ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 6, 1968 Математика

Н. Е. ТОВМАСЯН

НОВЫЕ ПОСТАНОВКИ И ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРВОЙ, ВТОРОЙ И ТРЕТЬЕЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИЛЬНО СВЯЗАННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

§ 1. Постановка задач и основные результаты

Пусть задана эллиптическая система

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

где A, B, C — постоянные действительные квадратные матрицы n-го порядка, $u=(u_1,\cdots, u_n)$ — искомая действительная вектор-функция.

Как известно, система (1) называется эллиптической, если $\det C\neq 0$ и характеристическое уравнение

$$\det(A+2B\lambda+C\lambda^2)=0 \tag{2}$$

не имеет действительных корней.

Граничные условия первой, второй и третьей краевых задач для системы (1) в области G с границей S имеют соответственно вид

$$u=f \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}=g \text{ на } S,$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}+\alpha u=h \text{ на } S,$$

где f, g и h — заданные на S n-мерные вектор-функции, N — внешняя нормаль к границе S, α — постоянное число.

В работе [1] (стр. 113) введено понятие слабой и сильной связанности системы (1). По определению слабой и сильной связанности системы (1) любая эллиптическая система (1) является либо слабо связанной, либо сильно связанной. Первая, вторая и третья краевые задачи для слабо связанных систем (1) являются фредгольмовыми (т. е. для этих задач имеют место известные альтернативы фредгольма), а для сильно связанных систем эти задачи перестают быть фредгольмовыми и нетеровыми (см. [1], [2]).

В работах [2] и [3] изучена первая краевая задача для сильно связанной системы в круге, когда $\lambda=i$ является n-кратным корнем характеристического уравнения (2), где i — мнимая единица. В работе [2] изучена также первая краевая задача для сильно связанной системы (1) в полуплоскости. В работе [4] исследуется однородная задача Дирихле для сильно связанной системы (1) в круге при $n=2$.

Пусть система (1) состоит из двух уравнений и λ_0 — один из корней характеристического уравнения (2), причем $\operatorname{Im}\lambda_0>0$. Обозначим через $\sigma=(\sigma_1, \sigma_2)$ нетривиальное решение однородного алгебраического уравнения

$$(A+2B\lambda_0+C\lambda_0^2)\,\sigma=0.$$

В случае, когда система (1) состоит из двух уравнений, она является сильно связанной тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Im}\sigma_1\cdot\operatorname{Re}\sigma_2-\operatorname{Re}\sigma_1\cdot\operatorname{Im}\sigma_2\neq 0,$$

и преобразование

$$u_j=\operatorname{Im}\sigma_j v_1+\operatorname{Re}\sigma_j v_2 \quad (j=1,\,2)$$

приводит эту систему к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar z^2}-(\mu_1+\mu_2)\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial\bar z}+\mu_1\mu_2\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}=0, \tag{3}$$

где $v=v_1+iv_2$ — новая искомая функция, μ_1 и μ_2 — постоянные числа, $|\mu_1|<1$, $|\mu_2|<1$, $|\mu_1|\geqslant|\mu_2|$,

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial \bar z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Здесь через $|\mu_1|$ и $|\mu_2|$ обозначены модули комплексных чисел μ_1 и μ_2, соответственно, $z=x+iy$.

Отметим, что уравнение (3) при $|\mu_1|<1$ и $|\mu_2|<1$ всегда является сильно связанной эллиптической системой двух дифференциальных уравнений с действительными коэффициентами относительно действительных функций v_1 и v_2.

Следовательно, в том случае, когда система (1) состоит из двух уравнений и является сильно связанной, без ограничения общности, можно рассматривать граничные задачи для уравнения (3).

Пусть D — круг $|z|<1$, а Γ — окружность $|z|=1$. Будем говорить, что функция $V(z)$ принадлежит классу $H(D)$ (удовлетворяет условию Гельдера в области D), если существуют положительные постоянные α и c такие, что

$$|v(z_1)-v(z_2)|\leqslant c\,|z_1-z_2|^{\alpha},$$

где z_1 и z_2 — произвольные точки D, постоянные α и c не зависят от точек z_1 и z_2. Аналогично определяется класс функций $H(\Gamma)$. Будем говорить, что функция $V(z)$ принадлежит классу $H_m(D)$, если $\dfrac{\partial^{j+k}v}{\partial x^j\partial y^k}\in H(D)$ при $j+k\leqslant m$ (m — целое положительное число). Будем говорить, что $f \in H_m(\Gamma)$, если $\frac{d^k f}{ds^k} \in H(\Gamma)$ при $k \leqslant m$, где s - длина дуги контура Γ.

Под значением в точке $z_0 \in \Gamma$ функции $v(z)$, заданной в области D, будем понимать предельное значение этой функции при $z \to z_0$ изнутри области D.

Первая, вторая и третья краевые задачи для уравнения (3) в области D формулируются следующим образом:

Первая краевая задача. *Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (3), *принадлежащее классу $H_1(D)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$v(z) = f(z), \; z \in \Gamma, \tag{4}$$

где $f = f_1 + if_2$ — заданная на Γ функция из класса $H_1(\Gamma)$.

Третья краевая задача. *Найти в области D дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (3), *принадлежащее классу $H_1(D)$ и удовлетворяющее граничному условию*

$$\frac{\partial v(z)}{\partial N} + \alpha v(z) = g(z), \; z \in \Gamma, \tag{5}$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ — заданное постоянное число, $g = g_1 + ig_2$ — заданная на Γ функция из класса $H(\Gamma)$, а N—внешняя нормаль к границе Γ в точке z.

Первую краевую задачу обычно называют задачей Дирихле, а третью краевую задачу при $\alpha = 0$ называют второй краевой задачей или задачей Неймана.

Задачи (3), (4) и (3), (5) будем называть однородными, если $f \equiv 0$ и $g \equiv 0$, соответственно.

Как показывают теоремы 7—10, доказанные в § 2 данной работы, первая, вторая и третья краевые задачи для уравнения (3) в круге в вышеуказанной постановке не являются ни фредгольмовыми, ни нетеровыми. В случае, когда $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ или $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, а $\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots$, однородные задачи (3), (4) и (3), (5) имеют только нулевые решения, однако эти задачи даже в этом случае некорректны по Адамару, т. е. для любого сколь угодно малого числа ε всегда можно указать функции f и g такие, что $\max|f| < \varepsilon$, $\max|g| < \varepsilon$, но соответствующие им решения $v(z)$ задач (3), (4) и (3), (5) удовлетворяют условию $\max|v| > \varepsilon^{-1}$.

Ниже мы приведем видоизмененные первую, вторую и третью краевые задачи, поставленные естественным образом, которые в круге $|z| < 1$ являются уже корректными при $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ или $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, и $\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots$, а при $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ или $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$, и $\alpha = 0, -1, \cdots$ третья краевая задача является фредгольмовой.

Определение. Будем говорить, что функция $F(z)$ принадлежит классу $A_{m,n}(r)$, если она удовлетворяет следующим условиям: 1) $F(z)$ аналитична в кольце $r < |z| < 1$ и непрерывна в замкнутом кольце

$r \leqslant z < 1$; 2) $F(z) \in H_m$ на окружности $|z|=1$ и $F(z) \in H_n$ на окружности $|z|=r$. Класс функций $H_m(\Gamma)$ определен выше.

Из доказанных в § 2 теорем 7—10 следует, что естественно постановку задач (3), (4) и (3), (5) видоизменить следующим образом:

Видоизмененная первая краевая задача. *Найти в круге* $|z|<1$ *дважды непрерывно дифференцируемое решение уравнения* (3), *принадлежащее классу* $H_1(D)$ *и удовлетворяющее граничному условию*

$$v(z) = F(z) \text{ при } |z| = 1, \tag{6}$$

где $F(z)$ — *заданная функция, принадлежащая классу* $A_{1,1}(|\mu_1|)$ *при* $\mu_1 \neq \mu_2$ *и принадлежащая классу* $A_{1,0}(|\mu_1|)$ *при* $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$.

Видоизмененная третья краевая задача. *Найти в круге* $|z|<1$ *решение уравнения* (3), *принадлежащее классу* $H_2(D)$ *и удовлетворяющее граничному условию*

$$\frac{\partial v(z)}{\partial N} + \alpha v(z) = \Phi(z) \text{ при } |z|=1, \tag{7}$$

где $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ — *постоянное число,* $\dfrac{\partial v}{\partial N}$ — *производная по внешней нормали к окружности* $|z| = 1$, *а* $\Phi(z)$ — *заданная функция, принадлежащая классу* $A_{1,1}(|\mu_1|)$ *при* $\mu_1 \neq \mu_2$ *и принадлежащая классу* $A_{1,0}(|\mu_1|)$ *при* $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$.

Задачи (3), (6) и (3), (7) при $F(z) \equiv 0$ и $\Phi(z) \equiv 0$ будем называть однородными задачами (3), (6) и (3), (7).

Определим норму решения $v(z)$ уравнения (3) и норму функции $F(z)$ класса $A_{m,n}(|\mu_1|)$ следующим образом:

$$\|v\| = \max_{|z|<1} |v(z)|, \quad \|F\| = \max_{|\mu_1|<|z|<1} |F(z)|. \tag{8}$$

Приведем теоремы, которые в какой-то мере показывают преимущество постановки первой, второй и третьей краевых задач для уравнения (3) в круге $|z|<1$ в видоизмененном виде. Эти теоремы будут доказаны в §§ 3, 4.

Теорема 1. *Пусть* $|\mu_2|<|\mu_1|<1$ *или* $\mu_1=\mu_2\neq 0$, $|\mu_1|<1$. *Тогда задача* (3), (6) *всегда имеет и притом единственное решение, и для решения* $v(z)$ *этой задачи имеет место оценка*

$$\|v\| \leqslant c\|F\|, \tag{9}$$

где c — *положительная постоянная, зависящая только от чисел* μ_1 *и* μ_2.

Теорема 2. *Пусть* $|\mu_2|<|\mu_1|<1$ *или* $\mu_2=\mu_1\neq 0$, $|\mu_1|<1$, *а* $\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots$. *Тогда задача* (3), (7) *всегда имеет и притом единственное решение, и для решения* $v(z)$ *этой задачи имеет место оценка*

$$\|v\| \leqslant c\|\Phi\|, \tag{10}$$

где c — *положительная постоянная, зависящая только от* α, μ_1 *и* μ_2.

Теорема 3. *Пусть* $\mu_1=\mu_2\neq 0$, $|\mu_1|<1$, $\alpha=-n$, *где* n — *целое неотрицательное число. Тогда однородная задача* (3), (7) *имеет одно линейно независимое решение* $v=\text{const}$ *при* $n=0$ *и два линейно независимых решения* $v=(z+\mu_1\bar{z})$ *и* $v=\bar{z}\,(z+\mu_1\bar{z})$ *при* $n>0$, *неоднородная задача* (3), (7) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\Phi(z)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\int_\gamma \frac{z\,\Phi(z)}{z^2+\mu_1}\,dz=0,\ \text{при}\ n=0,$$

$$\int_\gamma \frac{z^2\,\Phi(z)}{z^2+\mu_1}\,dz=0,\ \int_\gamma \frac{z^2\,\Phi(z)\,dz}{(z^2+\mu_1)^2}=0,\ \text{при}\ n=1,$$

$$\int_\gamma \frac{z^{n-1}\,\Phi(z)\,dz}{(z^2+\mu_1)^n}=0,\ \int_\gamma \frac{z^{n+1}\,\Phi(z)\,dz}{(z^2+\mu_1)^{n+1}}=0,\ \text{при}\ n>1,$$

где γ *есть граница кольца* $|\mu_1|<|z|<1$ *и интегрирование совершается в направлении, оставляющем кольцо слева,* $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$.

Теорема 4. *Пусть* $|\mu_2|<|\mu_1|<1$, $\alpha=-n$, *где* n — *целое неотрицательное число. Тогда однородная задача* (3), (7) *имеет одно линейно независимое решение* $v=\text{const}$ *при* $n=0$ *и два линейно независимых решения* $v=(z+\mu_1\bar{z})^n$ *и* $v=(z+\mu_2\bar{z})^n$ *при* $n>0$; *неоднородная задача* (3), (7) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $\Phi(z)$ *удовлетворяет одному условию ортогональности при* $n=0$ *и двум условиям ортогональности при* $n>0$.

Здесь условием ортогональности на функцию $\Phi(z)$ называется условие вида

$$\int_\gamma \Phi(z)\,\psi(z)\,dz=0.$$

В работе [1] приведены примеры эллиптических систем, для которых однородная первая краевая задача в круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Следующая теорема показывает, что вторая и третья однородные краевые задачи для сильно связанных эллиптических систем в круге, вообще говоря, также могут иметь бесконечное число линейно независимых решений.

Теорема 5. *Однородные задачи* (3), (6) *и* (3), (7) *имеют бесконечное множество линейно независимых решений тогда и только тогда, когда* $\frac{1}{2\pi}(\arg\mu_1-\arg\mu_2)$ — *рациональное число,* $\mu_1\neq\mu_2$, $|\mu|_1=|\mu_2|$ *или* $\mu_1=\mu_2=0$.

Теорема 5 для задачи (3), (6) будет доказана в § 3, а для задачи (3), (7) — в § 4.

В работе [1] доказано, что однородная первая краевая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \bar{z}^2}=0 \tag{11}$$

в круге имеет бесконечное число линейно независимых решений. Используя общее решение уравнения (11), легко показать, что в круге $|z|<1$ однородная вторая краевая задача для уравнения (11) также имеет бесконечное число линейно независимых решений.

Поставим теперь задачу Коши для уравнения (1) следующим образом:

Задача Коши. *Найти в круге $|z|<1$ дважды непрерывно дифференцируемое решение $v(z)$ уравнения* (11), *принадлежащее классу $H_1(D)$ и удовлетворяющее граничным условиям*

$$v(z)=\psi_1(z)\bar{z},\ \frac{\partial v}{\partial N}=\psi_2(z)\bar{z},\ \text{при } |z|=1, \tag{12}$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — заданные аналитические функции в круге $|z|<1$, принадлежащие классам $H_1(D)$ и $H(D)$, соответственно, и удовлетворяющие условию

$$\psi_1(0)=\psi_2(0). \tag{13}$$

Естественность такой постановки задачи Коши для уравнения (11) в круге $|z|<1$ следует из теоремы 11, доказанной в § 2. Следующая теорема показывает корректность задачи Коши в приведенной выше постановке.

Теорема 6. *Задача* (11), (12) *всегда имеет и притом единственное решение. Это решение имеет вид*

$$v(z)=\bar{z}\psi_1(z)+\frac{1-z\bar{z}}{2}\left[\frac{\psi_1(z)-\psi_2(z)}{z}+\psi_1'(z)\right],\psi'(z)=\frac{d\psi}{dz}. \tag{14}$$

Применяя неравенство Коши

$$|\psi_1'(z)|\leqslant(1-|z|)^{-1}\max_{|\zeta|=1}|\psi_1(\zeta)|,$$

из формулы (14) получим

$$\|v\|\leqslant\frac{1}{2}\max_{|z|=1}|\psi_2(z)|+\frac{5}{2}\max_{|z|=1}|\psi_1(z)|.$$

Теоремы 6 и 11 показывают, что для уравнения (11) вместо первой, второй и третьей краевых задач более естественно рассматривать задачу (11), (12) (т. е. задачу Коши).

В настоящей работе исследуются качественные и конструктивные свойства решений уравнения (3) в круге и строятся решения задачи (3), (6) и (3), (7) в явном виде. Эти исследования дают примерное представление о том, как можно поставить первую, вторую и третью краевые задачи для сильно связанных систем (1) в случае любого числа уравнений, чтобы эти задачи стали фредгольмовыми, и какими методами можно их решать.

§ 2. Некоторые качественные и конструктивные свойства решений уравнения (3)

Результаты данного параграфа существенно используются для исследования задач, сформулированных в § 1.

Напишем общее представление решения уравнения (3) в круге $|z| < 1$. Обозначим через D_μ внутренность эллипса в комплексной плоскости $t = \xi + i\eta$, которая является образом круга $|z| < 1$ при отображении, осуществляемом функцией $t = z + \mu\bar{z}$, где μ — постоянное число, $|\mu| < 1$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Пусть $\varphi(t)$ — аналитическая функция в области D_μ. Ясно, что функция $\varphi(z + \mu\bar{z})$ определена в единичном круге $|z| < 1$. Функцию $\varphi(z + \mu\bar{z})$ будем называть аналитической функцией относительно аргумента $z + \mu\bar{z}$. Через D будем всегда обозначать круг $|z| < 1$, а через Γ — окружность $|z| = 1$.

Уравнение (3) можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z}\right) v = 0. \qquad (15)$$

Общее решение уравнения

$$\frac{\partial \omega}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial \omega}{\partial z} = 0 \qquad (16)$$

в круге $|z| < 1$ дается формулой

$$\omega = \varphi(z + \mu_1 \bar{z}), \qquad (17)$$

где $\varphi(z + \mu_1\bar{z})$ — произвольная аналитическая функция относительно аргумента $z + \mu_1\bar{z}$ при $|z| < 1$. Отсюда и из (15) получим

$$\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial v}{\partial z} = \varphi(z + \mu_1 \bar{z}), \qquad (18)$$

где $\varphi(z + \mu_1\bar{z})$ — аналитическая функция относительно аргумента $z + \mu_1\bar{z}$ при $|z| < 1$.

Легко проверить, что частное решение $v_0(z)$ уравнения (18) дается формулой

$$v_0(z) = \begin{cases} \bar{z}\varphi(z + \mu_1 \bar{z}), & \text{при } \mu_1 = \mu_2, \\ \varphi_1(z + \mu_1 \bar{z}), & \text{при } \mu_1 \neq \mu_2, \end{cases} \qquad (19)$$

где

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \int_0^t \varphi(\zeta)\, d\zeta. \qquad (20)$$

Из (15) — (20) следует, что в круге $|z| < 1$ общее решение уравнения (3) имеет вид

$$v(z) = \varphi_1(z + \mu_1\bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2\bar{z}), \text{ при } \mu_1 \neq \mu_2, \qquad (21)$$

$$v(z) = \bar{z}\varphi_1(z + \mu_1\bar{z}) + \varphi_2(z + \mu_2\bar{z}), \text{ при } \mu_1 = \mu_2, \qquad (22)$$

где $\varphi_1(z + \mu_1\bar{z})$ и $\varphi_2(z + \mu_2\bar{z})$ — произвольные аналитические функции относительно аргументов $z + \mu_1\bar{z}$ и $z + \mu_2\bar{z}$ при $|z| < 1$.

Пусть D_μ — область, определенная в начале этого параграфа, а Γ_μ — ее граница, $|\mu| < 1$. Для исследования некоторых свойств уравнения (3) нам потребуется следующая

Лемма 1. *Если $\varphi(t)$ — аналитическая функция в области D_μ, принадлежащая классу $H_k(D_\mu)$ (k — целое неотрицательное число), то она представима в виде:*

$$\varphi(t)=\psi\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4\mu}}{2}\right)+\psi\left(\frac{2\mu}{t+\sqrt{t^2-4\mu}}\right), \tag{23}$$

где $\psi(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|<1$, принадлежащая классу $H_k(D)$, причем $\psi(z)$ определяется по $\varphi(t)$ единственным образом.

В (2) под $\sqrt{t^2-4\mu}$ понимается ветвь, непрерывная вне отрезка с концами в точках $t_1=2\sqrt{\mu}$ и $t_2=-2\sqrt{\mu}$ и удовлетворяющая условию

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\sqrt{t^2-4\mu}=1.$$

Эту ветвь можно определить еще следующим образом:

$$\sqrt{t^2-4\mu}=\sqrt{|t^2-4\mu|}\, e^{\frac{1}{2}i(\arg(t+2\sqrt{\mu})+\arg(t-2\sqrt{\mu}))}, \tag{24}$$

$$\sqrt{\mu}=\sqrt{|\mu|}\, e^{i\frac{1}{2}\arg\mu}, \tag{25}$$

где аргументы чисел μ, $\mu+2\sqrt{\mu}$ и $\mu-2\sqrt{\mu}$ определяются единственным образом из неравенств

$$0\leqslant\arg\mu<2\pi,$$

$$\frac{1}{2}\arg\mu\leqslant\arg(t+2\sqrt{\mu})<2\pi+\frac{1}{2}\arg\mu,$$

$$\frac{1}{2}\arg\mu\leqslant\arg(t-2\sqrt{\mu})<2\pi+\frac{1}{2}\arg\mu.$$

Доказательство леммы 1. Легко проверить, что если $\psi(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и принадлежит классу $H_k(D)$, то правая часть формулы (23) аналитична в области D_μ и принадлежит классу $H_k(D_\mu)$. Пусть функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям леммы 1. Так как обе части равенства (23) аналитичны в области D_μ, то равенство (23) эквивалентно равенству

$$\varphi(t)=\psi\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4\mu}}{2}\right)+\psi\left(\frac{2\mu}{t+\sqrt{t^2-4\mu}}\right),\ t\in\Gamma_\mu. \tag{26}$$

По определению области D_μ точка $t\in\Gamma_\mu$ тогда и только тогда, когда

$$t=e^{i\alpha}+\mu e^{-i\alpha},\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi. \tag{27}$$

Подставляя значение t из (27) в (26), получим

$$\varphi(e^{i\alpha}+\mu e^{-i\alpha})=\psi(e^{i\alpha})+\psi(\mu e^{-i\alpha}),\ 0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi. \tag{28}$$

Равенство (28) можно еще записать в виде

$$\varphi\left(z+\frac{\mu}{z}\right)=\psi(z)+\psi\left(\frac{\mu}{z}\right),\quad |z|=1. \tag{29}$$

Так как $\varphi(t)$ — аналитическая функция в области D_μ и $\varphi(z)\in H_k(D_\mu)$, то функция $\varphi\left(z+\frac{\mu}{z}\right)$ аналитична в кольце $|\mu|<|z|<1$ и непрерывна в замкнутом кольце $|\mu|\leqslant z\leqslant 1$.

Поэтому условие (29) эквивалентно условию

$$\varphi\left(z+\frac{\mu}{z}\right)=\psi(z)+\psi\left(\frac{\mu}{z}\right),\ \text{при}\ |\mu|\leqslant z\leqslant 1. \tag{30}$$

Рассмотрим ряд Лорана

$$\varphi\left(z+\frac{\mu}{z}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k \tag{31}$$

функции $\varphi\left(z+\frac{\mu}{z}\right)$ в кольце $|\mu|<|z|<1$. Как известно, коэффициенты разложения (31) определяются формулами

$$2\pi i\cdot a_k=\int\limits_{|z|=\sqrt{|\mu|}}\varphi\left(z+\frac{\mu}{z}\right)z^{-k-1}\,dz\quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm\cdots). \tag{32}$$

Из (32) после замены $z=\frac{\mu}{\zeta}$ получим

$$2\pi i\cdot a_{-k}=\int\limits_{|z|=\sqrt{|\mu|}}\varphi\left(z+\frac{\mu}{z}\right)z^{k-1}\,dz=\mu^k\int\limits_{|\zeta|=\sqrt{|\mu|}}\varphi\left(\frac{\mu}{\zeta}+\zeta\right)\zeta^{-k-1}\,d\zeta=$$
$$=2\pi i a_k\mu^k. \tag{33}$$

Из (31) и (32) следует, что равенство (30) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\psi(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^k. \tag{34}$$

Если функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $H_k(D_\mu)$, то $\psi(z)$, определенная формулой (34), принадлежит классу $H_k(D)$. Тем самым лемма 1 доказана.

Пусть $\mu_1\neq\mu_2$. Тогда, как мы видели выше, общее решение уравнения (3) дается формулой (21). Из (21) получим

$$(-\mu_2+\mu_1)\,\varphi_1'(z+\mu_1\bar z)=\frac{\partial v}{\partial\bar z}-\mu_2\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{35}$$

$$(\mu_2-\mu_1)\,\varphi_2'(z+\mu_2\bar z)=\frac{\partial v}{\partial\bar z}-\mu_1\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{36}$$

где $\varphi_1'(z+\mu_1\bar z)$ и $\varphi_2'(z+\mu_2\bar z)$ — производные функций $\varphi_1(z+\mu_1\bar z)$ и $\varphi_2(z+\mu_2\bar z)$ по аргументам $z+\mu_1\bar z$ и $z+\mu_2\bar z$, соответственно.

Следовательно, если $\mu_1\neq\mu_2$ и решение $v(z)$ уравнения (3) принадлежит классу $H_k(D)$, то функции $\varphi_1(z+\mu_1\bar z)$ и $\varphi_2(z+\mu_2\bar z)$, входящие в представление (21), также принадлежат классу $H_k(D)$. Из леммы

1 и формулы (21) следует, что если $\mu_1 \neq \mu_2$, то общее решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_k(D)$ (где k — фиксированное натуральное число), дается формулой

$$v(z)=\psi_1\left(\frac{z+\mu_1\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_1\bar{z})^2-4\mu_1}}{2}\right)+\psi_1\left(\frac{2\mu_1}{z+\mu_1\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_1\bar{z})^2-4\mu_1}}\right)+$$

$$+\psi_2\left(\frac{z+\mu_2\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_2\bar{z})^2-4\mu_2}}{2}\right)+\psi_2\left(\frac{2\mu_2}{z+\mu_2\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_2\bar{z})^2-4\mu_2}}\right), \quad (37)$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — произвольные аналитические функции в круге $|t|<1$, принадлежащие классу $H_k(D)$.

В (37) под $\sqrt{(z+\mu_j\bar{z})^2-4\mu_j}$ подразумевается та ветвь, которая определяется по формуле (25), где $t=z+\mu_j\bar{z}$, $\mu=\mu_j$.

Ясно, что если в (37) $\psi_1(z)$ заменить на $\psi_1(z)+\psi_2(0)$, а $\psi_2(z)$ — на $\psi_2(z)-\psi_2(0)$, то значение выражения (37) не изменится. Поэтому в (37) без ограничения общности можно предполагать, что $\psi_2(0)=0$. Тогда, используя (21), (35), (36) и лемму 1, легко показать, что в представлении (37) функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определяется по $v(z)$ единственным образом.

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $|\mu_2|\leqslant|\mu_1|<1$. Из (37) получим

$$v(z)=\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+\psi_2(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) \text{ при } |z|=1. \quad (38)$$

Из равенства (38) непосредственно следует справедливость следующей теоремы.

Теорема 7. *Если $\mu_1\neq\mu_2$ и $v(z)$ является в круге $|z|<1$ решением уравнения* (3), *принадлежащим классу* $H_k(D)$, *то значение $v(z)$ на окружности $|z|=1$ совпадает со значением на этой окружности некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{k,k}(|\mu_1|)$.*

Класс функций $A_{m,n}(r)$ определен в § 1.

Пусть решение $v(z)$ уравнения (3) ($\mu_1\neq\mu_2$), заданное формулой (21), принадлежит классу $H_k(D)$. Тогда

$$\alpha v(z)+\frac{\partial v(z)}{\partial N}=\alpha(\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})+\varphi_2(z+\mu_2\bar{z}))+$$

$$+(z+\mu_1\bar{z})\varphi_1'(z+\mu_1\bar{z})+(z+\mu_2\bar{z})\varphi_2'(z+\mu_2\bar{z}), \quad |z|=1, \quad (39)$$

где N — внешняя нормаль к границе Γ в точке z. Так как функции $(z+\mu_1\bar{z})\varphi_1'(z+\mu_1\bar{z})+\alpha\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})$ и $(z+\mu_2\bar{z})\varphi_2'(z+\mu_2\bar{z})+\alpha\varphi_2(z+\mu_2\bar{z})$ аналитичны относительно аргументов $z+\mu_1\bar{z}$ и $z+\mu_2\bar{z}$, соответственно, при $|z|<1$ и, в силу (35), (36), принадлежат классу $H_{k-1}(D)$, то, согласно лемме 1, они представимы в виде

$$\alpha\varphi_j(z+\mu_j\bar{z})+(z+\mu_j\bar{z})\varphi_j'(z+\mu_j\bar{z})=\psi_j\left(\frac{z+\mu_j\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_j\bar{z})^2-4\mu_j}}{2}\right)+$$

$$+\psi_j\left(\frac{2\mu_j}{z+\mu_j\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_j\bar{z})^2-4\mu_j}}\right),\ j=1,2, \tag{40}$$

где $\psi_j(t)$ — аналитические функции в круге $|t|<1$, принадлежащие классу $H_{k-1}(D)$.

Легко убедиться, что коэффициент при t^n ряда Тейлора функции $t\varphi_j'(t)+\alpha\varphi_j(t)$ в окрестности $t=0$ при $\alpha=-n$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ равен нулю. Отсюда следует, что в представленич (40) при $\alpha=-n$ $(n=0, 1, \cdots)$ коэффициент при t^n ряда Тейлора функции

$$\psi_j\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4\mu_j}}{2}\right)+\psi_j\left(\frac{2\mu_j}{t+\sqrt{t^2-4\mu_j}}\right)$$

равен нулю, т. е.

$$\frac{d^n}{dt^n}\left[\psi_j\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4\mu_j}}{2}\right)+\psi_j\left(\frac{2\mu_j}{t+\sqrt{t^2-4\mu_j}}\right)\right]=0,\ \text{при}\ t=0 \tag{41}$$

$$(j=1, 2;\ \alpha=-n).$$

В представлении (40) условие (41) будет использовано в § 4.

Подставляя выражения для функций $\alpha\varphi_j(z+\mu_j\bar{z})+(z+\mu_j\bar{z})\varphi_j'(z+\mu_j\bar{z})$ $(j=1, 2)$ из (40) в (39), получим

$$\alpha v(z)+\frac{\partial v(z)}{\partial N}=\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+\psi_2(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right),\ |z|=1. \tag{42}$$

Из равенства (42) следует

Теорема 8. *Если $\mu_1\neq\mu_2$ и $v(z)$ является в круге $|z|<1$ решением уравнения* (3), *принадлежащим классу $H_k(D)$, то значение $\alpha v(z)+\dfrac{\partial v(z)}{\partial N}$ на окружности $|z|=1$ совпадает со значением на этой окружности некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{k-1,\,k-1}(|\mu_1|)$.*

Пусть теперь $\mu_1=\mu_2\neq 0$. Тогда общее решение уравнения (3) дается формулой (22). Из (22) получим

$$\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})=\frac{\partial v}{\partial\bar{z}}-\mu_1\frac{\partial v}{\partial z}, \tag{43}$$

$$\varphi_2(z+\mu_1\bar{z})=v-\left(\frac{\partial v}{\partial\bar{z}}-\mu_1\frac{\partial v}{\partial z}\right)\bar{z}. \tag{44}$$

Следовательно, если $v(z)\in H_k(D)$, то функции $\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})$ и $\varphi_2(z+\mu_2\bar{z})$, входящие в представление (22), принадлежат классу $H_{k-1}(D)$, а $\bar{z}\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})+\varphi_2(z+\mu_2\bar{z})\in H_k(D)$.

Следовательно, из леммы 1 и формулы (22) получим, что, если $\mu_1=\mu_2\neq 0$ и решение $v(z)$ уравнения (3) принадлежит классу $H_k(D)$, то оно представляется в виде

$$v(z)=\bar{z}\left[\psi_1\left(\frac{z+\mu_1\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_1\bar{z})^2-4\mu_1}}{2}\right)+\right.$$

$$+\psi_1\left(\frac{2\mu_1}{z+\mu_1\bar z+\sqrt{(z+\mu_1\bar z)^2-4\mu_1}}\right)\Bigg|+\psi_2\left(\frac{z+\mu_2\bar z+\sqrt{(z+\mu_2\bar z)^2-4\mu_2}}{2}\right)+$$

$$+\psi_2\left(\frac{2\mu_2}{z+\mu_2\bar z+\sqrt{(z+\mu_2\bar z)^2-4\mu_2}}\right), \tag{45}$$

где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — аналитические функции в круге $|z|<1$, принадлежащие классу $H_{k-1}(D)$.

Из (45) получим

$$v(z)=\frac{1}{z}\left(\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)\right)+\psi_2(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right),\ |z|=1. \tag{46}$$

Из (46) следует

Теорема 9. *Если $\mu_1=\mu_2\neq 0$ и $v(z)$ в круге $|z|<1$ является решением уравнения* (3), *принадлежащим классу $H_k(D)$, то значения функции $v(z)$ на окружности $|z|=1$ совпадает со значением на этой окружности некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{k,k-1}(|\mu_1|)$.*

Пусть $\mu_1=\mu_2\neq 0$ и решение $v(z)$ уравнения (3), заданное формулой (22), принадлежит классу $H_k(D)$, где k — фиксированное целое число ($k>2$). Тогда

$$\alpha v(z)+\frac{\partial v(z)}{\partial N}=\bar z\left[(1+\alpha)\varphi_1(z+\mu_1\bar z)+(z+\mu_1\bar z)\varphi_1'(z+\mu_1\bar z)\right]+$$

$$+\alpha\varphi_2(z+\mu_2\bar z)+(z+\mu_2\bar z)\varphi_2'(z+\mu_2\bar z),\ |z|=1. \tag{47}$$

По лемме 1 функции $(z+\mu_1\bar z)\varphi_1'(z+\mu_1\bar z)+(1+\alpha)\varphi_1(z+\mu_1\bar z)$, $(z+\mu_2\bar z)\varphi_1'(z+\mu_2\bar z)+\alpha\varphi_2(z+\mu_2\bar z)$, входящие в (47), представимы в виде

$$(1+\alpha)\varphi_1(z+\mu_1\bar z)+(z+\mu_1\bar z)\varphi_1'(z+\mu_1\bar z)=\psi_1\left(\frac{z+\mu_1\bar z+\sqrt{(z+\mu_1\bar z)^2-4\mu_1}}{2}\right)+$$

$$+\psi_1\left(\frac{2\mu_1}{z+\mu_1\bar z+\sqrt{(z+\mu_1\bar z)^2-4\mu_1}}\right),\ |z|\leqslant 1; \tag{48}$$

$$\alpha\varphi_2(z+\mu_2\bar z)+(z+\mu_2\bar z)\varphi_2'(z+\mu_2\bar z)=\psi_2\left(\frac{z+\mu_2\bar z+\sqrt{(z+\mu_2\bar z)^2-4\mu_2}}{2}\right)+$$

$$+\psi_2\left(\frac{2\mu_2}{z+\mu_2\bar z+\sqrt{(z+\mu_2\bar z)^2-4\mu_2}}\right),\ |z|\leqslant 1, \tag{49}$$

где $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ — аналитические функции в круге $|t|<1$, принадлежащие классу $H_{k-2}(D)$; $t=\xi+i\eta$.

Как мы выяснили выше (см. формулы (40), (41)), при $\alpha=-n$, где n — целое положительное число, функции ψ_1 и ψ_2 удовлетворяют условиям

$$\frac{d^{n+j-2}}{dt^{n+j-2}}\left[\psi_j\left(\frac{t+\sqrt{t^2-4\mu_j}}{2}\right)+\psi_j\left(\frac{2\mu_j}{t+\sqrt{t^2-4\mu_j}}\right)\right]=0,\ \text{при } t=0; \tag{50}$$

$$(j=1,\ 2),$$

если же $\alpha=0$, то функция $\psi_2(t)$ удовлетворяет условию

$$\psi_2(i\sqrt{\mu_1})+\psi_2(-i\sqrt{\mu_1})=0.$$

Подставляя в (47) представления (48) и (49) функций

$$(1+\alpha)\,\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})+(z+\mu_1\bar{z})\,\bar{\varphi}_1'(z+\mu_1\bar{z}) \text{ и } \alpha\varphi_2(z+\mu_2\bar{z})+$$
$$+(z+\mu_2\bar{z})\,\varphi_2'(z+\mu_2\bar{z}),$$

получим

$$\alpha v(z)+\frac{\partial v(z)}{\partial N}=\frac{1}{z}\left(\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)\right)+\psi_2(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right),\ |z|=1. \quad (51)$$

Из равенства (51) следует

Теорема 10. *Пусть* $\mu_1=\mu_2\neq 0$ *и* $v(z)$ *является решением уравнения* (3) *в круге* $|z|<1$, *принадлежащим классу* $H_k(D)$ (k—*целое число*, $k\geqslant 2$). *Тогда значение* $\alpha v(z)+\dfrac{\partial v(z)}{\partial N}$ *на окружности* $|z|=1$ *совпадает со значением на этой окружности некоторой функции* $F(z)$, *принадлежащей классу* $A_{k-1,\,k-2}(|\mu_1|)$.

Общее решение уравнения (11) в круге $|z|<1$ дается формулой

$$v(z)=\overline{\tilde{\varphi}_2(z)}+\bar{z}\overline{\tilde{\varphi}_1(z)}, \quad (52)$$

где $\tilde{\varphi}_1(z)$ и $\tilde{\varphi}_2(z)$ — произвольные аналитические функции при $|z|<1$.

Ясно, что аналитические функции $\tilde{\varphi}_1(z)$, и $\tilde{\varphi}_2(z)$ всегда можно представить в виде

$$\tilde{\varphi}_2(z)=\varphi_2(z),\ \tilde{\varphi}_1(z)=\varphi_1(z)-z\varphi_2(z), \quad (53)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — аналитические функции в круге $|z|<1$. Подставляя выражение $\tilde{\varphi}_1(z)$ и $\tilde{\varphi}_2(z)$ из (53) в (52), получим представление общего решения уравнения (11) в виде

$$v(z)=\bar{z}\,\overline{\varphi_1(z)}+(1-z\bar{z})\,\overline{\varphi_2(z)}, \quad (54)$$

где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — произвольные аналитические функции в круге $|z|<1$.

Пусть решение $v(z)$ уравнения (11) принадлежит классу $H_k(D)$ и представлено в виде (54), где k — натуральное число. Из (54) имеем

$$v(z)-\bar{z}\frac{\partial v(z)}{\partial \bar{z}}=\overline{\varphi_2(z)}. \quad (55)$$

Отсюда следует, что $\varphi_2(z)\in H_{k-1}(D)$.

Используя формулу Коши, легко доказать, что если $\varphi_2(z)\in H_{k-1}(D)$, то

$$\varphi_2'(z)\,(1-z\bar{z})\in H_{k-1}(D),\ (1-z\bar{z})\,\varphi_2(z)\in H_k(D), \quad (56)$$

$$\lim_{z\to z_0}\,(1-z\bar{z})\,\varphi_2'(z)=0,\ |z_0|=1,\ |z|<1,\ k\geqslant 1.$$

Из (54) и (56) следует, что $\varphi_1(z)\in H_k(D)$. Следовательно, в круге $|z|<1$ общее решение уравнения (11), принадлежащее классу $H(D)$, дается формулой (54), где $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ — произвольные аналитические функции, принадлежащие классам $H_k(D)$ и $H_{k-1}(D)$, соответственно.

Из (54) и (57) вытекает, что если $v(z) \in H_k(D)$, (k — натуральное число), то

$$v(z)\Big|_\Gamma = \bar{z}\varphi_1(z), \quad \frac{\partial v}{\partial N}\Big|_\Gamma = \bar{z}\,(\varphi_1(z) + z\varphi_1'(z) - 2z\varphi_2(z)). \tag{58}$$

В работе [1] доказано, что если $v(z)$ является в круге $|z|<1$ решением уравнения (11), то значение функции $zv(z)$ на окружности $|z|=1$ совпадает с граничным значением аналитической функции в круге $|z|<1$.

Из формулы (58) следует

Теорема 11. *Если $v(z)$ является решением уравнения* (11) *в круге $|z|<1$ и $v(z) \in H_k(D)$ (k — натуральное число), то значения функций $zv(z)$ и $z\dfrac{\partial v(z)}{\partial N}$ на окружности $|z|=1$ совпадают со значениями на этой окружности некоторых аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, принадлежащих классам $H_k(D)$ и $H_{k-1}(D)$, соответственно, и удовлетворяющих условию*

$$\psi_1(0) = \psi_2(0). \tag{59}$$

Из формул (54) и (58), в частности, следует, что задача (11), (12) имеет и притом единственное решение, задаваемое формулой (14).

§ 3. Исследование задачи (3), (6)

Из теорем 7 и 9 следует, что для разрешимости задачи (3), (4) необходимо, чтобы граничное условие $f(z)$ совпадало со значением на окружности $|z|=1$ некоторой функции $F(z)$, принадлежащей классу $A_{1,0}(|\mu_1|)$, при $\mu_1=\mu_2\neq 0$ и классу $A_{1,1}(|\mu_1|)$, при $\mu_1\neq\mu_2$. Поэтому при $|\mu_1|+|\mu_2|\neq 0$ более естественно рассматривать первую краевую задачу в круге $|z|<1$ в видоизмененном виде, т. е. задачу (3), (6). В этом параграфе через D также будем обозначать круг $|z|<1$, а через Γ — окружность $|z|=1$.

Рассмотрим сначала задачу (3), (6) для случая, когда $\mu_1\neq\mu_2$, $|\mu_2|\leqslant|\mu_1|<1$. Тогда, как мы видели в § 2, в круге $|z|<1$ общее решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_1(D)$, дается формулой (37), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ — произвольные аналитические функции при $|z|<1$, принадлежащие классу $H_1(D)$ и удовлетворяющие условию

$$\psi_2(0) = 0. \tag{60}$$

Подставляя выражение (37) общего решения уравнения (3) в краевое условие (6), для определения функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ получим краевое условие

$$\psi_1(z) + \psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right) + \psi_2(z) + \psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right) = F(z), \quad |z|=1. \tag{61}$$

Так как левая и правая части равенства (61) являются аналитическими функциями в кольце $|\mu_1|<|z|<1$, то это равенство эквивалентно следующему:

$$\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+\psi_2(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right)=F(z),\ |\mu_1|<|z|<1. \tag{62}$$

Ясно, что аналитическую функцию $\psi_1(z)$ всегда можно представить в виде

$$\psi_1(z)=\omega_1(z)+c, \tag{63}$$

где $\omega(z)$ — аналитическая функция, $\omega(0)=0$, а c — постоянная. Подставляя представление (63) функции $\psi_1(z)$ в (62), получим

$$\omega_1(z)+\omega_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+\psi_2(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right)+2c=F(z). \tag{64}$$

Пусть $F(z)$ и $\Phi(z)$ — аналитические функции в кольце $|\mu_1|<|z|<1$.

Обозначим через $F_1(z)$ и $F_2(z)$ правильную и главную части разложения Лорана функции $F(z)$, а через $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ правильную и главную части разложения Лорана функции $\Phi(z)$ в кольце $|\mu_1|<|z|<1$. Как известно, если

$$\Phi(z)=F(z),\ |\mu_1|<|z|<1, \tag{65}$$

то

$$F_1(z)=\Phi_1(z),\ \text{при } |z|<1, \tag{66}$$

$$F_2(z)=\Phi_2(z),\ \text{при } |z|>|\mu_1|. \tag{67}$$

Используя (65)—(67), из (64) получим

$$\omega_1(z)+\psi_2(z)=F_1(z)-F_1(0),\ |z|<1, \tag{68}$$

$$\omega_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right)=F_2(z),\ |z|>|\mu_1|, \tag{69}$$

$$c=\frac{1}{2}F_1(0), \tag{70}$$

где

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{F(t)\,dt}{t-z},\quad F_2(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=|\mu_1|}\frac{F(t)\,dt}{t-z} \tag{71}$$

$$(t=\xi+i\eta).$$

Уравнение (69) можно записать также в виде

$$\omega_1(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}z\right)=F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right),\ |z|<1. \tag{72}$$

Из (68) и (72) имеем

$$\omega_1(z)=F_1(z)-F_1(0)-\psi_2(z),\ |z|<1, \tag{73}$$

$$\psi_2(z)-\psi_2\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}z\right)=F_1(z)-F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right)-F_1(0),\ |z|<1. \tag{74}$$

Пусть

$$F(z)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}a_kz^k \tag{75}$$

— разложение Лорана функции $F(z)$ при $|\mu_1|<|z|<1$.

Тогда

$$F_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,\ F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}\left(\frac{z}{\mu_1}\right)^k. \tag{76}$$

Подставляя (76) в (74), получим для определения коэффициентов ряда Тейлора

$$\psi_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k \tag{77}$$

функции $\psi_2(z)$ уравнения

$$(\mu_1^k - \mu_2^k)\, c_k = a_k \mu_1^k - a_{-k}\ (k = 1, 2, \cdots). \tag{78}$$

Пусть $|\mu_2| < |\mu_1| < 1$, тогда из (63), (70), (73), (77) и (78) будем иметь

$$\psi_1(z) = F_1(z) - \frac{1}{2} F_1(0) - F_3(z),\ \psi_2(z) = F_3(z), \tag{79}$$

где

$$F_3(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k \mu_1^k - a_{-k}}{\mu_1^k - \mu_2^k} z^k. \tag{80}$$

Функцию $F_3(z)$ можно переписать в виде

$$F_3(z) = F_1(z) - F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right) - F_1(0) + F_4(z), \tag{81}$$

где

$$F_4(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_2^k (a_k - \mu_1^{-k} a_{-k})}{\mu_1^k - \mu_2^k} \cdot z^k.$$

В силу неравенства Коши для коэффициентов разложения (75) получим, что функция $F_4(z)$ аналитична в круге $|z| < \dfrac{|\mu_1|}{|\mu_2|}$.

Из (71) и (81) следует, что функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, определенные формулами (79), аналитичны в круге $|z| < 1$ и принадлежат классу $H_1(D)$.

Следовательно, при $|\mu_2| < |\mu_1|$ задача (3), (6) всегда имеет и притом единственное решение, и это решение дается формулой (37), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ определяются формулами (79).

Теперь оценим норму решения $v(z)$ задачи (3), (6) через норму заданной функции $F(z)$. Так как $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$, то из (37) имеем

$$\|v\| \leqslant 2\ (\max_{|z|=1} |\psi_1(z)| + \max_{|z|=1} |\psi_2(z)|). \tag{82}$$

Из (79) получим

$$\max_{|z|=1} |\psi_1(z)| \leqslant \frac{3}{2} \max_{|z|=1} |F_1(z)| + \max_{|z|=1} |F_3(z)|, \tag{83}$$

$$\max_{|z|=1} |\psi_2(z)| \leqslant \max_{|z|=1} |F_3(z)|. \tag{84}$$

В силу (79) и (74) имеем

$$|F_3(z)| \leqslant \left|F_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} z\right)\right| + |F_1(z)| + \left|F_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right)\right| + |F_1(0)|, \ |z| < 1. \tag{85}$$

Следовательно

$$\max_{|z|=1} |F_3(z)| \leqslant \max_{|z|=1} \left|F_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} z\right)\right| + 2 \max_{|z|=1} |F_1(z)| + \max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)|. \tag{86}$$

Так как $F_3(0) = 0$, то по лемме Шварца будем иметь

$$\left|F_3\left(\frac{\mu_2}{\mu_1} z\right)\right| \leqslant \left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right| |z| \max_{|z|=1} |F_3(z)|. \tag{87}$$

Из (86) и (87) получаем

$$\max_{|z|=1} |F_3(z)| < \frac{1}{|\mu_1| - |\mu_2|} \left[\max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| + \max_{|z|=1} 2 |F_1(z)|\right]. \tag{88}$$

Так как

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z), \tag{89}$$

то

$$\max_{|z|=1} |F_1(z)| \leqslant \max_{|z|=1} |F(z)| + \max_{|z|=1} |F_2(z)|, \tag{90}$$

$$\max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| < \max_{|z|=|\mu_1|} |F(z)| + \max_{|z|=|\mu_1|} |F_1(z)|. \tag{91}$$

Из (71) следует, что

$$\max_{|z|=1} |F_1(z)| < \|F\| (1 - |\mu_1|)^{-1}, \ \max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| = \frac{|\mu_1| \cdot \|F\|}{1 - |\mu_1|}. \tag{92}$$

В силу (90), (91), (92) мы имеем

$$\max_{|z|=|\mu_1|} |F_1(z)| \leqslant 2 \|F\| (1 - |\mu_1|)^{-1}, \quad \max_{|z|=|\mu_1|} |F_2(z)| = \frac{2\|F\|}{1 - |\mu_1|}. \tag{93}$$

Из (82), (83), (84), (88) и (93) получим

$$\|v\| \leqslant \frac{30 \|F\|}{(1 - |\mu_1|)(|\mu_1| - |\mu_2|)}. \tag{94}$$

Следовательно, теорема 1, сформулированная в § 1, для случая $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ полностью доказана.

Пусть $\frac{1}{\pi}[\arg \mu_1 - \arg \mu_2]$ — иррациональное число и $|\mu_1| = |\mu_2| < 1$. Тогда

$$\mu_1^k \neq \mu_2^k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Поэтому в данном случае для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, входящих в представление (37) общего решения уравнения (3), также получим формулы (79). Из (79) следует, что функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ аналитичны в круге $|z| < 1$ и принадлежат классу $H_1(D)$ тогда и только тогда, когда ряд (80) сходится в круге $|z| < 1$ и его сумма $F_3(z)$ принадлежит классу $H_1(D)$. Числа a_k $(k = 0, \pm 1, \pm \cdots)$ в (80) являются коэффициентами ряда Лорана (75) заданной функции $F(z)$.

Следовательно, справедлива

Теорема 12. *Если* $\frac{1}{\pi}[\arg\mu_1-\arg\mu_2]$ — *иррациональное число и* $|\mu_1|=|\mu_2|$, *то однородная задача* (3), (6) *имеет только нулевое решение, а неоднородная задача* (3), (6) *имеет решение тогда и только тогда, когда ряд* (80) *сходится в круге* $|z|<1$ *и его сумма принадлежит классу* $H_1(D)$. *Если* $F_3(z)$ *удовлетворяет этому условию, то решение задачи* (3), (6) *дается формулой* (37), *где* $\psi_1(z)$ *и* $\psi_2(z)$ *определяются формулами* (79).

Из теоремы 9 следует, что если $\frac{1}{\pi}[\arg\mu_1-\arg\mu_2]$ — иррациональное число и $|\mu_1|=|\mu_2|$, то задача (3), (6) для функции вида

$$F(z)=\sum_{k=-n}^{n}a_k z^k$$

всегда имеет решение, где n — любое сколь угодно большое натуральное число.

Пусть теперь числа μ_1 и μ_2 удовлетворяют условиям

$$|\mu_1|=|\mu_2|,\ \mu_1\neq\mu_2,\ \frac{1}{2\pi}[\arg\mu_1-\arg\mu_2]=\frac{m}{n},\qquad(95)$$

где m и n — целые числа, $n>1$, а дробь $\frac{m}{n}$ несократима.

Тогда система уравнений (78) относительно c_k имеет решение тогда и только тогда, когда

$$a_{-k}=\mu_1^k\cdot a_k,\ k=n,\ 2n,\ 3n,\cdots.\qquad(96)$$

Пусть выполнено условие (96). Тогда из (77) и (78) получим

$$\psi_2(z)=F_3(z)+\psi(z^n),\qquad(97)$$

где $\psi(t)$ — произвольная аналитическая функция в круге $|t|<1$ $(t=\xi+i\eta)$, а $F_3(z)$ дается формулой (80), в которой коэффициенты z^k при $k=n$, $2n$, $3n,\cdots$ считаются равными нулю.

Из (96) следует, что функцию $F_3(z)$ можно переписать в виде

$$F_3(z)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\mu_1^j}{\mu_1^j-\mu_2^j}\sum_{k=0}^{n-1}[F_1(\mu_1^k\mu_2^{-k}z)-F_2(\mu_2^k\mu_1^{1-k}z^{-1})]\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^{kj},$$

где $F_1(z)$ и $F_2(z)$ задаются формулами (71).

Так как $F(z)\in A_{11}(|\mu_1|)$, то отсюда следует, что функция $F_3(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и принадлежит классу $H_1(D)$. Следовательно, функция $\psi_2(z)$, определенная формулой (97), принадлежит классу $H_1(D)$ тогда и только тогда, когда $\psi(t)\in H_1(D)$.

Из (63), (70), (73) и (97) получим

$$\psi_1(z)=F_1(z)-\frac{1}{2}F_1(0)-F_3(z)-\psi(z^n).\qquad(98)$$

Из (37) и (96)—(98) следует

Теорема 13. *Если числа μ_1 и μ_2 удовлетворяют условиям* (95), *то однородная задача* (3), (6) *имеет бесконечное число линейно независимых решений, а для разрешимости неоднородной задачи* (3), (6) *необходимо и достаточно, чтобы функция* $F(z)$ *удовлетворяла бесконечному числу условий* (96). *Если выполнены условия* (96), *то все решения задачи* (3), (6) *даются формулой* (37), *где* $\psi_1(z)$ *и* $\psi_2(z)$ *определяются формулами* (97) *и* (98), *а* $\psi(z)$ — *произвольная аналитическая функция в круге* $|z|<1$, *принадлежащая классу* $H_1(D)$.

Пусть теперь $\mu_1=\mu_2\neq 0$, $|\mu_1|<1$. Тогда, как было показано в § 2, в круге $|z|<1$ решение $v(z)$ уравнения (3), принадлежащее классу $H_1(D)$, представляется соотношением (45), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$—аналитические функции из класса $H(D)$.

Подставляя представление (45) в граничное условие (6) и используя (46), получим для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ уравнение

$$\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+z\psi_2(z)+z\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right)=zF(z),\ |z|=1. \tag{99}$$

Воспользовавшись формулой Племеля Сохоцкого (см. [5], стр. 66), уравнение (99) можно переписать в виде

$$\lim_{\substack{t\to z\\ |t|<1}}[\psi_1(t)+t\psi_2(t)-\Phi_1(t)]=\lim_{\substack{t\to z\\ |t|>1}}\left[-\psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right)-\psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)t-\Phi_1(t)\right], \tag{100}$$

где $|z|=1$,

$$\Phi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{zF(z)}{z-t}\,dz. \tag{101}$$

Так как функция $\psi_1(t)+t\psi_2(t)-\Phi_1(t)$ аналитична внутри круга $|t|<1$, а $\psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)\cdot t-\Phi_1(t)$ аналитична вне замкнутого круга $|t|\leqslant 1$ и

$$\left|\psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)\cdot t-\Phi_1(t)\right|\leqslant c\,|t|,\ |t|>1,$$

где c — постоянная, то из (100) следует, что

$$\psi_1(t)+t\psi_2(t)-\Phi_1(t)=c_0+c_1t,\quad |t|<1, \tag{102}$$

$$-\psi_1\left(\frac{\mu_1}{t}\right)-\psi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)\cdot t-\Phi_1(t)=c_0+c_1t,\ |t|>1, \tag{103}$$

где c_0 и c_1—произвольные постоянные.

Поскольку функция $F(t)$ принадлежит классу $A_{1,0}(|\mu_1|)$, имеем

$$\Phi_1(t)=\Phi_2(t)\ \text{при}\ |t|>1, \tag{104}$$

где

$$\Phi_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=|\mu_1|}\frac{zF(z)\,dz}{z-t}. \tag{105}$$

Полагая в (103) $t=\frac{\mu_1}{z}$ и используя (104) и условие $\mu_1=\mu_2\neq 0$, получим

$$z\psi_1(z)+\mu_1\psi_2(z)+\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{z}\right)\cdot z=-c_0z-c_1\mu_1,\ |z|<|\mu_1|. \tag{106}$$

Так как левая и правая части равенства (106) аналитичны в круге $|z|<1$, то (106) эквивалентно равенству

$$t\psi_1(t)+\mu_1\psi_2(t)+t\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right)=-c_0t-c_1\mu_1,\ |t|<1. \tag{107}$$

Из (102) и (107) имеем

$$\psi_1(t)=\frac{\mu_1\Phi_1(t)+t^2\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right)+c_0(\mu_1+t^2)+2c_1\mu_1t}{\mu_1-t^2}, \tag{108}$$

$$\psi_2(t)=\frac{t\Phi_1(t)+t\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right)+2c_0t,+c_1(\mu_1+t^2)}{t^2-\mu_1}. \tag{109}$$

Функции $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ аналитичны в круге $|t|<1$ тогда и только тогда, когда

$$c_0=-\frac{1}{4}\left(\Phi_1(\sqrt{\mu_1})+\Phi_1(-\sqrt{\mu_1})+\Phi_2(\sqrt{\mu_1})+\Phi_2(-\sqrt{\mu_1})\right), \tag{110}$$

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{\mu_1}}\left(\Phi_1(-\sqrt{\mu_1})-\Phi_1(\sqrt{\mu_1})+\Phi_2(-\sqrt{\mu_1})-\Phi_2(\sqrt{\mu_1})\right). \tag{111}$$

Следовательно, при $\mu_1=\mu_2\neq 0$, $|\mu_1|<1$ однородная задача (3), (6) имеет только нулевое решение, а функция $v(z)$, определенная формулой (45), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ задаются формулами (108)—(111), удовлетворяет уравнению (3) и граничному условию (6). Докажем, что $v(z)$ принадлежит классу $H_1(D)$. Так как $F(z)\in A_{1,0}(|\mu_1|)$, то, в силу (101) и (105), имеем

$$\Phi_1(t)\in H_1(D),\ \Phi_2\left(\frac{\mu_2}{t}\right)\in H(D). \tag{112}$$

Поэтому функция $v(z)$, определенная формулами (45), (108)—(111), принадлежит классу $H_1(D)$ тогда и только тогда, когда

$$(1-\bar{z}\alpha(z))\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{\alpha(z)}\right)\in H_1 \tag{113}$$

в кольце $1-\varepsilon<|z|<1$, где

$$\alpha(z)=\frac{1}{2}\left(z+\mu_1\bar{z}+\sqrt{(z+\mu_1\bar{z})^2-4\mu_1}\right),$$

а ε — сколь угодно малое положительное число.

Здесь ветвь корня $\sqrt{(z+\mu_1\bar{z})^2-4\mu_1}$ определяется по формуле (24), где $t=z+\mu_1\bar{z}$. Функция $\alpha(z)$ бесконечно дифференцируема по x и y вне отрезка с концами $2\sqrt{\mu_1}(1+|\mu_1|)^{-1}$ и $-2\sqrt{\mu_1}(1+|\mu_1|)^{-1}$.

Заменяя в выражении $1-\bar{z}\alpha(z)\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{\alpha(z)}\right)$ переменную z на t при помощи преобразования $t=\alpha(z)$, получим, что условие (113) эквивалентно условию

$$(1-|t|^2)\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right)\in H_1(D), \tag{114}$$

где через D, как и всюду, обозначен круг $|t|<1$.

Условие (114) получается из (112) применением интегральной формулы Коши к функции $\Phi_2\left(\frac{\mu_1}{t}\right)$.

Аналогично случаю $|\mu_1|\neq|\mu_2|$ здесь также можно показать, что для решения $v(z)$ задачи (3), (6) имеет место неравенство

$$\|v(z)\|\leqslant\frac{48}{(1-|\mu_1|)^2}\|F\|. \tag{115}$$

Следовательно, теорема 1 для случая $\mu_1=\mu_2\neq0$ также доказана.

Пусть теперь область D_1 есть внутренность эллипса. Как известно, параметрическое уравнение эллипса можно записать в виде

$$x+iy=e^{i\varphi_0}(a\cos\varphi+ib\sin\varphi)+x_0+iy_0,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi, \tag{116}$$

где x_0, y_0, φ_0, a и b — вещественные постоянные $a>0$, $b>0$, $a\geqslant b$.

Вводя новые переменные (ξ,η) при помощи линейного преобразования

$$x+iy=e^{i\varphi_0}(a\xi+ib\eta)+x_0+iy_0 \tag{117}$$

задачу (3), (4) в области, ограниченной эллипсом (116), приведем к задаче Дирихле для круга $|t|<1$, $t=\xi+i\eta$. При линейном преобразовании (117) коэффициенты уравнения (3) могут, конечно, измениться, однако это уравнение снова будет иметь вид (3). Поэтому в случае, когда область D_1 ограничена эллипсом, в этой области также можно сформулировать видоизмененную задачу Дирихле для уравнения (3) и исследовать ее полностью.

§ 4. Исследование задачи (3), (7)

Из теорем 8 и 10 следует, что для разрешимости задачи (3), (5) в классе $H_k(D)$ необходимо, чтобы граничное условие $g(z)$ совпадало со значением на окружности $|z|=1$ некоторой функции $\Phi(z)$, принадлежащей классу $A_{k-1,\,k-1}$, $(|\mu_1|)$, при $\mu_1\neq\mu_2$ и классу $A_{k-1,k-2}$ $(|\mu_1|)$, при $\mu_1=\mu_2\neq0$. Поэтому при $|\mu_1|+|\mu_2|\neq0$ более естественно вторую и третью краевые задачи в круге $|z|<1$ рассмотреть в сформулированной в § 1 видоизмененной постановке.

Для исследования задачи (3), (7) рассмотрим уравнение

$$(z+\mu\bar{z})\varphi'(z+\mu\bar{z})+k\varphi(z+\mu\bar{z})=\psi(z+\mu\bar{z}),\quad |z|<1, \tag{118}$$

где $\varphi(z+\mu\bar{z})$—искомая аналитическая относительно $z+\mu\bar{z}$ при $|z|<1$ функция, $\psi(z+\mu\bar{z})$ — заданная аналитическая относительно $z+\mu\bar{z}$ функция ($|z|<1$), k и μ — постоянные, $|\mu|<1$; $\varphi'(z+\mu\bar{z})$ — производная функции $\varphi(z+\mu\bar{z})$ относительно аргумента $z+\mu\bar{z}$. При $\alpha=-n$, где n — целое неотрицательное число, от $\psi(z+\mu\bar{z})$ дополнительно требуется, чтобы

$$\psi^{(n)}(0)=0. \tag{119}$$

Здесь через $\psi^{(n)}(0)$ обозначена n-ая производная функции $\psi(t)$ в точке $t=0$.

Условие (119) является необходимым и достаточным для разрешимости уравнения (118). Введя в (118) переменную $t=z+\mu\bar{z}$, получим

$$t\varphi'(t)+k\varphi(t)=\psi(t),\ t=\xi+i\eta\in D_\mu, \tag{120}$$

где $D\mu$ — область, определенная в начале § 2.

Ясно, что если $\varphi(t)$ является решением уравнения (120), то $\varphi(z+\mu\bar{z})$ является решением уравнения (118), и обратно. Решая уравнение (120) и используя указанную связь между решениями уравнений (118) и (120), получим для решения уравнения (118) следующие формулы:

$$\varphi(z+\mu\bar{z})=(z+\mu\bar{z})^{-k}\int_0^{z+\mu\bar{z}}t^k\psi(t)\frac{dt}{t},\ \text{при } \operatorname{Re}k>0, \tag{121}$$

$$\varphi(z+\mu\bar{z})=(z+\mu\bar{z})^{-k}\int_0^{z+\mu\bar{z}}t^k\left(\psi(t)-\sum_{j=0}^{n}\psi^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}\right)\frac{dt}{t}+$$

$$+\sum_{j=0}^{n}\psi^{(j)}(0)\frac{(z+\mu\bar{z})^j}{j!\,(j+k)},\ \text{при } k=-n+\beta+i\gamma,\ -1<\beta\leqslant 0,\ \beta+i\gamma\neq 0, \tag{122}$$

$$\varphi(z+\mu\bar{z})=(z+\mu\bar{z})^{-k}\int_0^{z+\mu\bar{z}}t^k\left(\psi(t)-\sum_{j=0}^{-k}\psi^{(j)}(0)\frac{t^j}{j!}\right)\frac{dt}{t}+c\,(z+\mu\bar{z})^{-k}+$$

$$+\sum_{j=0}^{k-1}\psi^{(j)}(0)\,(j!\,(j+k))^{-1}(z+\mu\bar{z})^j,\ \text{при } k=0,-1,-2,\cdots, \tag{123}$$

где n — целое число, γ — действительное число, c—произвольная постоянная, t^k и $(z+\mu\bar{z})^{-k}$ определяются по формулам

$$t^k=e^{k(\ln|t|+i\arg t)},\ (z+\mu\bar{z})^{-k}=e^{-k(\ln|z+\mu\bar{z}|+i\arg(z+\mu\bar{z}))}, \tag{124}$$

аргументы t и $z+\mu\bar{z}$ определяются единственным образом из неравенств

$$0<\arg t<2\pi,\ 0\leqslant\arg(z+\mu\bar{z})<2\pi, \tag{125}$$

а интегрирование берется по отрезку прямой, соединяющей точки 0 и $z+\mu\bar{z}$.

Рассмотрим сначала задачу (3), (7) при $\mu_1 \neq \mu_2$, $|\mu_2| < |\mu_1| < 1$. Тогда, как мы уже видели в § 2, в круге $|z|<1$ общее решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_2(D)$, дается формулой (21), где $\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})$ и $\varphi_2(z+\mu_2\bar{z})$—произвольные аналитические функции относительно аргументов $z+\mu_1\bar{z}$ и $z+\mu_2\bar{z}$, соответственно, при $|z|<1$, принадлежащие классу $H_2(D)$.

Подставляя общее решение (21) в граничное условие (7), получим

$$(z+\mu_1\bar{z})\varphi_1'(z+\mu_1\bar{z})+\alpha\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})+(z+\mu_2\bar{z})\varphi_2'(z+\mu_2\bar{z})+$$
$$+\alpha\varphi_2(z+\mu_2\bar{z})=\Phi(z),\ |z|=1. \tag{126}$$

Как было показано в § 2 функции

$$\alpha\varphi_j(z+\mu_j\bar{z})+(z+\mu_j\bar{z})\varphi_j'(z+\mu_jz)\quad (j=1,2), \tag{127}$$

входящие в (126), представимы в виде (40), где $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$—аналитические функции в круге $|z|<1$, принадлежащие классу $H_1(D)$ и при $\alpha=-n$ (n—целое неотрицательное число) удовлетворяющие дополнительному условию (41). Подставляя в (126) представления (40) для функций (127), получим для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ уравнение

$$\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+\psi_2(z)+\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right)=\Phi(z),\ |z|=1. \tag{128}$$

Ясно, что функцию $\psi_2(z)$ всегда можно представить в виде

$$\psi_2(z)=\omega_2(z)+c_2, \tag{129}$$

где $\omega_2(0)=0$, а c_2 — постоянная.

Подставляя в (128) представление $\psi_2(z)$ по формуле (129), получим уравнение

$$\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+\omega_2(z)+\omega_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right)=\Phi(z)-2c_2, \tag{130}$$

которое полностью решено в § 3 (см. уравнение (61)).

Пусть $\alpha \neq 0, -1, -2, \cdots$. Тогда, подставляя решение $\psi_1(z)$, $\omega_2(z)$ уравнения (130) в (129) и (40), и используя формулы (121), (122) и (21), найдем все решения задачи (3), (7). Если же $\alpha=-n$, где n—целое неотрицательное число, то задача (3), (7) решается аналогично предыдущему случаю, только на этот раз найденные функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ нужно подчинить дополнительному условию (41). Отсюда получим необходимые и достаточные условия для разрешимости задачи (3), (7), указанные в теореме 4.

Пусть теперь $\mu_1=\mu_2\neq 0$. Тогда решение уравнения (3), принадлежащее классу $H_2(D)$, представляется в виде (22), где $\varphi_1(z+\mu_1\bar{z})$ и $\varphi_2(z+\mu_1\bar{z})$—аналитические функции относительно аргумента $z+\mu_1\bar{z}$, при $|z|<1$, принадлежащие классу $H_1(D)$. Подставляя представление

(22) в граничное условие (7) и используя представления (48) и (49) для определения аналитических функций $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$, получим уравнение

$$\psi_1(z)+\psi_1\left(\frac{\mu_1}{z}\right)+z\psi_2(z)+z\psi_2\left(\frac{\mu_2}{z}\right)=zF_2(z),\ |z|<1. \tag{131}$$

Уравнение (131) также полностью решено в § 3 (см. уравнение (99)). Отметим, что при $\alpha=-1,\,-2,\,-3,\cdots$ в формулах (48) и (49) функции $\psi_1(z)$ и $\psi_2(z)$ удовлетворяют условию (50), а при $\alpha=0$ — условию

$$\psi_2(i\sqrt{\mu_1})+\psi_2(-i\sqrt{\mu_1})=0. \tag{132}$$

Пусть $\mu_1=\mu_2\neq 0$, $|\mu_1|<1$, $\alpha\neq 0,\,-1,\,-2,\cdots$. Тогда, решая уравнение (131) и используя формулу (121) и (122), из формул (22), (48) и (49) получим все решения задачи (3), (7). Если $\alpha=-1,-2,\cdots$, то эта задача решается аналогично, только решения уравнения (131) нужно еще дополнительно подчинить условию (50). Если же $\alpha=0$, то решение $\psi_2(z)$ уравнения (131) нужно дополнительно подчинить условию (132).

В результате мы получим формулы для решения задачи (3), (7). Из этих формул, в частности, вытекают сформулированные в § 1 теоремы 2, 3, 4.

Замечание. Если при $\mu_1\neq\mu_2$ в постановке задачи (3), (7) вместо условия $v\in H_2(D)$ и $\Phi\in A_{1,\,1}(|\mu_1|)$ потребовать выполнение условия $v\in H_1(D)$, $\Phi\in A_{0,\,0}(|\mu_1|)$, то метод решения этой задачи и полученные результаты остаются теми же.

Институт математики Сибирского
отделения АН СССР

Поступило 30.V.1968

Ն. Ե. ԹՈՎՄԱՍՅԱՆ

ԵՐԿՈՒ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒԺԵՂ ԿԱՊՎԱԾ ԷԼԻՊՏԻԿ ՍԻՍՏԵՄԻ ՀԱՄԱՐ I, II ԵՎ III ԵԶՐԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՆՈՐ ԴՐՎԱԾՔԸ ԵՎ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Երկրորդ կարգի դիֆերենցիալ հավասարումների որոշ էլիպտիկ սիստեմների համար I, II և III եզրային խնդիրները կոռեկտ չեն, չնայած որ այդ խնդիրների համար տեղի ունի միակության թեորեման։ Այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է այդպիսի էլիպտիկ սիստեմների լուծումների հատկությունները, և ելնելով դրանից դրվում է այդ խնդիրները նոր, այդ էլիպտիկ սիստեմների համար ավելի բնական ձևով, որի դեպքում այդ խնդիրների մեծ մասը արդեն դառնում են կոռեկտ ձևով դրված խնդիրներ։ Աշխատանքում մանրամասն ուսումնասիրվում է I, II և III եզրային խնդիրները նոր դրվածքով շրջանի ներսում, երբ էլիպտիկ սիստեմը բաղկացած է 2 հավասարումներից։

N. E. TOVMASIAN

NEW STATEMENT AND INVESTIGATION OF THE I, THE II AND THE III BOUNDARY PROBLEMS FOR TWO SECOND ORDER ELLIPTIC STRONGLY BOUNDED SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

Summary

The I and the III boundary problems for certain elliptic systems of the second order differential equations are not correct, although the uniqueness theorem is valid for such systems.

The properties of the solutions of such elliptic systems are investigated, and the results obtained form a basis for new and more natural statement of the corresponding problems. In this way of the problems are transformed into correct ones.

The I, the II and the III boundary problems in the circle are investigated in their new statement in more detail when the system is composed of two equations.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Издательство „Наука", М., 1966.
2. *Н. Е. Товмасян.* Общая краевая задача для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, II, №№ 1 и 2, 1966.
3. *Е. В. Золотарева.* О задаче Дирихле для эллиптических систем, ДАН СССР, 145, № 5, 1962.
4. *Нгуен Тхыа Хой.* Задача Дирихле для сильно связанных систем эллиптического типа, ДАН СССР, 171, № 2, 1966.
5. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962.