ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա IV, № 1, 1969 Математика

Г. Г. КАЗАРЯН

L_p-ОЦЕНКИ СМЕШАННЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЧЕРЕЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ

1. Пусть функция $f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$ определенная в n-мерном евклидовом пространстве E_n такова, что для данного набора многочленов $P_j(\xi)$ $(j=1,\cdots,N)$

$$\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)f\|_{L_p}<\infty,\ 1<p<\infty, \tag{1}$$

где $D_k=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_k}$. Ставится задача о нахождении множества векторов $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)$ с неотрицательными целочисленными координатами, для которых имеет место оценка

$$\|D^{\nu}f\|_{L_q}\leqslant C\sum_{j=1}^{N}\|P_j(D)\|_{L_p},\ \ q\geqslant p, \tag{2}$$

для всех функций $f(x)$ с конечной правой частью и с константой C, не зависящей от $f(x)$.

Для однородных многочленов одного и того же порядка, с добавлением еще многочлена $P_0(\xi)\equiv 1$, эта задача решена Смитом [1], для обобщенно однородных многочленов — О. В. Бесовым [2]. В случае набора одночленов эта задача решена В. П. Ильиным [3]. Ими найдены неравенства типа (2) также и для функций $f(x)$, заданных в ограниченных областях некоторого класса. Нами здесь получены оценки типа (2) для более широкого класса многочленов $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$, в случае функций, определенных во всем евклидовом пространстве E_n.

Мы будем в дальнейшем рассматривать бесконечно дифференцируемые финитные функции $f(x)$ ($f(x)\in C_0^{\infty}$), так что для них условие (1) выполняется.

Пусть $P_j(\xi)=\sum_{\alpha}\gamma_\alpha^j\xi^\alpha$ — набор многочленов с, вообще говоря, комплексными коэффициентами. Характеристическим многогранником (*х. м.*) набора $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$ назовем минимальный выпуклый многогранник $\mathfrak{M}$, содержащий множество показателей $\{\alpha\}$, для которых $\gamma_\alpha^j\neq 0$, $j=1,\cdots,N$. Обозначим вершины этого многогранника через e^k, $k=1,\cdots,N_0$, его k-мерные некоординатные грани—через $\mathfrak{M}_k^i$, $k=1,\cdots$ $\cdots, M_i$; $i=0,1,\cdots,n-1$. Пусть $\partial'\mathfrak{M}=\bigcup_k\mathfrak{M}_k^{n-1}$, $P_j^{k,i}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}_k^i}\gamma_\alpha^j\xi^\alpha$.

Определение 1. Многочлен $P(\xi)$ назовем допустимым, если существуют константы $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ такие, что для всех $\xi\in R_n$ имеет место неравенство

$$\delta_1\cdot\sum_{k=1}^{N_0}|\xi^{e^k}|\leqslant|P(\xi)|\leqslant\delta_2\sum_{k=1}^{N_0}|\xi^{e^k}|. \tag{3}$$

Определение 2. Измеримая функция $\Phi(\xi)$ называется мультипликатором из L_p в L_q $(\Phi\in M_p^q)$, если преобразование $T_\Phi\colon L_p\to L_q$, определенное равенством

$$T_\Phi f=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R_n}\Phi(\xi)\tilde{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,d\xi,$$

является ограниченным:

$$\|T_\Phi f\|_{L_q}\leqslant C\,\|f\|_{L_p},\ q\geqslant p.$$

Имеет место теорема П. И. Лизоркина [5]. Пусть функция $\Phi(\xi)$ непрерывна вместе с производной $\partial^n\Phi/\partial\xi_1\cdots\partial\xi_n$ и всеми предшествующими ей производными при $|\xi_j|>0$, $j=1,\cdots,n$. Тогда $\Phi(\xi)\in M_p^q$, если

$$\left|\xi_1^{k_1+\beta}\cdots\xi_n^{k_n+\beta}\ \frac{\partial^k\Phi}{\partial\xi_1^{k_1}\cdots\partial\xi_n^{k_n}}\right|\leqslant M,$$

где $\beta=\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\geqslant 0$, k_j принимает значение 0 или 1, $k=\sum\limits_{j=1}^{n}k_j=0,$ $1,\cdots,n$.

Лемма 1. [4]. Если $\mathfrak{M}$—характеристический многогранник для многочлена $P(\xi)=\sum\limits_{\alpha}\gamma_\alpha\xi^\alpha$, то какова бы ни была точка $\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$, существует константа C такая, что неравенство

$$|\xi^\beta|\leqslant C\sum_{l=1}^{N_0}|\xi^{e^k}|$$

справедливо для всех $\xi\in R_n$, где e^k, $k=1,\cdots,N_0$ — вершины $\mathfrak{M}$.

Лемма 2. Пусть набор многочленов $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$ таков, что 1) его х.м. имеет вершины в начале координат и на каждой координатной оси (вне начала координат), 2) многочлены

$$P_j^{k,l}(\xi)=\sum_{\alpha\in\mathfrak{M}_k^l}\gamma_\alpha^j\xi^\alpha,\ j=1,\cdots,N$$

ни для какого $k=1,\cdots,M_l$ не имеют общего действительного нуля вне координатных плоскостей, тогда многочлен $Q(\xi)=\sum\limits_{j=1}^{N}|P_j(\xi)|^2$ является допустимым.

Доказательство следует из того, что многочлен

$$Q^{k,\,l}(\xi)=\sum_{\beta\in\mathfrak{M}_k^l}\widetilde{\gamma}^{\beta}\,\xi^{\beta}=\sum_j|P_j^{k,\,l}(\xi)|^2$$

не может обращаться в нуль вне координатных плоскостей. А для таких многочленов, называемых полными, невырожденными, В. П. Михайловым [4] доказано неравенство (3). (Многочлен $Q(\xi)$ является еще неотрицательным, $Q(\xi)\geqslant 0$).

Теорема А. *Пусть задан набор многочленов* $P_j(\xi)$, $j=1,\cdots,N$, его х.м. $\mathfrak{M}$ *удовлетворяет условию 1) леммы 2, тогда:*

1) Условие 2) леммы 2 необходимо и достаточно для того, чтобы для всех точек ν, *при* $\nu+\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$ *имело место неравенство* (2), *где* $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $\beta_i=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}$, $i=1,\cdots,n$;

2) *Если для некоторой* ν, $\nu+\beta$ *находится вне* $\overline{\mathfrak{M}}$, *то неравенство* (2) *не может иметь места.*

Наметим доказательство (п. 1). Достаточность. Совершим преобразование Фурье функции $f(x)\in C_0^\infty$.

$$F[D^\nu f]=\xi^\nu\cdot F[f],$$

$$F[P_i(D)f]=P_i(\xi)\,F[f],\ i=1,\cdots,N.$$

Умножив i-ое тождество на $\overline{P_i(\xi)}$ и сложив полученные тождества, находим

$$F[D^\nu f]=\sum_{m=1}^{N}\frac{\xi^\nu\cdot\overline{P_m(\xi)}}{\sum\limits_{l=1}^{N}|P_l(\xi)|^2}\cdot F[P_m(D)f]. \tag{4}$$

Достаточно доказать, что функции

$$\Phi_m(\xi)=\frac{\xi^\nu\cdot\overline{P_m(\xi)}}{\sum\limits_{l=1}^{N}|P_l(\xi)|^2}=\frac{\xi^\nu\cdot\overline{P_m(\xi)}}{Q(\xi)},\ m=1,\cdots,N$$

являются мультипликаторами из L_p в L_q. Согласно теореме о мультипликаторах надо показать непрерывность и ограниченность выражений

$$\left|\xi_1^{k_1+\beta}\cdots\xi_n^{k_n+\beta}\frac{\partial^k\Phi_m(\xi)}{\partial\xi_1^{k_1}\cdots\partial\xi_n^{k_n}}\right|,\ m=1,\cdots,N,\ k=\sum_{j=1}^{n}k_j=0,1,\cdots,n.$$

Пусть $\nu+\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$. Согласно лемме 2 $Q(\xi)$ — допустимый многочлен. Пусть сначала $k=0$, тогда

$$|\xi^\beta\,\Phi_m(\xi)|=\left|\frac{\xi^{\nu+\beta}\,\overline{P_m(\xi)}}{Q(\xi)}\right|\leqslant C\frac{\xi^{2(\nu+\beta)}}{\sum\limits_{k=1}^{N_0}\xi^{2e^k}}+C\frac{|\overline{P_m(\xi)}|^2}{\sum\limits_{k=1}^{N_0}\xi^{2e^k}}.$$

Из леммы 1 следует, что первое слагаемое ограничено. Ограниченность второго слагаемого следует из того, что все точки α с $\gamma_\alpha\neq 0$ в $P_m(\xi)$ входят в $\overline{\mathfrak{M}}$ и надо снова применить лемму 1.

Таким же образом доказывается ограниченность

$$|\xi^{k+\beta} D^k \Phi_m(\xi)| \quad \text{при всех} \quad 0 < k \leqslant n.$$

Необходимость. Пусть $P_j^{k_0, l_0}(\xi^0) = 0$, $j=1, \cdots, N$, и для некоторой точки ν при $\nu+\beta \in \mathfrak{M}_{k_0}^{l_0}$ имеет место неравенство (2). Аналогично тому, как это делается в [6] и [2], рассмотрим функцию

$$f_\lambda(x) = \varphi(x)\, e^{i \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^{\sigma_k} \xi_k^0 x_k},$$

где $\varphi(x) \in C_0^\infty$, $\lambda > 0$, σ_k, $k=1, \cdots, n$ таковы, что $P_j^{k_0, l_0}(\xi) = \sum\limits_{(\alpha, \sigma) = 1} \gamma_\alpha^j \xi^\alpha$.

Подставляя $f_\lambda(x)$ в неравенство (2) и деля обе части на λ, получим, что при $\lambda \to \infty$ левая часть стремится к постоянной, отличной от нуля, в то время как правая—к нулю.

п. 2) Пусть точка ν такова, что $\alpha = \nu + \beta$ находится вне $\overline{\mathfrak{M}}$. Докажем, что неравенство (2) не имеет места. Достаточно доказать, что не существует постоянной такой, что для всех функций $f(x) \in C_0^\infty$

$$\|D^\nu f\|_{L_q} \leqslant C \sum_{l=1}^{N_0} \|D^{e^l} f\|_{L_p}. \tag{5}$$

Пусть, напротив, (5) выполняется. Так как $\mathfrak{M}$—выпуклый многогранник и $\alpha \in \overline{\mathfrak{M}}$, то существует хотя бы одна грань многогранника $\mathfrak{M}$ такая, что $\mathfrak{M}$ и точка α лежат по разные стороны гиперплоскости, проходящей через эту грань. Пусть $A_1 \nu_1 + \cdots + A_n \nu_n = 1$—уравнение этой гиперплоскости, тогда для всех вершин многогранника $\mathfrak{M}$

$$\sum_{l=1}^{n} A_l e_l^j = B^j \geqslant 1, \quad j=1, \cdots, N_0,$$

а для α

$$\sum_{l=1}^{n} A_l \alpha_l = B < 1.$$

Возьмем функцию $f_\varepsilon(x) = f(\varepsilon^{A_1} x_1, \cdots, \varepsilon^{A_n} x_n)$. По предположению для нее имеет место (5), т. е.

$$\varepsilon^B \cdot \|D^\nu f(x)\|_{L_q} \leqslant C \cdot \sum_{l=1}^{N} \varepsilon^{B_l} \|D^{e^l} f(x)\|_{L_p}.$$

Поделим обе части неравенства на ε^B, пусть $\varepsilon \to 0$, тогда правая часть стремится к нулю, в то время как левая часть—положительная постоянная. Это противоречит оценке (5), теорема доказана.

2. Пусть задан набор многочленов $P_i(x, \xi)$, $i=1, \cdots, N$ с переменными коэффициентами. Ставится задача о нахождении неотрицательных целочисленных векторов $\nu = (\nu_1, \cdots, \nu_n)$, для которых выполняется оценка

$$\|D^{\nu} f\|_{L_q} \leqslant C \cdot \sum_{l=1}^{N} \|P_l(x, D) f\|_{L_p} + C \|f\|_{L_p} \tag{6}$$

для всех $f \in C_0^{\infty}$.

Пусть $\mathfrak{M}(x)$ х. м., построенный на многочленах $P_j(x, \xi)$, $j=1, \cdots, N$, для данной точки x. Мы будем предполагать, что $\mathfrak{M}(x)$ не зависит от x и для каждой точки x удовлетворяются условия леммы 2. Пусть еще для „главных" коэффициентов $\gamma_\alpha^j(x)$ многочленов $P_j(x, \xi)$, $j=1, \cdots, N$ выполняется неравенство

$$0 < d \leqslant |\gamma_\alpha^j(x)| \leqslant M, \quad j=1, \cdots, N.$$

(Это условие выполняется, например, когда область изменения x, $x \in \Omega$ ограничена). Тогда (см. [4]) многочлен $Q(x, \xi) = \sum_{j=1}^{N} |P_j(x, \xi)|^2$ является допустимым с константами $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, не зависящими от x, т. е.

$$\delta_1 \sum_{k=1}^{N_0} |\xi^{2\alpha^k}| \leqslant |Q(x, \xi)| \leqslant \delta_2 \sum_{k=1}^{N_0} |\xi^{2\alpha^k}|.$$

Мы будем предполагать в дальнейшем, что многочлены

$$P_j(x, \xi) = \sum_\alpha \gamma_\alpha^j(x) \xi^\alpha, \quad j=1, \cdots, N \qquad \text{таковы, что}$$

a) все $\gamma_\alpha^j(x)$, $j=1, \cdots, N$ определены во всем E_n, измеримы и ограничены;

в) для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечная система открытых множеств $\{U_j^{(\varepsilon)}\}_{j=1}^{k(\varepsilon)}$ $(k(\varepsilon) < \infty)$, покрывающая пространство E_n вместе с системой $\{U_{j,\delta}^{(\varepsilon)}\}_{j=1}^{k(\varepsilon)}$, где $U_{j,\delta}^{(\varepsilon)} = \{x \in U_j^{(\varepsilon)};\ \rho(x, E_n \setminus U_j^{(\varepsilon)}) > \delta\}$;

c) каждая точка $x \in E_n$ покрывается не более чем m_0 множествами $U_j^{(\varepsilon)}$, где m_0 не зависит от ε;

d) $|\gamma_\alpha^j(x') - \gamma_\alpha^j(x'')| < \varepsilon$, $j=1, \cdots, N$ для любой пары $x', x'' \in U_j^{(\varepsilon)}$, $\alpha \in \partial'\mathfrak{M}$.

Т е о р е м а B. *Пусть набор многочленов $P_j(x, \xi)$, $j=1, \cdots, N$ удовлетворяет условиям леммы 2 для каждого $x \in E_n$ и условиям* a)—d), *его* х. м. $\mathfrak{M}$ *удовлетворяет условию: все внешние нормали $\partial'\mathfrak{M}$ имеют неотрицательные координаты. Тогда:* 1) *неравенство* (6) *имеет место для всех ν при $\nu+\beta \in \overline{\mathfrak{M}}$;* 2) *ни для одной точки ν при $\nu+\beta \,\overline{\in}\, \overline{\mathfrak{M}}$ неравенство* (6) *не может иметь места.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1). Так как для всех точек ν при $\nu+\beta \in \overline{\mathfrak{M}}$ согласно теореме А имеет место неравенство

$$\|D^{\nu} f\|_{L_q} \leqslant C \sum_{k=1}^{N_0} \|D^{\alpha^k} f\|_{L_p} \leqslant C \sum_{\mu \in \partial'\mathfrak{M}} \|D^{\mu} f\|_{L_p}, \tag{7}$$

то достаточно доказать оценку

$$\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} \|D^{\mu} f\|_{L_p} \leqslant C \sum_{k=1}^{N} \|P_k(x, D) f\|_{L_p} + C\|f\|_{L_p}, \tag{8}$$

откуда и будет следовать (6).

Следуя Гордингу [7], построим разбиение единицы, соответствующее покрытию $\{U_j^{(\varepsilon)}\}_{j=1}^{k(\varepsilon)}$. Пусть $\psi_j(x)>0$, $\psi_j(x)\in C_0^{\infty}(E_n)$, $\sum\limits_{k=1}^{k(\varepsilon)} \psi_j^{\rho}(x) = 1$, $\psi_j(x) = 1$ при $x\in U_{j,\varepsilon}^{(\varepsilon)}$, $\psi_j(x) = 0$ при $x\overline{\in} U_j^{(\varepsilon)}$.

Возьмем фиксированную точку $x^j\in U_j^{(\varepsilon)}$, тогда

$$\left\|\psi_j(x)\sum_{k=1}^{N} P_k(x, D) f - \sum_{k=1}^{N} P_k(x^j, D)(\psi_j f)\right\|_{L_p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\|\psi_j \cdot \sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} [\gamma_{\alpha}^{k}(x) - \gamma_{\alpha}^{k}(x^j)] D^{\mu} f\right\|_{L_p} + C \sum_{\alpha\in\overline{\mathfrak{M}}\setminus\partial'\mathfrak{M}} \|D^{\alpha} f\|_{L_p}.$$

Согласно условию d) $|\gamma_{\alpha}^{k}(x) - \gamma_{\alpha}^{k}(x^j)| < \varepsilon$ для любой точки $x\in U_j^{(\varepsilon)}$, а для точек $\alpha\in\overline{\mathfrak{M}}/\partial'\mathfrak{M}$, имеет место оценка [3]

$$\|D^{\alpha} f\|_{L_p} \leqslant \varepsilon\cdot \sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} \|D^{\mu} f\|_{L_p} + C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}, \tag{9}$$

так что можно записать

$$\left\|\psi_j \sum_{k=1}^{N} P_k(x, D) f - \sum_{k=1}^{N} P_k(x^j, D)(\psi_j f)\right\|_{L_p} \leqslant \varepsilon\cdot \sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} \|\psi_j D^{\mu} f\|_{L_p} +$$

$$+ C(\varepsilon)\|f\|_{L_p} \leqslant \varepsilon\cdot \sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} \|D^{\mu}(\psi_j f)\|_{L_p} + C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}.$$

Но согласно теореме А для постоянных коэффициентов, если $Q(x^j, \xi) = \sum\limits_{k=1}^{N} |P_k(x, \xi)|^2$ — допустимый многочлен, то

$$\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} \|D^{\mu}(\psi_j f)\|_{L_p} \leqslant C \sum_{k=1}^{N} \|P_k(x^j, D)(\psi_j f)\|_{L_p} + C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}, \tag{10}$$

так что

$$\sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} \|D^{\mu}(\psi_j f)\|_{L_p} \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|\psi_j\cdot P_k(x, D) f - P_k(x^j, D)(f\psi_j)\|_{L_p} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \|\psi_j\cdot P_k(x, D) f\|_{L_p} + C(\varepsilon)\|f\|_{L_p} \leqslant C\cdot\varepsilon \sum_{\mu\in\partial'\mathfrak{M}} \|D^{\mu}(\psi_j f)\|_{L_p} +$$

$$+ C\sum_{k=1}^{N} \|\psi_j P_k(x, D) f\|_{L_p} + C(\varepsilon)\|f\|_{L_p}.$$

Считая $C\cdot\varepsilon < 1$, перенесем слагаемое с ε в левую сторону, получим

$$\sum_{\mu\in\delta'\mathfrak{M}} \|D^{\mu}(\psi_j f)\|_{L_p} \leqslant C\cdot \sum_{k=1}^{N} \|\psi_j P_k(x, D) f\|_{L_p} + C\|f\|_{L_p}$$

или

$$\sum_{\mu\in\delta'\mathfrak{M}} \|\psi_j D^{\mu} f\|_{L_p} \leqslant C\sum_{k=1}^{N} \|\psi_j P_k(x, D) f\|_{L_p} + C\|f\|_{L_p}.$$

Взяв сумму по j, и утверждая, что $\sum_{j=1}^{m_0} \psi_j^2 = 1$, получим (8), откуда и следует (6).

п. 2) теоремы доказывается так же, как в теореме А.

3. Пусть рассматриваемые функции $f(x)$ таковы, что они обращаются в нуль вне некоторой ограниченной области Ω. Пусть задан набор многочленов $P_j(x, \xi) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}^{j}(x)\xi^{\alpha}$, где все $\gamma_{\alpha}^{j}(x)$ определены на $\overline{\Omega}$. Мы будем предполагать, что х. м. $\mathfrak{M}(x)$ не зависит от $x\in\overline{\Omega}$ и удовлетворяются условия леммы 2 для каждой точки $x\in\Omega$.

Т е о р е м а С. *Пусть набор многочленов $P_j(x, \xi)$, $j=1,\cdots, N$ таков, что все коэффициенты $\gamma_{\alpha}^{j}(x)$ измеримы и ограничены, а „главные" коэффициенты непрерывны в $\overline{\Omega}$, тогда неравенство*

$$\|D^{\nu} f\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D) f\|_{L_p(\Omega)} + C\|f\|_{L_p(\Omega)}$$

имеет место для всех ν при $\nu+\beta\in\overline{\mathfrak{M}}$.

Доказательство проводится по той же схеме, что и в теореме В.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 18.XII.1967

Հ. Գ. ՂԱԶԱՐՅԱՆ. Խառը ածանցյալների գնահատականները տված դիֆերենցիալ բազմանդամների միջոցով *(ամփոփում)*

Դիցուք $\mathfrak{M}$-ով նշանակված է ամենափոքր ուռուցիկ բազմանիստը, որը պարունակում է տված $P_j(x,D)=\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha}^{j}(x)\,D^{\alpha}$ $(j=1,\cdots, N)$ դիֆերենցիալ բազմանդամների բոլոր α մուլտիինդեքսները, որոնց համար $\gamma_{\alpha}^{j}\neq 0$, իսկ $\mathfrak{M}_l^k$ $(l=1,\cdots, M_k,\ k=0,\cdots, n-1)$ այդ բազմանիստի k-չափանի նիստերն են, որոնք գտնվում են կոորդինատական հարթություններից դուրս։

Ապացուցվում է, որ

$$\sum_{\nu\in\mathfrak{M}} \|D^{\nu} f\|_{L_p} < C\sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D) f\|_{L_p} \quad (f\in C_0^{\infty})$$

գնահատականի համար անհրաժեշտ է և բավարար, որ $P_j^{l,k}(x, \xi)=\sum_{\nu\in\mathfrak{M}_l^k}\gamma_{\alpha}^{j}(x)\xi^{\alpha}$ $(j=1,\cdots, N)$ բազմանդամները ոչ մի (l, k) զույգի դեպքում ամեն մի x-ի համար չունենան իրական ընդհանուր արմատներ կոորդինատական հարթություններից դուրս։

Ապացույցը հիմնականում տարվում է (L_p, L_q) մուլտիպլիկատորների մասին թեորեմայի հիման վրա։

H. G. KAZARIAN. *L_p—estimates of mixed derivatives with given differential polynoms* (summary)

Let $\mathfrak{M}$ be the smallest convex polyhedron containing all the multiindexes of given differential polynoms $P_j(x, D) = \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha}(x) D^{\alpha}$ $(j = 1, \cdots, N)$, for which $\gamma_{\alpha} \neq 0$ and $\mathfrak{M}_i^k$ $(i = 1, \cdots, M_k,\ k = 0, \cdots, n-1)$ be those K—dimensional edges of this polyhedron which do not lie on coordinate planes. It is proved that the necessary and sufficient condition for the validity of

$$\sum_{\nu = n} \| D^{\nu} f \|_{L_p} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \| P_j(x, D) f \|_{L_p} \quad (f \in C_0^{\infty})$$

is that the polynoms $P_j^{i,k}(x, \xi) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{M}_i^k} \gamma_{\alpha}^j(x) \xi^{\alpha}$ have no common real zeros outside coordinate planes for any pair (i, k) and for each x.

ЛИТЕРАТУРА

1. *K. T. Smith.* Inequalites for formally positive integro-differential forms, Bull. Amer. Math. Soc., 1961, 67, № 4, 368—370.
2. *О. В. Бесов.* О коэрцитивности в неизотропном пространстве С. Л. Соболева, Матем. сб., 73 : 4, 1967, 585—600.
3. *В. П. Ильин.* О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных, Труды МИАН, 84: 4,1965, 144—173.
4. *В. П. Михайлов.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов, Труды МИАН, 91, 1967, 59—81.
5. *П. И. Лизоркин.* (L_p, L_q)—мультипликаторы интегралов Фурье, ДАН СССР, 152, № 4, 1963, 808—811.
6. *J. Necas.* Sur les mormes equivalentes dans $W_p^{(m)}(\Omega)$ et sur la coercitivite des formes formellement positives, Seminaire de Mathematiques superienres, Ete 1965.
7. *L. Garding.* Dirichlet's problem for linear elliptic partical differential equations, Math. Scad 1, 1953, 55—72.