tau, \tau)\, \tilde{g}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ (2\pi)^{-n} \iint \Big[\tilde{a}'(\xi - \eta, \eta) - \tilde{a}'(\xi - \eta, \tau) \Big] \tilde{b}'(\eta - \tau, \tau)\, \tilde{g}(\tau)\, d\tau d\eta. \qquad (5.5)$$

В нашем случае, когда все символы зависят от параметра, формула композиции принципиально ничем не отличается от (4.5).

Вывод формулы (4.5) приведен, например, в работах [2], [3].

§ 6. Формула правого регуляризатора задачи (7.1).

По аналогии с решением (3.4) задачи (1.4) запишем формулу правого регуляризатора задачи (7.1) в виде (см., например, [6])

$$\mathbf{R}f = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-} f + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+} f. \tag{1.6}$$

Формулы композиции, в соответствии с (4.5), имеют вид

$$A \circ \frac{1}{A_+ B_-} = \frac{A_-}{B_-} + T_A, \tag{2.6}$$

$$B \circ \frac{1}{A_+ B_-} = \frac{B_+}{A_+} + T_B, \tag{3.6}$$

$$\frac{A_-}{B_-} \circ \frac{B_-}{A_-} = E + T_-^{(1)}, \tag{4.6}$$

$$\frac{B_+}{A_+} \circ \frac{A_+}{B_+} = E + T_+^{(1)}, \tag{5.6}$$

E—единичный оператор.

Найдем выражение $\mathbf{AR}f$, где $\mathbf{A}$ обозначает оператор $\theta^+ A + \theta^- B$. Учитывая (2.6)—(5.6), получим

$$\mathbf{AR}f = f + Tf, \tag{6.6}$$

где $T = T_1 + T_2 + T_3$,

$$T_1 f = \theta^+ T_-^{(1)} f + \theta^- T_+^{(1)} f, \tag{7.6}$$

$$T_2 f = \theta^+ T_A g_+ + \theta^- T_B g_+, \quad g_+(x) = \theta^+ \frac{B_-}{A_-} f(x), \tag{8.6}$$

$$T_3 f = \theta^+ T_A g_- + \theta^- T_B g_-, \quad g_-(x) = \theta^- \frac{A_+}{B_+} f(x). \tag{9.6}$$

Лемма 1.6. *Для оператора T, действующего в пространстве $\mathbf{H}^p$, при условии $0 < q < p$ справедлива оценка*

$$\|Tf\| \leqslant \frac{C}{q}\|f\|, \tag{10.6}$$

где константа C не зависит от f, q и p.

Доказательство леммы 1.6 мы приведем в § 8.

Следствие 1.6. Оператор T при достаточно больших q имеет малую норму.

Следствие 2.6. Оператор $E + T$ обратим в $\mathbf{H}^p$, а обратный к нему оператор ограничен.

Из следствия 2.6 вытекает следующая

Теорема 1.6. *Для любой функции $f \in \mathbf{H}^p$ при достаточно большом q_0 ($q > q_0$, $p > q$) существует решение задачи* (7.1), *имеющее вид*

$$u(x) = \mathbf{R}(E + T)^{-1} f \in \mathbf{H}_{m,\, m}.$$

В самом деле

$$\mathbf{A}u = \mathbf{AR}\,(E+T)^{-1} f = (E+T)\,(E+T)^{-1} f = f.$$

Принадлежность функции f пространству $\mathbf{H}_{m,\,m}$ следует из леммы 2.9, доказанной ниже.

§ 7. Оценки символов

В этом параграфе мы приведем некоторые оценки символов, необходимые для доказательства леммы 1.6 и теоремы единственности.

Введем ряд обозначений. Во-первых, как и раньше, будем писать

$$a_{\pm}(x, \xi, q) = a_{\pm}(\infty, \xi, q) + a'_{\pm}(x, \xi, q), \tag{1.7}$$

$$b_{\pm}(x, \xi, q, p) = b_{\pm}(\infty, \xi, q, p) + b'_{\pm}(x, \xi, q, p). \tag{2.7}$$

Далее обозначим

$$\frac{1}{a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p)} = k(\infty, \xi, q, p) + k'(x, \xi, q, p), \tag{3.7}$$

$$\frac{a_-(x, \xi, q)}{b_-(x, \xi, q, p)} = k_-(\infty, \xi, q, p) + k'_-(x, \xi, q, p), \tag{4.7}$$

$$\frac{b_+(x, \xi, q, p)}{a_+(x, \xi, q)} = k_+(\infty, \xi, q, p) + k'_+(x, \xi, q, p), \tag{5.7}$$

$$\frac{b_-(x, \xi, q, p)}{a_-(x, \xi, q)} = l_-(\infty, \xi, q, p) + l'_-(x, \xi, q, p), \tag{6.7}$$

$$\frac{a_+(x, \xi, q)}{b_+(x, \xi, q, p)} = l_+(\infty, \xi, q, p) + l'_+(x, \xi, q, p), \tag{7.7}$$

$$a_+(x, \xi, q)\, b_-(x, \xi, q, p) \equiv b_-(x, \xi, q, p)\, a_+(x, \xi, q) = \\ = h(\infty, \xi, q, p) + h'(x, \xi, q, p). \tag{8.7}$$

В силу свойства 2) (§ 5) и аналогичных свойств символов $a_-(x, \xi, q)$, $b_{\pm}(x, \xi, q, p)$ мы можем утверждать, что все штрихованные символы формул (1.7)—(8.7) принадлежат классу S_x равномерно относительно ξ, $q + p + |\xi| = 1$. Отметим сначала следующие очевидные неравенства:

$$c\,(q + |\xi|)^m \leqslant |(1+|x|)^s a'_{\pm}(x, \xi, q)| \leqslant C_s\,(q + |\xi|)^m, \tag{9.7}$$

$$c\,(q + p + |\xi|)^m \leqslant |(1+|x|)^s b'_{\pm}(x, \xi, q, p)| \leqslant C_s\,(q + p + |\xi|)^m. \tag{10.7}$$

Далее справедливы следующие оценки:

$$|\overline{k}'(\eta - \tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{1}{(q + |\tau|)^m\,(q + p + |\tau|)^m\,(1 + |\eta - \tau|)^r}, \tag{11.7}$$

$$|\overline{l}'_-(\eta - \tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q + p + |\tau|)^m}{(q + |\tau|)^m\,(1 + |\eta - \tau|)^r}, \tag{12.7}$$

$$|\overline{l}'_+(\eta - \tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q + |\tau|)^m}{(q + p + |\tau|)^m\,(1 + |\eta - \tau|)^r}, \tag{13.7}$$

$$|\tilde{h}'(\eta-\tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^m (q+p+|\tau|)^m}{(1+|\eta-\tau|)^r}, \tag{14.7}$$

$$|\tilde{a}'(\eta-\tau, \tau, q)| \leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^{2m}}{(1+|\eta-\tau|)^r}, \tag{15.7}$$

$$|\tilde{b}'(\eta-\tau, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q+p+|\tau|)^{2m}}{(1+|\eta-\tau|)^r}. \tag{16.7}$$

Отметим еще такие оценки

$$|a(\infty, \xi, q) - a(\infty, \tau, q)| \leqslant C\,[(q+|\xi|)^{2m-1} + (q+|\tau|)^{2m-1}]\,|\xi-\tau|, \tag{17.7}$$

$$|\tilde{a}'(\xi-\eta, \eta, q) - \tilde{a}'(\xi-\eta, \tau, q)| \leqslant C_r \frac{[(q+|\eta|)^{2m-1} + (q+|\tau|)^{2m-1}]\,|\eta-\tau|}{(1+|\xi-\eta|)^r}, \tag{18.7}$$

$$|b(\infty, \xi, q, p) - b(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C[(q+p+|\xi|)^{2m-1} + (q+p+|\tau|)^{2m-1}]|\xi-\tau|, \tag{19.7}$$

$$|\tilde{b}'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{b}'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$
$$\leqslant C_r \frac{[(q+p+|\eta|)^{2m-1} + (q+p+|\tau|)^{2m-1}]\,|\eta-\tau|}{(1+|\xi-\eta|)^r}, \tag{20.7}$$

$$|\tilde{k}'_-(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{k}'_-(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$
$$\leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} \frac{(1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{21.7}$$

$$|k_-(\infty, \xi, q, p) - k_-(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\xi-\tau|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} |\xi-\tau|, \tag{22.7}$$

$$|\tilde{k}'_+(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{k}'_+(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant C_r \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}(1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{23.7}$$

$$|k_+(\infty, \xi, q, p) - k_+(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\xi-\tau|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}} |\xi-\tau|, \tag{24.7}$$

$$|\tilde{l}'_-(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{l}'_-(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$
$$\leqslant C_r \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}(1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{25.7}$$

$$|l_-(\infty, \xi, q, p) - l_-(\infty, \tau, q, p)| \leqslant$$
$$\leqslant C \frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\tau-\xi|)^{2m-1}}{(q+|\tau|)^{m+1}} |\tau-\xi|, \tag{26.7}$$

$$|\tilde{l}'_+(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{l}'_+(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$
$$\leqslant C_r \frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\eta-\tau|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m (1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{27.7}$$

$$|l_+(\infty, \xi, q, p) - l_+(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\xi-\tau|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} |\xi-\tau|, \tag{28.7}$$

$$|\tilde{k}'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{k}'(\xi-\eta, \tau, q, p)| \leqslant$$
$$\leqslant C_r \frac{(1+|\eta-\tau|)^{2m}}{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m+1}(1+|\xi-\eta|)^r} |\eta-\tau|, \tag{29.7}$$

$$|k(\infty, \xi, q, p) - k(\infty, \tau, q, p)| \leqslant C \frac{(1+|\xi-\tau|)^{2m}}{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m+1}} |\xi-\tau|. \tag{30.7}$$

Некоторые из этих оценок мы докажем в дополнении, а остальные будут иметь аналогичные доказательства, либо вообще тривиальны.

Замечание. При доказательстве оценок (11.7)—(30.7) мы использовали полиномиальную специфику рассматриваемой задачи. Если же потребовать выполнение указанных оценок, то можно считать операторы A и B псевдодифференциальными, записав задачу в виде

$$\theta^+ Au + \theta^- Bu = f(x).$$

§ 8. Доказательство леммы 1.6

Лемма 1.8. *Пусть* $T_+^{(1)}$ *и* $T_-^{(1)}$ — *операторы, определенные в* (4.6) и (5.6). *Тогда для любого* $f \in H^\mu$ *выполнимы следующие оценки:*

$$\|\Pi^\pm \mu_\mp \tilde{T}_\pm^{(1)} f\|_0 \leqslant \frac{C}{q} \|f\|, \tag{1.8}$$

Доказательство. Пусть в (4.5) $A = \frac{A_-}{B_-}$, $B = \frac{B_-}{A_-}$. Тогда в силу (5.5) оператор $T_-^{(1)}$ имеет вид

$$\tilde{T}_-^{(1)} f = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int \left[k_-(\infty, \xi, q, p) - k_-(\infty, \tau, q, p) \right] \tilde{l}'_-(\xi-\tau, \tau, q, p) \tilde{f}(\tau)\, d\tau +$$
$$+ (2\pi)^{-n} \int\int \left[\tilde{k}'_-(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{k}'_-(\xi-\eta, \tau, q, p) \right] \times$$
$$\times \tilde{l}'_-(\eta-\tau, \tau, q, p)\, \tilde{f}(\tau)\, d\eta\, d\tau. \tag{2.8}$$

Рассмотрим выражение

$$\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} f = \Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} \frac{1}{\mu_-} \cdot \mu_- f. \tag{3.8}$$

Используя разложение $\mu_- \tilde{f} = \Pi^+ \mu_- \tilde{f} + \Pi^- \mu_- \tilde{f}$, получим

$$\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} f = \Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} \frac{1}{\mu_-} \Pi^+ \mu_- \tilde{f}. \tag{4.8}$$

Так как оператор Π^+ ограничен в H_0 из (3.8) следует

$$\|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_-^{(1)} f\|_0 \leqslant \|\mu_-(\xi, q, p)\ \bar{T}_-^{(1)} \frac{1}{\mu_-} \Pi^+ \mu_- \bar{f}\|_0. \tag{5.8}$$

Учитывая (2.8), получаем

$$\|\Pi^+ \mu_- \bar{T}_-^{(1)} f\|_0 \leqslant \|\mu_-(\xi, q, p) \int \Big[k_-(\infty, \xi, q, p) - k_-(\infty, \tau, q, p) \Big] \bar{l}'_-(\xi - \tau, \tau, q, p) \times$$
$$\times \frac{1}{\mu_-} (\Pi^+ \mu_- \tilde{f})\, d\tau\|_0 + \|\mu_- \int\int \Big[\bar{k}'_-(\xi - \eta, \eta, q, p) - \bar{k}'_-(\xi - \eta, \tau, q, p) \Big] \times$$
$$\times \bar{l}'_-(\eta - \tau, \tau, q, p) \frac{1}{\mu_-(\tau, q, p)} (\Pi^+ \mu_- \bar{f})\, d\eta\, d\tau\|_0 = N_1 + N_2. \tag{6.8}$$

Оценим норму N_1. Учитывая неравенства (12.2), (13.2), мы можем написать

$$|\mu_-(\xi)| \leqslant C \frac{(q + p + |\xi|)^m}{(q + |\xi|)^m} \leqslant C \frac{(q + p + |\tau|)^m}{(q + |\tau|)^m} (1 + |\xi - \tau|)^{2m}. \tag{7.8}$$

Следовательно, в силу неравенств (22.7) и (12.7) имеем

$$N_1 \leqslant \|\int \frac{1}{(q + |\tau|)} \frac{1}{(1 + |\xi - \tau|)^{r - 4m}} |\Pi^+ \mu_- f(\tau)| d\tau\|_0. \tag{8.8}$$

Если теперь взять в формуле (12.7) r достаточно большим и воспользоваться неравенством (15.2), то из (8.8) следует

$$N_1 \leqslant \frac{C}{q} \|\Pi^+ \mu_- \bar{f}(\xi)\|_0 \leqslant \frac{C}{q} |||f|||. \tag{9.8}$$

Теперь оценим N_2

$$N_2 \leqslant \Big\| \int \frac{\mu_-(\xi, q, p)}{\mu_-(\tau, q, p)} \Pi^+ \mu_-(\tau, q, p)\, \bar{f}(\tau)\, d\tau \int \Big[\bar{k}'_-(\xi - \eta, \eta, q, p) -$$
$$- \bar{k}'_-(\xi - \eta, \tau, q, p) \Big] \bar{l}'_-(\eta - \tau, \tau, q, p)\, d\eta \Big\|.$$

Оценивая внутренний интеграл с помощью неравенств (21.7) и (12.7), получаем

$$N_2 \leqslant \frac{C}{q} \Big\| \int \Big\{ \Big| \frac{\mu_-(\xi)}{\mu_-(\tau)} \Big| \cdot |\Pi^+ \mu_-(\tau) \tilde{f}(\tau)| \int \frac{d\eta}{(1 + |\xi - \eta|)^{r_1} (1 + |\eta - \tau|)^{r_1}} \Big\} d\eta \Big\|_0 \tag{10.8}$$
$$(r_1 = r - 2m).$$

Воспользуемся известным неравенством

$$\int \frac{d\eta}{(1 + |\xi - \eta|)^{r_1} (1 + |\eta - \tau|)^{r_1}} \leqslant \frac{C}{(1 + |\xi - \tau|)^{r_1}}. \tag{11.8}$$

Оценивая $\mu_-(\xi)$ по (7.8), получим

$$N_2 \leqslant \frac{C}{q} \Big\| \int \frac{1}{(1 + |\xi - \tau|)^{r_1 - 2m}} |\Pi^+ \mu_-(\tau) \bar{f}(\tau)| d\tau \Big\|_0 \leqslant \frac{C}{q} \|\Pi^+ \mu_- \bar{f}\|_0 \leqslant \frac{C}{q} |||f|||. \tag{12.8}$$

Из (9.8) и (12.8) следует первая из формул (1.8).

Вторая из формул (1.8) доказывается аналогично. Лемма 1.8 доказана.

Лемма 2.8. *Имеют место следующие оценки:*

$$\left\|\Pi^+\left(\frac{\tilde{B}_-}{A_-}\right)f\right\|_0 \leqslant C\|\Pi^+\mu_-\tilde{f}\|_0, \tag{13.8}$$

$$\left\|\Pi^-\left(\frac{\tilde{A}_+}{B_+}\right)f\right\|_0 \leqslant C\|\Pi^-\mu_+\tilde{f}\|_0. \tag{14.8}$$

Доказательство. В силу определения псевдодифференциального оператора, принимая во внимание обозначение (6.7), запишем

$$\left\|\Pi^+\frac{\tilde{B}_-}{A_-}f\right\|_0 = \left\|\Pi^+\int\tilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\tilde{f}(\eta)\,d\eta + \Pi^+ l_-(\infty,\xi,q,p)\tilde{f}(\xi)\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\Pi^+\int\tilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\tilde{f}(\eta)\,d\eta\right\|_0 + \|\Pi^+ l_-(\infty,\xi,q,p)\tilde{f}(\xi)\|_0.$$

Далее поступаем, как в лемме 1.8, учитывая (13.7)

$$\left\|\Pi^+\int\tilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\tilde{f}(\eta)\,d\eta\right\|_0 = \left\|\Pi^+\int\tilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\frac{1}{\mu_-(\eta)}\Pi^+\mu_-(\eta)\times\right.$$

$$\left.\times\tilde{f}(\eta)\,d\eta\right\|_0 \leqslant \left\|\int\left|\tilde{l}'_-(\xi-\eta,\eta,q,p)\frac{1}{|\mu_-(\eta)|}\right|\left|\Pi^+\mu_-\tilde{f}\right|d\eta\right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C\left\|\int\frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^r}\left|\Pi^+\mu_-\tilde{f}\right|d\eta\right\|_0 \leqslant \left\|\Pi^+\mu_-\tilde{f}\right\|_0.$$

Неравенство (14.8) доказывается аналогично. Надо только вместо (13.7) использовать неравенство типа (12.7). Лемма 2.8 доказана.

Лемма 3.8. *Пусть операторы T_A и T_B определены формулами* (2.6) *и* (3.6). *Тогда для любой функции $g\in H_0$ выполнимы оценки*

$$\|\mu_-\tilde{T}_A g\|_0 \leqslant \frac{C}{q}\|g\|_0, \tag{15.8}$$

$$\|\mu_+\tilde{T}_B g\|_0 \leqslant \frac{C}{q}\|g\|_0. \tag{16.8}$$

Докажем неравенство (15.8). Полагая в (4.5) $A=A$, $B=\dfrac{1}{A_+B_-}$, запишем (5.5) в виде

$$\tilde{T}_A g = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int a(\infty,\xi,q)-a(\infty,\tau,q)]\tilde{k}'(\xi-\tau,\tau,q,p)\,\tilde{g}(\tau)\,d\tau +$$

$$+(2\pi)^{-n}\iint[\tilde{a}'(\xi-\eta,\eta,q)-\tilde{a}'(\xi-\eta,\tau,q)]\tilde{k}'(\eta-\tau,\tau,q,p)\,\tilde{g}(\tau)\,d\eta\,d\tau.$$

Отсюда легко получается следующая оценка (если применить неравенства (17.7), (18.7) и (11.7)):

$$|\tilde{T}_A \tilde{g}| \leqslant \int \frac{(q+|\tau|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{\gamma_1}} \tilde{g}(\tau)\, d\tau. \tag{17.8}$$

Поступая далее как при доказательстве леммы 1.8, получим

$$\|\mu_- \tilde{T}_A g\|_0 \leqslant \left\| \frac{(q+p+|\xi|)^m}{(q+|\xi|)^m} \int \frac{(q+|\tau|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{\gamma_1}} \tilde{g}(\tau)\, d\tau \right\|_0 \leqslant \frac{C}{q} \|g\|_0.$$

Для доказательства (16.8) надо записать (5.5) применительно к операторам B и $\dfrac{1}{A_+ B_-}$ и воспользоваться оценками (19.7), (20.7), (11.7), а также учесть, что $q < p$.

Перейдем теперь к доказательству леммы 1.6. Напомним, что нам надо доказать неравенство

$$|||Tf||| \leqslant \frac{C}{q} |||f|||.$$

По определению оператора T имеем

$$|||Tf||| = \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T} f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T} f\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_1 f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_2 f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_3 f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_1 f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_2 f\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_3 f\|_0 = \|\Pi^+ \mu_- \Pi^+ \tilde{T}_-^{(1)} f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \Pi^+ \tilde{T}_A g_+\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \Pi^+ \tilde{T}_A g_-\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \Pi^- \tilde{T}_+^{(1)} f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \Pi^- \tilde{T}_B g_+\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \Pi^- T_B g_-\|_0 =$$

$$= \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} f\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_A g_+\|_0 + \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_A g_-\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_+^{(1)} f\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_B g_+\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_B g_-\|_0 \leqslant \|\Pi^+ \mu_- \tilde{T}_-^{(1)} f\|_0 +$$

$$+ \|\Pi^- \mu_+ \tilde{T}_+^{(1)} f\|_0 + \|\mu_- \tilde{T}_A g_+\|_0 + \|\mu_+ \tilde{T}_B g_+\|_0 + \|\mu_- \tilde{T}_A g_-\|_0 + \|\mu_+ \tilde{T}_B g_-\|_0.$$

Применяя теперь к первым двум слагаемым неравенство леммы 1.8, а к остальным—неравенства леммы 3.8, получим

$$|||Tf||| \leqslant \frac{C}{q} |||f||| + \frac{C}{q} \|\tilde{g}_+\|_0 + \frac{C}{q} \|\tilde{g}_-\|_0 = \frac{C}{q} \left(|||f||| + \|\Pi^+ \frac{\tilde{B}_-}{A_-} f\|_0 + \|\Pi^- \frac{\tilde{A}_+}{B_+} f\|_0 \right).$$

Наконец использование леммы 2.8 дает

$$|||Tf||| \leqslant \frac{C}{q} (|||f||| + \|\Pi^+ \mu_- f\|_0 + \|\Pi^- \mu_+ f\|_0) = \frac{C}{q} |||f|||.$$

§ 9. Левый регуляризатор и априорная оценка

В этом параграфе мы докажем, что левый регуляризатор задачи (1.7) совпадает с правым, т. е., что если положить R таким же, как в формуле (1.6), то

$$\mathbf{RA}u = u + T'u, \tag{1.9}$$

где оператор T' имеет малую норму в пространстве $\mathbf{H}_{m,\,m}$ при большом значении параметра q.

Пусть попрежнему

$$\mathbf{A}u = \theta^+ Au + \theta^- Bu, \tag{2.9}$$

$$\mathbf{RA}u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-}\mathbf{A}u + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+}\mathbf{A}u. \tag{3.9}$$

Запишем следующие формулы композиции:

$$\frac{B_-}{A_-} \circ A = B_- A_+ + T_1', \tag{4.9}$$

$$\frac{A_+}{B_+} \circ B = A_+ B_- + T_2', \tag{5.9}$$

$$\frac{1}{A_+ B_-} \circ A_+ B_- = E + T_3'. \tag{6.9}$$

Здесь $B_- A_+$ — оператор, построенный по символу $b_- a_+$, а $A_+ B_-$ — построен по символу $a_+ b_- = b_- a_+$. Следовательно, $A_+ B_- = B_- A_+$. Учитывая это, подставим (2.9) в (3.9).

$$\mathbf{RA}u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-}\theta^+ Au + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-}\theta^- Bu +$$

$$+ \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+}\theta^+ Au + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+}\theta^- Bu =$$

$$= \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ \frac{B_-}{A_-} \circ Au + \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- \frac{A_+}{B_+} \circ Bu =$$

$$= \frac{1}{A_+ B_-}\{\theta^+ B_- A_+ u + \theta^+ T_1' u + \theta^- A_+ B_- u + \theta^- T_2' u\} =$$

$$= \frac{1}{A_+ B_-}\{A_+ B_- u + \theta^+ T_1' u + \theta^- T_2' u\} = u + T_3' u + T_1' u + T_2' u = u + T' u,$$

где

$$T' = T_1' = T_2' + T_3', \tag{7.9}$$

$$T_1' u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^+ T_1' u, \quad T_2' u = \frac{1}{A_+ B_-}\theta^- T_2' u, \quad T_3' = T_3'. \tag{8.9}$$

Лемма 1.9. *Оператор T' является сглаживающим в пространстве $H_{m,\,m}$, именно*

$$\|T' u\|_{m,\,m} \leqslant C\,\|u\|_{m,\,m-1}. \tag{9.9}$$

Константа C от q, p, u не зависит.

Доказательство. Оценим каждый оператор из суммы (7.9) в отдельности.

1) Оператор T_1'. Применяя оператор $\dfrac{1}{A_+ B_-}$ с символом k, получаем

$$\|T_1' u\|_{m,m} \leqslant C\left(\|k(\infty, \xi, q, p)\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_{m,m} + \right.$$
$$\left. + \left\|\int k'(\xi-\eta, \eta, q, p)\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u(\eta)\,d\eta\right\|_{m,m}\right).$$

Если теперь воспользоваться оценками (11.7) и аналогичной оценкой для $k(\infty, \xi, q, p)$, то

$$\|T_1' u\|_{m,m} \leqslant C\|(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^m \frac{1}{(q+|\xi|)^m (q+p+|\xi|)^m}\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_0 +$$
$$+ C\left\|\int \frac{(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^m}{(q+|\eta|)^m (q+p+|\eta|)^m} \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^r}\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u(\eta)\,d\eta\right\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant C\|\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_0 + C\left\|\int \frac{1}{(1+|\xi-\eta|)^{r_1}}\,\Pi^+ \widetilde{T}_1' u(\eta)\,d\eta\right\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant C\|\Pi^+ \widetilde{T}_1' u\|_0 \leqslant C\|\widetilde{T}_1' u\|_0.$$

Таким образом

$$\|T_1' u\|_{m,m} \leqslant C\|\widetilde{T}_1' u\|_0. \tag{10.9}$$

Оценим норму $\|\widetilde{T}_1' u\|_0$. Положим в (5.5) $A = \frac{B_-}{A_-}$, $B = A$, тогда

$$\widetilde{T}_1' u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int [l_-(\infty, \xi, q, p) - l_-(\infty, \tau, q, p)]\,\widetilde{a}'(\xi-\tau, \tau, q)\,\widetilde{u}(\tau)\,d\tau +$$
$$+ (2\pi)^{-n} \iint [\widetilde{l}_-'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \widetilde{l}_-'(\xi-\eta, \tau, q, p)] \times$$
$$\times \widetilde{a}'(\eta-\tau, \tau, q)\,\widetilde{u}(\tau)\,d\eta d\tau. \tag{11.9}$$

В силу оценок (25.7) и (15.7) ядро I_2 второго интеграла мажорируется следующим образом:

$$|I_2| \leqslant C \int \frac{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{2m} (1+|\tau-\xi|)^{2m}}{(q+|\tau|)^{m+1} (1+|\xi-\eta|)^r (1+|\eta-\tau|)^r}\,d\eta \leqslant$$
$$\leqslant C\,\frac{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}}. \tag{12.9}$$

А для подынтегрального выражения I_1 первого интеграла по (26.7) и (15.7) имеем

$$|I_1| \leqslant C\,\frac{(q+p+|\tau|)^m (1+|\xi-\tau|)^{2m}}{(q+|\tau|)^{m+1} (1+|\xi-\tau|)^r} (q+|\tau|)^{2m} \leqslant$$
$$\leqslant C\,\frac{(q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m-1}}{(1+|\tau-\xi|)^{r_1}}. \tag{13.9}$$

Следовательно

$$|\widetilde{T}_1' u| \leqslant C \int (q+p+|\tau|)^m (q+|\tau|)^{m-1} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}}\,\widetilde{u}(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда в силу неравенства (15.2)

$$\|\tilde{T}_1' u\|_0 \leqslant C\|(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^{m-1}\tilde{u}\|_0 \equiv C\|u\|_{m,m-1}. \qquad (14.9)$$

Подставляя (14.9) в (10.9), получаем

$$\|T_1' u\|_{m,m} \leqslant C\|u\|_{m-m,1}. \qquad (15.9)$$

2) Точно так же, как и в 1)

$$|\tilde{T}_2' u| \leqslant C \int (q+|\tau|)^{m-1} (q+p+|\tau|)^m \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}} \tilde{u}(\tau)\, d\tau, \qquad (16.9)$$

откуда

$$\|\tilde{T}_2' u\|_0 \leqslant C\|(q+|\xi|)^{m-1} (q+p+|\xi|)^m \tilde{u}\|_0 \equiv C\|u\|_{m,m-1}. \qquad (17.9)$$

Далее как в 1)

$$\|T_2' u\|_{m,m} \leqslant C\|\tilde{T}_2' u\|_0 \leqslant C\|u\|_{m,m-1}. \qquad (18.9)$$

3) Положим в (5.5) $A = \dfrac{1}{A_+B_-}$, $B = A_+B_-$, тогда

$$T_3' u = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int [k(\infty, \xi, q, p) - k(\infty, \tau, q, p)]\, \tilde{h}'(\xi-\tau, \tau, q, p)\, \tilde{u}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ (2\pi)^{-n} \int\int [\tilde{k}'(\xi-\eta, \eta, q, p) - \tilde{k}'(\xi-\eta, \tau, q, p)]\, \tilde{h}'(\xi-\tau, \tau, q, p)\, \tilde{u}(\tau)\, d\eta\, d\tau. \qquad (19.9)$$

После применения оценок (29.7), (30.7) и (14.7) получаем

$$|\tilde{T}_3' u| \leqslant C \int \frac{1}{(q+|\tau|)} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}} \tilde{u}(\tau)\, d\tau, \qquad (20.9)$$

откуда

$$\|T_3' u\|_{m,m} \leqslant C \left\| (|\xi|+q)^m (q+p+|\xi|)^m \int \frac{1}{(q+|\tau|)} \frac{1}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}} \tilde{u}(\tau)\, d\tau \right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C \left\| \int \frac{(q+|\tau|)^{m-1} (q+p+|\tau|)^m}{(1+|\xi-\tau|)^{r_1}} \tilde{u}(\tau)\, d\tau \right\|_0 \leqslant C\|(q+p+|\xi|)^m (q+|\xi|)^{m-1} \times$$

$$\times \tilde{u}(\xi)\|_0 = C\|u\|_{m,m-1}. \qquad (21.9)$$

Таким образом

$$\|T_3' u\|_{m,m} \leqslant C\|u\|_{m,m-1}. \qquad (22.9)$$

Складывая (15.9), (18.9) и (22.9), получаем (9.9). Лемма 1.9 доказана.

Следствие 1.9. Из неравенства (9.9) следует, что при $q < p$ справедлива оценка

$$\|T' u\|_{m,m} \leqslant \frac{C}{q} \|u\|_{m,m}. \qquad (23.9)$$

Следовательно, если взять q достаточно большим, то оператор T' имеет малую норму.

Лемма 2.9. *Оператор* $\mathbf{R}$ *ограничен из* $\mathbf{H}^{\mu}$ *в* $\mathbf{H}_{m,m}$, *т.е.*

$$\|Rf\|_{m,m} \leqslant C\|f\|, \quad f \in \mathbf{H}^{\mu}. \qquad (24.9)$$

Доказательство. Используя обозначения формул (8.6), (9.6), напишем

$$\mathrm{R}f = \frac{1}{A_+B_-}\theta^+\frac{B_-}{A_-}f + \frac{1}{A_+B_-}\theta^-\frac{A_+}{B_+}f = \frac{1}{A_+B_-}g_+ + \frac{1}{A_+B_-}g_-. \tag{25.9}$$

Оценим по норме выражение

$$\frac{1}{A_+B_-}g_+ = k(\infty, \xi, q, p)\,\tilde{g}_+(\xi, q, p) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int \tilde{k}'(\xi-\eta, \eta, q, p)\,\tilde{q}_+ \times$$
$$\times g_+(\eta, q, p)\,d\eta, \tag{26.9}$$

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_+\right\|_{m,\,m} \leqslant \|(q+|\xi|)^m(q+p+|\xi|)^m k(\infty, \xi, q, p)\,\tilde{g}_+(\xi, q, p)\|_0 +$$
$$+ C\left\|\int (q+|\eta|)^m(q+p+|\eta|)^m(1+|\xi-\eta|)^{2m}\tilde{k}'(\xi-\eta, \eta, q, p)\,\tilde{g}_+(\eta, q, p)\,d\eta\right\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant C\|\tilde{g}_+(\xi, q, p)\|_0 = C\left\|\Pi^+\frac{\tilde{B}_-}{A_-}f\right\|_0. \tag{27.9}$$

Отсюда по лемме 2.8 имеем

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_+\right\|_{m,\,m} \leqslant C\|f\|. \tag{28.9}$$

Аналогично доказывается

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_-\right\|_{m,\,m} \leqslant C\|\tilde{g}_-\|_0 = C\left\|\Pi^-\frac{\tilde{A}_+}{B_+}f\right\|_0, \tag{29.9}$$

откуда в силу леммы 2.8

$$\left\|\frac{1}{A_+B_-}g_-\right\|_{m,\,m} \leqslant C\|f\|. \tag{30.9}$$

Из (28.9) и (30.9) следует (31.9). Лемма 2.9 доказана.

Теорема 1.9 (*об априорной оценке*). *Пусть оператор* **A** *удовлетворяет условиям* § 1. *Тогда имеет место оценка*

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant C\|\mathbf{A}u\| \quad (q_0 < q < p). \tag{31.9}$$

Доказательство. Так как из формулы (1.9) следует, что

$$u = \mathbf{RA}u - T'u, \tag{32.9}$$

то

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant \|\mathbf{RA}u\|_{m,\,m} + \|T'u\|_{m,\,m}. \tag{33.9}$$

Оценив первое слагаемое с помощью леммы 2.9, а второе — с помощью следствия 1.9, получим

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant C\|\mathbf{A}u\| + \frac{C}{q}\|u\|_{m,\,m}, \tag{34.9}$$

q выбрано таким, что $\frac{C}{q} < 1$, следовательно

$$\|u\|_{m,\,m} \leqslant C\|\mathbf{A}u\|.$$

Теорема доказана.

Следствие 2.9. Задача (7.1) имеет единственное решение для любой функции $f \in \mathbf{H}^{\mu}$.

Объединим результат теорем 1.6 и 1.9 в следующее утверждение.

Основная теорема. *Пусть* $\mathbf{A}$—*оператор, определенный по формуле*

$$\mathbf{A}u = \theta^{+} Au + \theta^{-} Bu,$$

где A *и* B—*эллиптические дифференциальные операторы, определенные формулами* (3.1) *и* (6.1). *Тогда для любой функции* $f \in \mathbf{H}^{\mu}$ *существует единственное решение* $u \in \mathbf{H}_{m,\,m}$ *задачи*

$$\mathbf{A}u = f \quad \text{при} \quad q_0 < q < p.$$

Замечание. Можно считать, что функции f и u принадлежат, соответственно, H_0 и H_{2m} с требованием выполнения ограниченности функций f и u в нормах, соответствующих пространствам $\mathbf{H}^{\mu}$, $\mathbf{H}_{m,\,m}$.

§ 10. Дальнейшие замечания

1°. До сих пор мы считали, что символы операторов A, B суть однородные функции. Это ограничение легко снимается. В самом деле, пусть

$$A^{(1)} u = \sum_{|\alpha|+\beta < 2m} a_{\alpha\beta}(x) q^{\beta} D^{\alpha} u,$$

$$B^{(1)} u = \sum_{|\alpha|+\beta+\gamma < 2m} b_{\alpha\beta\gamma} q^{\beta} p^{\gamma} D^{\alpha} u.$$

Обозначим старшие части этих операторов через A, B. Будем считать, что они попрежнему удовлетворяют условиям § 1. Представим оператор $\mathbf{A}^{(1)} = \theta^{+} A^{(1)} + \theta^{-} B^{(1)}$ в виде

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{(2)}.$$

$\mathbf{A}^{(2)}$ содержит лишь младшие слагаемые операторов $A^{(1)}$ и $B^{(1)}$. Соответствующие части этих операторов обозначим через $A^{(2)}$ и $B^{(2)}$.

1) ограниченность $\mathbf{A}^{(1)}$. Для оператора $\mathbf{A}^{(1)}$ справедливо утверждение теоремы 1.2.

В самом деле

$$\|\mathbf{A}^{(1)} u\| \leqslant \|\mathbf{A}u\| + \|\mathbf{A}^{(2)} u\|. \tag{1.10}$$

С другой стороны

$$\|\mathbf{A}^{(2)} u\| \leqslant \|\mu_{-} \tilde{\mathbf{A}}^{(2)} u\|_0 + \|\mu_{+} \tilde{B}^{(2)} u\|_0 \leqslant \tag{2.10}$$

$$\leqslant \frac{C}{q} \left\| \frac{(q+p+|\xi|)^m}{(q+|\xi|)^m} (q+|\xi|)^{2m} \tilde{u} \right\|_0 + \frac{C}{q} \left\| \frac{(q+|\xi|)^m}{(q+p+|\xi|)^m} (q+p+|\xi|)^{2m} \tilde{u} \right\|_0 \leqslant$$

$$\leqslant C/q \, \|u\|_{m,\,m}.$$

Учитывая (2.10) и теорему 1.2, получим нужный результат.

2) Правый и левый регуляризаторы. Оператор $\mathbf{R}$, определенный по формуле (1.6), является правым и левым регуляризатором для $\mathbf{A}^{(1)}$.

Действительно

$$\mathbf{AR}f = \mathbf{A}^{(1)}\mathbf{R}f + \mathbf{A}^{(2)}Rf = f + Tf + \mathbf{A}^{(2)}\mathbf{R}f. \tag{3.10}$$

С помощью (2.10) и леммы 2.9 можно оценить

$$\|\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{R}f\| \leqslant \frac{C}{q}\|\mathbf{R}f\|_{m,\,m} \leqslant \frac{C}{q}\|f\|, \tag{4.10}$$

т. е. оператор $\mathbf{A}^{(2)}\mathbf{R}$ имеет малую норму.

Аналогично доказывается, что $\mathbf{R}$—левый регуляризатор для $\mathbf{A}^{(1)}$.

2°. Предельный случай задачи.

Здесь мы приведем совершенно нестрогие соображения, указывающие на то, что при предельном переходе $(p \to \infty)$ регуляризатор $\mathbf{R}$ переходит в регуляризатор первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями.

Пусть после факторизации символа b (см. § 3)

$$b_-(x, \xi, q, p) = \sum_{k=0}^{m} b_{m-k}^-(x, \xi', q, p)\,\xi_n^k.$$

Поскольку факторизация определена с точностью до множителя, зависящего от x, мы можем ее заменить следующей:

$$b(x, \xi, q, p) = [b_m^-(x, 0, 0, 1)\, b_+(x, \xi', \xi_n, q, p)]\left[\frac{1}{b_m^-(x, 0, 0, 1)} \times \right.$$

$$\left. \times\, b_-(x, \xi', \xi_n, q, p)\right] \equiv b_+' \cdot b_-'. \tag{5.10}$$

Будем писать в формуле (1.6) вместо b_+ и b_- соответственно b_+' и b_-'. При $p \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{p^m} b_-'(x, \xi, q, p) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{p^k} b_{m-k}^-\left(x, \frac{\xi'}{p}, \frac{q}{p}, 1\right) \xi_n^k \frac{1}{b_m^-(x, 0, 0, 1)} \to 1.$$

Переходя теперь к пределу при $p \to \infty$ в формуле 1.6, получим

$$\lim_{p\to\infty} \mathbf{R}f = \lim_{p\to\infty} Op\left(\frac{1}{a_+ b_-'}\right)\theta^+ Op\left(\frac{b_-'}{a_-}\right) f = \lim_{p\to\infty} Op \times$$

$$\times \frac{1}{a_+ \cdot p^m b_-'\left(x, \frac{\xi}{p}, \frac{q}{p}, 1\right)}\, \theta^+ Op\, \frac{b_-'}{a_-} f =$$

$$= \lim_{p\to\infty} Op \frac{1}{a_+ b_-'\left(x, \frac{\xi}{p}, \frac{q}{p}, 1\right)}\, \theta^+ Op\left(\frac{1}{p^m}\, b_-' \frac{1}{a_-}\right) f = \frac{1}{A_+}\theta^+ \frac{1}{A_-} f =$$

$$= \frac{1}{A_+}\theta^+ \frac{1}{A_-} lf_+^*, \tag{6.10}$$

но это есть вид регуляризатора для первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями (см. [3]). Заметим, что при $p \to \infty$ исходная задача вырождается в следующую:

$$\left.\begin{aligned} \theta^+ Au_+ &= f_+ \\ u_- &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{7.10}$$

---

* lf_+ обозначает произвольное продолжение функции f_+ на все R^n, так что $lf_+ \in H_0(R^n)$.

Положим всюду $p = 1/\varepsilon$, тогда $p \to \infty$ эквивалентно $\varepsilon \to 0$. После такого перехода получаем, что решение $u \in H_{0,m}$ или, что то же самое, $u \in \overset{0}{H}{}^{+}_{m,q}$, где

$$\|u\|^2_{0\,H^+_{m,q}} \sim \int (q + |\xi|)^{2m} |\tilde{u}|^2 \, d\xi, \quad u_- = \theta^- u = 0, \quad u = u_+ + u_-.$$

Априорная оценка принимает вид

$$\|\tilde{u}\|_{0,m} \leqslant C \| \Pi^+ [\xi_n - i(|\xi'| + q)]^{-m} \tilde{f}_+(\xi) \|_0. \tag{8.10}$$

Дополнение

Здесь мы докажем некоторые оценки § 11. Отметим сначала, что оценки (11.7)—(16.7) легко доказываются, если применить способ доказательства леммы 4.2 работы [7]. Мы не будем останавливаться на этих оценках, так как при выводе неравенств типа (21.7) будет использована по существу та же техника.

Оценки (17.7)—(20.7) тривиальны, а оценки (21.7)—(30.7) доказываются почти одинаково. Поэтому остановимся подробно лишь на выводе одной из оценок, например, на неравенстве (21.7).

Оценим сначала

$$\int \left| D^\alpha \partial_\zeta^1 k'_-(x, \zeta, q, p) \right|_{\zeta = \tilde{\zeta} = \eta + \varkappa(\eta - \tau)} dx, \quad 0 < \varkappa < 1, \tag{1.Д}$$

где

$$k'_- = \frac{a'_-(x)\, b_-(\infty) - a_-(\infty)\, b'_-(x)}{b_-(x)\, b_-(\infty)} =$$

$$= \frac{a'_-(x, \xi, q)\, b_-(\infty, \xi, q, p) - a_-(\infty, \xi, q)\, b'_-(x, \xi, q, p)}{b_-(x, \xi, q, p)\, b_-(\infty, \xi, q, p)}, \tag{2.Д}$$

в силу (4.7).

После дифференцирования (2.Д) по ζ получим

$$D^\alpha \partial_\zeta^1 k'_-(x, \zeta, q, p) = \sum_{l=1}^{n} D^\alpha \Bigg\{ \frac{\partial_l^1 a'_-(x, \zeta, q)}{b_-(x, \zeta, q, p)} +$$

$$+ \frac{b'_-(x, \zeta, q, p)}{b_-(x, \zeta, q, p)} \left[\frac{a_-(\infty, \zeta, q)\, \partial_l^1 b_-(\infty, \zeta, q, p)}{[b_-(\infty, \zeta, q, p)]^2} - \frac{\partial_l^1 a_-(\infty, \zeta, q)}{b_-(\infty, \zeta, q, p)} \right] -$$

$$- \frac{a_-(\infty, \zeta, q)}{b_-(\infty, \zeta, q, p)} \frac{\partial_l^1 b'_-(x, \zeta, q, p)}{b_-(x, \zeta, q, p)} + \frac{\partial_l^1 b_-(x, \zeta, q, p)}{[b_-(x, \zeta, q, p)]^2} \times$$

$$\times \left[\frac{a_-(\infty, \zeta, q)\, b'_-(x, \zeta, q, p)}{b_-(\infty, \zeta, q, p)} - a'_-(x, \zeta, q) \right] \Bigg\}. \tag{3.Д}$$

Здесь ∂ обозначает дифференцирование по второму аргументу, $\partial_l = \dfrac{\partial}{\partial \zeta_l}$. Так как в каждом слагаемом имеется множитель, принадлежащий S_x, то при интегрировании все интегралы будут сходиться в

силу того, что если $\varphi(x, \xi, q) \in S_x$ и однородна по q и ξ порядка m, то

$$|\varphi(x, \xi, q)| \leqslant C_s (q + |\xi|)^m (1+|x|)^{-s},$$

следовательно, члены суммы (3.Д) достаточно оценить по однородности. Мы учтем, что

$$|b_-(x, \zeta, q, p)| > C(q + p + |\zeta|)^m,$$

а также то, что дифференцирование по ζ снижает порядок однородности на единицу. Будем оценивать каждое слагаемое (3.Д).

Используя формулу Лейбница, получим (см. формулу (II—4) из [7])

$$\int |D^\alpha \{[b_-(x, \zeta, q, p)]^{-1} [\partial_i^1 a_-'(x, \zeta, q)]\} dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\sigma|+|\delta|=|\alpha|} C_{\sigma\delta} \int |D^\sigma \partial_i^1 a_-'(x, \zeta, q)| \, |D^\delta [b_-(x, \zeta, q, p)]^{-1}| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{|\sigma|+|\delta|=|\alpha|} \int |D^\sigma \partial_i^1 a_-'(x, \zeta, q)| \left| \sum_{k=1}^{|\delta|} [b_-(x, \zeta, q, p)]^{-k-1} \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{|\beta_1|+\cdots+|\beta_k|=|\delta|} C_{i_1, \ldots, i_k} D^{\beta_1} b_- \cdots D^{\beta_k} b_- \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant C(q + |\zeta|)^{m-1} (q+p+|\zeta|)^{-mk-m} (q+p+|\zeta|)^{mk} = C \frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}.$$

Последнее неравенство следует из оценок по однородности сверху.

Таким образом

$$\sum_{i=1}^n \int \left| D^\alpha \frac{\partial_i^1 a_-'(x, \zeta, q)}{b_-(x, \zeta, q, p)} \right| dx \leqslant C \frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}. \tag{4.Д}$$

Оцениваем интеграл от следующего слагаемого (3.Д)

$$\int \left| D^\alpha \{[b_-'(x, \zeta, q, p)] [b_-(x, \zeta, q, p]^{-1}\} \times \right.$$

$$\left. \times \left[\frac{a(\infty) \partial_i^1 b_-(\infty) - \partial_i^1 a_-(\infty) b_-(\infty)}{[b_-(\infty)]^2} \right] \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant C \frac{(q+|\zeta|)^m (q+p+|\zeta|)^{m-1} + (q+|\zeta|)^{m-1} (q+p+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^{2m}} \times$$

$$\times \int \sum_{|\beta|+|\gamma|=|\alpha|} |D^\beta b_-' D^\gamma b_-^{-1}| \, dx \leqslant \frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m} \times$$

$$\times (q+p+|\zeta|)^m (q+p+|\zeta|)^{-mk-m} (q+p+|\zeta|)^{mk} = \frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}. \tag{5.Д}$$

Далее

$$\int \left| D^\alpha \frac{a_-(\infty)}{b_-(\infty)} \frac{\partial_i^1 b_-'(x)}{b_-(x)} \right| d\zeta \leqslant \frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m} \int \sum C_{\beta\gamma} |D^\beta \partial_i^1 b_-' D^\gamma b_-^{-1}| \, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m}(q+p+|\zeta|)^{m-1}(q+p+|\zeta|)^{-m}=$$

$$=C\frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|^{m-1}}<C\frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}. \qquad (6.Д)$$

Оцениваем четвертое слагаемое (3.Д)

$$\int\left|D^\alpha\frac{\partial_i^1 b_-(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\frac{b_-'(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\frac{a_-(\infty,\zeta,q)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m}\int\sum C_{\beta\gamma}\left|D^\beta\frac{\partial_i^1 b_-(x)}{b_-(x)}\right|\left|D^\gamma\frac{b_-'(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\right|dx\leqslant \qquad (7.Д)$$

$$\leqslant C\frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m}\frac{(q+p+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}\int\left|D^\gamma\frac{b_-'(x)}{b_-(x)}\right|dx\leqslant C\frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}.$$

Наконец

$$\int\left|D^\alpha\frac{\partial_i^1 b_-(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\cdot\frac{a_-'(x,\zeta,q,p)}{b_-(x,\zeta,q,p)}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{(q+p+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}\frac{(q+|\zeta|)^m}{(q+p+|\zeta|)^m}\leqslant C\frac{(q+|\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\zeta|)^m}. \qquad (8.Д)$$

Складывая (4.Д)—(8.Д), получим

$$\int|D^\alpha\partial_\xi^1 k_-'(x,\zeta,q,p)|_{\bar\zeta}\,dx\leqslant C\frac{(q+|\bar\zeta|)^{m-1}}{(q+p+|\bar\zeta|)^m}. \qquad (9.Д)$$

Воспользуемся следующей оценкой:

$$(q+p+|\bar\zeta|)^m>C\frac{(q+p+|\tau|)^m}{(1+|\tau-\eta|)^m}$$

(см. формулу (3.20) работы [7]), тогда получим

$$\int|D^\alpha\partial_\xi^1 k_-'(x,\zeta,q,p)|_{\bar\zeta}\,dx\leqslant C\frac{(q+|\tau|)^{m-1}+(q+|\eta|)^{m-1}}{(q+p+|\tau|)^m}(1+|\tau-\eta|)^m. \qquad (10.Д)$$

Заменяя $(q+|\eta|)^{m-1}$ большей величиной $C(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\tau-\eta|)^{m-1}$, из (10.Д) заключаем

$$\int|D^\alpha\partial_\xi^1 k_-'(x,\zeta,q,p)|_{\zeta=\bar\zeta}\,dx\leqslant C\frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\tau-\eta|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^m}. \qquad (11.Д)$$

Рассмотрим теперь преобразование Фурье от x к $\xi-\eta$, примененное к функции

$$k_1=(1+D^\alpha)[k_-'(x,\eta,q,p)-k_-'(x,\tau,q,p)]=$$
$$=(1+D^\alpha)\,\partial_\xi^1 k_-'(x,\xi,q,p)|_{\bar\xi}\,(\eta-\tau). \qquad (12.Д)$$

Имеем

$$F_{x\to(\xi-\eta)}k_1\equiv\int e^{ix(\xi-\eta)}k_1\,dx=(1+|\xi-\eta|)^\alpha[\widetilde{k_-'}(\xi-\eta,\eta,q,p)-$$
$$-\widetilde{k_-'}(\xi-\eta,\tau,q,p)]. \qquad (13.Д)$$

Отсюда следует

$$(1+|\xi-\eta|)^{\alpha}|\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\eta,q,p)-\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\tau,q,p)|\leqslant\int|k_1|\,dx=$$

$$=\int|(1+D^{\alpha})\,\partial_{\xi}^{1}k'_{-}(\xi-\eta,\tau,q,p)|_{\xi=\tau}|\eta-\tau|\,dx.$$

Если теперь воспользоваться оценкой (11.Д), то получим

$$(1+|\xi-\eta|)^{\alpha}|\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\eta,q,p)-\overline{k}'_{-}(\xi-\eta,\tau,q,p)|\leqslant$$

$$\leqslant C\frac{(q+|\tau|)^{m-1}(1+|\tau-\eta|)^{2m-1}}{(q+p+|\tau|)^{m}}|\eta-\tau|.$$

Таким образом, формула (21.7) полностью доказана.

Отметим, что формулы (23.7), (25.7), (27.7) доказываются аналогично, а доказательство оценок для постоянных составляющих символов значительно проще.

Московский энергетический институт

Поступило 7.XII.1967

Ի. Ա. ՖԵԴՈՏՈՎ. Խզվող գործակիցներով էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումներ *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է պարամետրերից կախված երկու էլիպտիկ դիֆերենցիալ հավասարումների լուծումների ողորկ լծորդման խնդիրը։ Այդ հավասարումները ունեն միևնույն կարգը և տրված են տարբեր կիսատարածություններում։ Ապացուցվում են պարամետրերի հետ բնականորեն կապված նորմաներում գոյության թեորեմը և ապրիոր գնահատականը։ Հեղինակը օգտագործում է պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների տեսությունը։

I. A. FEDOTOV. *Elliptic differential equations with a breakable coefficients* (summary)

This article is devoted to the problem of smooth connection of solutions of two elliptic differential equations depending on parameters. These equations have identical order and are set on different halfspaces. The existence theorem and a priori estimation are prooved in spaces naturally connected with parameters. The theory of pseudodifferential operators is used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Вишик, Л. А. Люстерник.* Асимптотическое поведение линейных дифференциальных уравнений с большими или быстро меняющимися коэффициентами и граничными условиями, УМН 15, вып. 4, 1960, 27—95.
2. *J. J. Kohn, L. Nirenberg.* On the algebra of pseudodifferential operators, Comm. Pure Appl. Math., 18, № 1—2, 1965, 269—305.
3. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН 20, вып. 3, 1965, 89—152.
4. *С. Л. Эйдельман.* Параболические системы, М., „Наука", 1964.
5. *М. С. Агранович, М. И. Вишик.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН 19, вып. 3, 1964, 53—161.
6. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Параболические уравнения в свертках в ограниченной области, Матем. сб., 71, 2, 1966, 162—190.
7. *Л. Р. Волевич.* Локальные свойства неоднородных псевдодифференциальных операторов, Труды Моск. матем. об-ва, 16, 1967, 51—98.