ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 6, 1968 Математика

А. А. ШМАТКОВ

# КВАЗИГОЛОМОРФНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА $C_z^n$, КОНФОРМНЫЕ НА КОМПЛЕКСНЫХ ПРЯМЫХ

## § 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются гладкие отображения области $G \subset \mathbf{C}_z^n$, конформные на комплексных прямых. Подобные отображения рассматривались автором ранее для пространства $\mathbf{C}_z^2$ двух комплексных переменных (см. [7], [8]).

Квазиголоморфные отображения изучались ранее в работах С. Бергмана [1], [2], Д. Е. Рудника [4], Б. А. Фукса [5], стр. 415 — 417, С. Хитоцумату [6], А. А. Шматкова [7], [8].

В § 3 предлагаемой работы мы, исходя из локальных свойств рассматриваемых отображений, получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных для функций, определяющих указанные отображения. В § 4 мы находим решение этой системы и получаем функции, определяющие этот класс квазиголоморфных отображений в конечном виде.

Построенный класс квазиголоморфных отображений позволяет отображать друг на друга некоторые голоморфно неэквивалентные области. В частности, находится принадлежащее к полученному классу квазиголоморфных отображений гомеоморфное отображение единичного полицилиндра

$$E = \{(z_1, \cdots, z_n): |z_k| < 1,\ k = 1, \cdots, n\} \tag{1.1}$$

на гипершар

$$B = \left\{ (w_1, \cdots, w_n): \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 < 1 \right\}. \tag{1.2}$$

## § 2. Вспомогательные рассмотрения

В этом параграфе доказываются используемые далее леммы.

Пусть $\Delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots n$ — элементы кососимметрической матрицы $\Phi$ порядка $n$:

$$\Delta_{ij} = -\Delta_{ji}, \quad i,\ j = 1, \cdots, n. \tag{2.1}$$

1. *Кососимметрический объект* четного порядка* $n = 2m$ определяется равенством

* Мы придерживаемся терминологии, принятой в книге А. Дж. Мак-Коннела „Введение в тензорный анализ“, Гос. изд. физ-мат. литературы, Москва, 1963, стр. 19—23.

$$\Delta_{p_1p_2\cdots p_{2m}}=\Delta_{p_1p_2}\Delta_{p_3\cdots p_{2m}}-\Delta_{p_1p_3}\Delta_{p_2p_4\cdots p_{2m}}+\cdots+\Delta_{p_1p_{2m}}\Delta_{p_2\cdots p_{2m-1}}, \tag{2.2}$$

где $p_1, p_2, \cdots, p_{2m}=1,2,\cdots, n$.

Равенство (2.2) называется разложением кососимметрического объекта четного порядка $\Delta_{p_1p_2\cdots p_{2m}}$ по индексу $p_1$.

Пусть $\Lambda_p, p=1,\cdots, n$ — некоторые величины.

2. *Кососимметрический объект нечетного порядка* определяется равенством

$$\Lambda_{p_1\cdots p_{2m+1}}=\Lambda_{p_1}\Delta_{p_2\cdots p_{2m+1}}-\Lambda_{p_2}\Delta_{p_1p_3\cdots p_{2m+1}}+\cdots+\Lambda_{p_{2m+1}}\Delta_{p_1\cdots p_{2m}}, \tag{2.3}$$

где $p_1, p_2, \cdots, p_{2m+1}=1,2,\cdots, n$.

Легко видеть, что кососимметрические объекты четного и нечетного порядков обладают следующими свойствами:

1. При перестановке двух рядом стоящих индексов $\Delta_{p_1p_2\cdots p_{2m}}$ и $\Lambda_{p_1p_2\cdots p_{2m+1}}$ меняют только знак.

2. Если любые два индекса совпадают, то кососимметрические объекты четного и нечетного порядков обращаются в нуль.

3. Исходя из разложений (2.2) и (2.3), можно получить разложения кососимметрических объектов четного и нечетного порядков по любому индексу $p_k$.

Рассмотрим матрицы

$$\Phi=\|\Delta_{ij}\|,\quad C=E-\Phi\bar{\Phi}, \tag{2.4}$$

где $E$ — единичная матрица. Элементы матрицы $C$ даются формулами

$$\underset{p\neq j}{c_{pj}}=\sum_{p_1=1}^{n}\Delta_{pp_1}\bar{\Delta}_{p_1j},\quad c_{jj}=1+\sum_{p_1=1}^{n}|\Delta_{p_1j}|^2,\quad p,\ j=1,\cdots, n. \tag{2.5}$$

Имеет место следующая

Лемма 2.1. *Матрица $C$ имеет обратную матрицу $\Gamma=C^{-1}$, элементы которой*

$$\gamma_{ip}=\frac{1}{\sqrt{\det C}}\Big\{\sum\Delta_{ip}\bar{\Delta}_{p_1p}-\sum_{p_1<p_2<p_3}\Delta_{ip_1p_2p_3}\bar{\Delta}_{pp_1p_2p_3}-\cdots-$$
$$-\sum_{p_1<\cdots<p_{2m-3}}\Delta_{ip_1\cdots p_{2m-3}}\bar{\Delta}_{pp_1\cdots p_{2m-3}}\Big\}, \tag{2.6}$$

$$\gamma_{ii}=\frac{1}{\sqrt{\det C}}\Big\{1+\sum_{p_1<p_2}^{(i)}|\Delta_{p_1p_2}|^2+\cdots+\sum_{p_1<\cdots<p_{2m-2}}^{(i)}|\Delta_{p_1\cdots p_{2m-2}}|^2\Big\}, \tag{2.7}$$

*где*

$$\sqrt{\det C}=1+\sum_{p_1<p_2}|\Delta_{p_1p_2}|^2+\cdots+\sum_{p_1<\cdots<p_{2m}}|\Delta_{p_1\cdots p_{2m}}|^2. \tag{2.8}$$

*Здесь* $m=\left[\frac{n}{2}\right]$ *— целая часть* $\frac{n}{2}$; $i, p=1,\cdots, n$.

Замечание. Здесь и далее во всех суммах $p_k=1,\cdots, n$,

$\sum^{(i)}$, $\sum^{(i,j)}$ — суммы с пропуском индексов $p_k=i$, $p_k=i, j$.

Доказательство. Для доказательства формул (2.6), (2.7) нам достаточно показать, что

$$C\cdot\Gamma=E. \tag{2.9}$$

Для упрощения записи доказательство проводится для $n=6$ (для произвольного $n$ доказательство по существу не изменяется).

Недиагональные элементы матрицы $C\cdot\Gamma$ вычисляются по формуле

$$\sum_{p=1}^{n}\gamma_{ip}c_{pj}=\sum_{p=1}^{n(i,j)}\gamma_{ip}c_{pj}+\gamma_{ii}c_{ij}+\gamma_{ij}c_{jj},\quad i,j=1,\cdots,n. \tag{2.10}$$

Подставляя в (2.10) величины $c_{pj}$ из формул (2.5) и величины $\gamma_{ip}$ из формул (2.6), (2.7), получим

$$\sqrt{\det C}\cdot\sum_{p=1}^{n}\gamma_{ip}c_{pj}=-\sum_{p}\sum_{p_1}\Delta_{p_1p}\bar{\Delta}_{jp_1}\Big(\sum_{p_2}\Delta_{ip_2}\bar{\Delta}_{p_2p}-\sum_{\substack{p_2,p_3,p_4\\ p_2<p_3<p_4}}\Delta_{ip_2p_3p_4}\bar{\Delta}_{pp_2p_3p_4}\Big)-$$

$$-\sum_{p_1}\Delta_{p_1i}\bar{\Delta}_{jp_1}\Big(1+\sum_{\substack{p_2,p_3\\ p_2<p_3}}|\Delta_{p_2p_3}|^2+\sum_{\substack{p_2,\cdots,p_5\\ p_2<\cdots<p_5}}|\Delta_{p_2\cdots p_5}|^2\Big)+$$

$$+\Big(1+\sum_{p_1}|\Delta_{p_1j}|^2\Big)\Big(\sum_{p_2}\Delta_{ip_2}\bar{\Delta}_{p_2j}-\sum_{\substack{p_2,p_3,p_4\\ p_2<p_3<p_4}}\Delta_{ip_2p_3p_4}\bar{\Delta}_{jp_2p_3p_4}\Big). \tag{2.11}$$

После перегруппировки слагаемых суммы (2.11) получим

$$\sqrt{\det C}\cdot\sum_{p}\gamma_{ip}c_{pj}=-\sum_{p_1,p_2,p}\Delta_{p_2p}\bar{\Delta}_{jp_2}\Delta_{ip_1}\bar{\Delta}_{p_1p}+\sum_{\substack{p_1,p_2,p\\ p_2<p}}^{(i,j)}\Delta_{ip_1}\bar{\Delta}_{jp_1}|\Delta_{p_2p}|^2-$$

$$-\sum_{\substack{p_1,p_2,p\\ p_1<p_2<p}}\Delta_{ip_1p_2p}\bar{\Delta}_{jp_1p_2p}-\sum_{\substack{p_1,\cdots,p_4,p\\ p_2<p_3<p_4<p}}\Delta_{p_1p}\bar{\Delta}_{jp_1}\Delta_{ip_2p_3p_4}\bar{\Delta}_{p_2p_3p_4p}+$$

$$+\sum_{\substack{p_1,\cdots,p_4,p\\ p_1<p_3<p_4<p}}\Delta_{ip_1}\bar{\Delta}_{jp_1}|\Delta_{p_2p_3p_4p}|^2. \tag{2.12}$$

Упорядочивая суммирование (то есть переходя к суммированию при $p_1<p_2<p_3<p_4<p$), окончательно получим

$$\sqrt{\det C}\cdot\sum_{p}\gamma_{ip}c_{pj}=\sum_{\substack{p_1,\cdots,p_4,p\\ p_1<\cdots<p_4<p}}\Delta_{ip_1\cdots p_4p}\bar{\Delta}_{jp_1\cdots p_4p}=0, \tag{2.13}$$

так как при $n=6$ и $i\neq j$ обязательно совпадают два индекса $p_k$.

Диагональные элементы матрицы $C\cdot\Gamma$ определяются по формуле

$$\sum_{p}\gamma_{ip}c_{pj}=\sum_{p}^{(i)}\gamma_{ip}c_{pi}+\gamma_{ii}c_{ii}. \tag{2.14}$$

Подставляя в формулу (2.14) входящие туда величины из (2.5), (2.6), (2.7), получим в результате аналогичной (2.12) перегруппировки слагаемых и упорядочивания суммирования

$$\sqrt{\det C}\cdot\sum_{p}\gamma_{lp}c_{pl}=-\sum_{p}\sum_{p_1}\Delta_{p_1p}\bar{\Delta}_{lp_1}\Big(\sum_{p_2}\Delta_{lp_2}\bar{\Delta}_{p_2p}-\sum_{\substack{p_2,\,p_3,\,p_4\\ p_2<p_3<p_4}}\Delta_{lp_2p_3p_4}\bar{\Delta}_{pp_2p_3p_4}\Big)+$$

$$+\Big(1+\sum_{p_1}|\Delta_{p_1p}|^2\Big)\Big(1+\sum_{\substack{p_2,\,p_3\\ p_2<p_3}}^{(l)}|\Delta_{p_2p_3}|^2+\sum_{\substack{p_2,\cdots,\,p_5\\ p_2<\cdots<p_5}}^{(l)}|\Delta_{p_2\cdots p_5}|^2\Big)=\sqrt{\det C}. \quad (2.15)$$

Итак, мы показали, что произведение матриц $C$ и $\Gamma$ дает единичную матрицу. Отсюда следует, что элементы матрицы $\Gamma=C^{-1}-\gamma_{lj}$ определяются по формулам (2.6), (2.7), и $C$— невырожденная матрица.

## § 3. Постановка задачи. Локальные рассмотрения

Пусть функции

$$(T)\quad w_p=f_p(z),\ p=1,\cdots,n, \tag{3.1}$$

принадлежащие к классу гладкости $C^1(G)$ в области $G\subset \mathbf{C}^n_z$, $z=(z_1,\cdots,z_n)$, осуществляют отображение области $G\subset \mathbf{C}^n_z$ на некоторую область $G^*\subset \mathbf{C}^n_w$. Пусть точка $Q\in G$, а точка $Q^*=TQ$. Перенесем начало координат пространства $\mathbf{C}^n_z$ в точку $Q$, пространства $\mathbf{C}^n_w$—в точку $Q^*$ и рассмотрим дифференциал отображения (3.1)

$$(T_d)\quad W=AZ+B\bar{Z}, \tag{3.2}$$

где

$$W=(w_1,\cdots,w_n)',\ A=\|a_{ij}\|,\ B=\|b_{ij}\|.\ Z=(z_1,\cdots,z_n)'. \tag{3.3}$$

Матрицы $A$ и $B$ мы будем называть соответственно *матрицами голоморфной и антиголоморфной частей отображения $T$ в точке $Q$*.

Здесь

$$a_{ij}=\frac{\partial w_i}{\partial z_j},\ \ b_{ij}=\frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j},\ i,j=1,\cdots,n, \tag{3.4}$$

где все производные вычислены в начале координат.

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n_z$ гиперсферу

$$S=\Big\{z\in \mathbf{C}^n_z;\ \sum_{k=1}^{n}|z_k|^2=1\Big\} \tag{3.5}$$

и сечение $S_\omega$ этой гиперсферы комплексной прямой

$$\{\omega\}\ z_p=\omega_p t,\ p=1,\cdots,n. \tag{3.6}$$

Полагая $t=re^{i\varphi}$, получим, что на $S_\omega$

$$r=\Big(\sum_{k=1}^{n}|\omega_k|^2\Big)^{-\frac{1}{2}},\ z_p=\omega_p e^{i\varphi}\Big(\sum_{k=1}^{n}|\omega_k|^2\Big)^{-\frac{1}{2}},\ p=1,\cdots,n. \tag{3.7}$$

При отображении $T_d$, $T_d S_\omega$, вообще говоря, — некоторый эллипс. Потребуем, чтобы $T_d S_\omega$ являлось окружностью для любой комплексной прямой $\{\omega\}$. Комплексные прямые $\{\omega\}$, вообще говоря, теряют свой аналитический характер.

**Определение 1.** Отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbf{C}^n_z$ на область $G^* \subset \mathbf{C}^n_\omega$ *принадлежит к классу квазиголоморфных отображений* $B_Q$ *в точке* $Q \in G$, если: 1) его голоморфная часть в точке $Q$ не вырождена, 2) дифференциал $T_d$, вычисленный в точке $Q$, сохраняет окружности с центром в этой точке, лежащие во всех комплексных прямых, проходящих через точку $Q$.

Имеет место

Лемма 3.1. *Для того чтобы отображение* $T$ *принадлежало к классу отображений* $B_Q$ *в точке* $Q$ *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$A'\overline{B} = \Psi. \tag{3.8}$$

*Здесь* $\Psi$ *— произвольная кососимметрическая матрица.*

**Доказательство.** Пусть $\varkappa$ — коэффициент линейного искажения при отображении $T_d$ в направлении вектора $\{\omega_p e^{i\varphi}\}$, $p = 1, \cdots, n$. Тогда

$$\varkappa^2 = \sum_{p=1}^{n} |w_p|^2 = \frac{1}{\sum\limits_{p=1}^{n} |\omega_p|^2} \left\{ \left| \sum_{q=1}^{n} a_{pq}\omega_q \right|^2 + \sum_{q,\, r=1}^{n} a_{pq}\, \overline{b}_{pr}\, \omega_q \omega_r\, e^{2i\varphi} + \right.$$

$$\left. + \sum_{q,r=1}^{n} \overline{a}_{pq}\, b_{pr}\, \overline{\omega}_q \overline{\omega}_r\, e^{-2i\varphi} + \left| \sum_{q=1}^{n} \overline{b}_{pq}\, \omega_q \right|^2 \right\}. \tag{3.9}$$

Вычисления показывают, что

$$\varkappa^2_{\max},\ \varkappa^2_{\min} = \frac{1}{\sum\limits_{p=1}^{n} |\omega_p|^2} \left\{ \pm 2 \left| \sum_{p=1}^{n} \left( \sum_{q,\, r=1}^{n} a_{pq}\, \overline{b}_{pr}\, \omega_q\, \omega_r \right) \right| + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{n} \left( \left| \sum_{q=1}^{n} a_{pq}\, \omega_q \right|^2 + \left| \sum_{q=1}^{n} \overline{b}_{pq}\, \omega_q \right|^2 \right) \right\}. \tag{3.10}$$

Для сохранения окружностей на комплексных прямых $\{\omega\}$ необходимо и достаточно, чтобы $\varkappa_{\max} = \varkappa_{\min}$, что благодаря (3.10) равносильно условию

$$\sum_{p=1}^{n} (a_{p1}\, \omega_1 + \cdots + a_{pn}\, \omega_n)\, (\overline{b}_{p1}\, \omega_1 + \cdots + \overline{b}_{pn}\, \omega_n) = 0. \tag{3.11}$$

Так как окружности должны сохраняться на всех комплексных прямых $\{\omega\}$, то $a_{pq}$, $b_{pq}$, $p$, $q = 1, \cdots, n$, должны удовлетворять системе уравнений

$$\omega_q\colon \sum_{p=1}^{n} a_{pq}\, \overline{b}_{pq} = 0; \quad \omega_q \omega_r\colon \sum_{p=1}^{n} (a_{pq} \overline{b}_{pr} + a_{pr}\, \overline{b}_{pq}) = 0; \quad q = 1, \cdots, n. \tag{3.12}$$

Равенства (3.12) равносильны условию (3.8). Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Произвольная кососимметрическая матрица* $\Psi$ *может быть представлена в виде*

$$\Psi = A'\Phi A, \tag{3.13}$$

*где $A$ — произвольно данная невырожденная матрица, являющаяся матрицей голоморфной части отображения $T$ в точке $Q$, $\Phi$ — кососимметрическая матрица.*

Доказательство. То, что $A'\Phi A$ является кососимметрической матрицей, проверяется непосредственно. Из невырожденности матрицы $A$ и из уравнения (3.13) вытекает, что матрица $\Phi$ определяется по матрице $\Psi$ однозначно.

Лемма 3.3. *Уравнение*

$$A'\overline{B} = \overline{\Psi} \tag{3.14}$$

(где *$A$ и $B$—матрицы голоморфной и антиголоморфной частей отображения $T_d$, матрица $A$ невырождена, $\Psi$—некоторая данная кососимметрическая матрица), равносильно уравнению*

$$\overline{B} = \overline{\Phi}A, \tag{3.15}$$

*где $\Phi$—некоторая кососимметрическая матрица.*

Доказательство. Лемма вытекает из леммы 3.2 и невырожденности матрицы $A$.

Из лемм 3.1 и 3.3 имеем

Следствие. *Для того чтобы отображение $T$ принадлежало к классу отображений $B_Q$ в точке $Q$ необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\overline{B} = \overline{\Phi}A,$$

*где $\Phi$—произвольная кососимметрическая матрица.*

Имеет место

Теорема 3.1. *Для того чтобы отображение $T\subset C^1(G)$ области $G\subset \mathbf{C}_z^n$ на область $G^*\subset \mathbf{C}_w^n$ принадлежало к классу $B_Q$ квазиголоморфных отображений в точке $Q\in G$ необходимо и достаточно, чтобы дифференциал $T_d$, вычисленный по формуле (3.2), в точке $Q$ имел вид*

$$(T_i)\ w_i = \frac{1}{\sqrt{\det(E-\Phi\overline{\Phi})}}\Big\{\Lambda_i + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\substack{p_1,\dots,p_{2k+1}\\ p_j<p_{j+1}}}\Big[\overline{\Delta}_{p_1\dots p_{2k}}\Delta_{ip_1\dots p_{2k}} + \\ + \Delta_{ip_1\dots p_{2k+1}}\overline{\Lambda}_{p_1\dots p_{2k+1}}\Big]\Big\},\quad i=1,\dots,n. \tag{3.16}$$

*При этом*

$$\sqrt{\det(E-\Phi\overline{\Phi})} = 1+\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{\substack{p_1,\dots,p_{2k}\\ p_j<p_{j+1}}}|\Delta_{p_1\dots p_{2k}}|^2. \tag{3.17}$$

*Здесь $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$ — кососимметрическая матрица, удовлетворяющая соотношению $\overline{B} = \overline{\Phi}A$, $\Lambda = \|\Lambda_i\| = (E-\Phi\overline{\Phi})\,AZ$—матрица-столбец, $A$ и $B$—матрицы голоморфной и антиголоморфной частей отобра-*

*жения $T$ в точке $Q$, матрица $A$ предполагается невырожденной, $\Delta_{p_1 \cdots p_{2k}}$, $\Lambda_{p_1 \cdots p_{2k-1}}$—кососимметрические объекты четного и нечетного порядков, построенные с помощью матриц $\Phi$ и $\Lambda$, $m=\left[\frac{n}{2}\right]$.*

Доказательство. Рассмотрим дифференциал $T_d$ отображения $T$

$$(T_d) \quad W = AZ + B\bar{Z},$$

где $W$, $A$, $B$, $Z$ — ранее определенные матрицы (см. формулы (3.2), (3.3)).

В силу следствия из лемм 3.1, 3.3 отображение $T \subset B_Q$ тогда и только тогда, если $\bar{B} = \bar{\Phi} A$. Итак, для того чтобы отображение $T \subset B_Q$ необходимо и достаточно, чтобы дифференциал $T_d$, вычисленный в точке $Q$, имел вид

$$(T_l) \quad W = AZ + \Phi \bar{A} \bar{Z}. \tag{3.18}$$

Докажем сначала, что уравнение (3.18) равносильно уравнению

$$W = (E - \Phi\bar{\Phi})^{-1}(\Phi\bar{\Lambda} + \Lambda), \tag{3.19}$$

где $\Lambda = (E - \Phi\bar{\Phi}) AZ$.

Необходимость. Пусть имеет место равенство (3.18).

Решая это уравнение с ему сопряженным, получим

$$W = \Phi \bar{W} + (E - \Phi\bar{\Phi}) AZ = \Phi \bar{W} + \Lambda. \tag{3.20}$$

Решая уравнение (3.20) с ему сопряженным, получим равенство (3.19).

Достаточность. Обратное утверждение легко следует из уравнения (3.19) и равенства

$$(E - \Phi\bar{\Phi})^{-1}\Phi = \Phi(E - \bar{\Phi}\Phi)^{-1}, \tag{3.21}$$

которое проверяется непосредственно.

Обратимся к доказательству равенства (3.16). Мы проведем вычисления для $n = 6$ (в общем случае они проводятся совершенно аналогично).

Вычислим сначала $(E - \Phi\bar{\Phi})^{-1} \Lambda$:

$$\sum_{p} \gamma_{ip} \Lambda_p = \sum_{p}{}^{(i)} \gamma_{ip} \Lambda_p + \gamma_{ii}\Lambda_i = \Lambda_i + \sum_{p_1, p} \Delta_{ip_1} \bar{\Delta}_{p_1 p} \Lambda_p + \sum_{\substack{p_1, p \\ p_1 < p}}{}^{(i)} |\Delta_{p_1 p}|^2 \Lambda_i +$$

$$+ \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{ip_1 p_2 p_3} \bar{\Delta}_{p_1 p_2 p_3 p} \Lambda_p + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3 < p}}{}^{(i)} |\Delta_{p_1 p_2 p_3 p}|^2 \Lambda_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{3.22}$$

Группируя слагаемые по два, начиная со второго слагаемого, и упорядочивая суммирование (то есть переходя к суммированию при $p_1 < p_2 < p_3 < p$), получим формулу для $(E - \Phi\bar{\Phi})^{-1} \Lambda$

$$\sum_{p} \gamma_{lp} \Lambda_p = \Lambda_l + \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Lambda_{l p_1 p_2} + \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_4 \\ p_1 < \cdots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \cdots p_4} \Lambda_{l p_1 \cdots p_4}. \tag{3.23}$$

Теперь вычислим $(E - \Phi\bar{\Phi})^{-1}\Phi$:

$$\sum_{p} \gamma_{lp} \Delta_{pj} = \sum_{p}^{(l)} \gamma_{lp} \Delta_{pj} + \gamma_{ll} \Delta_{lj} = \Delta_{lj} + \sum_{p_1, p} \Delta_{pj} \Delta_{lp_1} \bar{\Delta}_{p_1 p} +$$

$$+ \sum_{\substack{p_1, p \\ p_1 < p}} \Delta_{lj} |\Delta_{p_1 p}|^2 + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{pj} \Delta_{l p_1 p_2 p_3} \bar{\Delta}_{p_1 p_2 p_3 p} + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3, p \\ p_1 < p_2 < p_3 < p}} \Delta_{lj} |\Delta_{p_1 p_2 p_3 p}|^2. \tag{3.24}$$

Группируя, как и ранее, слагаемые по два, начиная со второго слагаемого, и упорядочивая суммирование, получим формулу для произведения $(E - \Phi\bar{\Phi})^{-1}\Phi$. В конечном результате мы заменяем индекс $j$ на $p$:

$$\Gamma_{lp} = \sum_{p_1} \gamma_{lp_1} \Delta_{p_1 p} = \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Delta_{l p_1 p_2 p} + \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_4 \\ p_1 < \cdots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \cdots p_4} \Delta_{l p_1 \cdots p_4 p} + \Delta_{lp}. \tag{3.25}$$

Обратимся к получению $(E - \Phi\bar{\Phi})^{-1}\Phi\bar{\Lambda}$:

$$\sum_{p} \Gamma_{lp} \bar{\Lambda}_p = \sum_{p} \bar{\Lambda}_p \Big( \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Delta_{l p_1 p_2 p} + \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_4 \\ p_1 < \cdots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \cdots p_4} \Delta_{l p_1 \cdots p_4 p} + \Delta_{lp} \Big). \tag{3.26}$$

Переходя к суммированию при $p_1 < \cdots < p_4 < p$, получим

$$\sum_{p} \Gamma_{lp} \bar{\Lambda}_p = \sum_{p} \Delta_{lp} \bar{\Lambda}_p + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{l p_1 p_2 p_3} \bar{\Lambda}_{p_1 p_2 p_3} + \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_5 \\ p_1 < \cdots < p_5}} \Delta_{l p_1 \cdots p_5} \bar{\Lambda}_{p_1 \cdots p_5}. \tag{3.27}$$

Учитывая формулы (3.23) и (3.27), мы получим для дифференциала отображения $T \subset B_0$ в случае $n = 6$ формулу

$$w_l = \frac{1}{\sqrt{\det (E - \Phi\bar{\Phi})}} \Big\{ \Lambda_l + \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} \bar{\Delta}_{p_1 p_2} \Lambda_{l p_1 p_2} + \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_4 \\ p_1 < \cdots < p_4}} \bar{\Delta}_{p_1 \cdots p_4} \Lambda_{l p_1 \cdots p_4} +$$

$$+ \sum_{p} \Delta_{lp} \bar{\Lambda}_p + \sum_{\substack{p_1, p_2, p_3 \\ p_1 < p_2 < p_3}} \Delta_{l p_1 p_2 p_3} \bar{\Lambda}_{p_1 p_2 p_3} + \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_5 \\ p_1 < \cdots < p_5}} \Delta_{l p_1 \cdots p_5} \bar{\Lambda}_{p_1 \cdots p_5}, \quad l = 1, \cdots, 6, \tag{3.28}$$

где

$$\sqrt{\det (E - \Phi\bar{\Phi})} = 1 + \sum_{\substack{p_1, p_2 \\ p_1 < p_2}} |\Delta_{p_1 p_2}|^2 + \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_4 \\ p_1 < \cdots < p_4}} |\Delta_{p_1 \cdots p_4}|^2 + |\Delta_{12 \cdots 6}|^2. \tag{3.29}$$

Аналогичные вычисления приводят к формулам (3.16) и (3.17).

Итак, мы показали, что определение 1 эквивалентно в силу теоремы 3.1 следующему определению:

Определение 2. Отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbf{C}_z^n$ на область $G^* \subset \mathbf{C}_w^n$ *принадлежит к классу квазиголоморфных отображе-*

*ний $B_Q$ в точке $Q \in G$,* если его голоморфная часть в точке $Q$ невырождена, дифференциал $T_d$, вычисленный в точке $Q$, имеет вид $T_l$.

Рассмотрим углы между двумя направлениями, лежащими в комплексной прямой, проходящей через некоторую точку $Q$.

Имеет место следующая

Теорема 3.2. *Для того чтобы отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbf{C}^n_z$ на область $G^* \subset \mathbf{C}^n_w$ принадлежало к классу квазиголоморфных отображений $B_Q$ в точке $Q \in G$ необходимо и достаточно, чтобы отображение $T_d$ сохраняло углы между любыми направлениями, принадлежащими к одной и той же комплексной прямой, проходящей через эту точку.*

Доказательство. Возьмем на комплексной прямой $z_p = \omega_p t$, $p = 1, \cdots, n$ векторы

$$\mathrm{I} = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}, \ \mathrm{II} = \{\omega_1 e^{i\varphi}, \cdots, \omega_n e^{i\varphi}\}, \tag{3.30}$$

составляющие между собой угол $\varphi$. В результате отображения $T_d$ (см. формулу (3.2)) они перейдут в векторы

$$\mathrm{I}^* = \{L + M\}, \ \mathrm{II}^* = \{Le^{i\varphi} + Me^{-i\varphi}\}, \tag{3.31}$$

где $L$ и $M$ — векторы с составляющими $L_p$ и $M_p$, $p = 1, \cdots, n$,

$$L_p = \sum_{k=1}^{n} a_{pk}\omega_k, \ M_p = \sum_{k=1}^{n} \bar{b}_{pk}\,\omega_k.$$

Пусть $\psi$ — угол между векторами $\mathrm{I}^*$, $\mathrm{II}^*$.

Тогда соответствующие вычисления показывают, что

$$\cos\psi = \frac{\cos\varphi + F^{-1}|(L, M)|\cos(\varphi+\theta)}{\sqrt{1+F^{-1}|(L, M)|\cos\theta}\ \sqrt{1+F^{-1}|(L, M)|\cos(2\varphi+\theta)}}, \tag{3.32}$$

где $F = \dfrac{1}{2}(|L|^2 + |M|^2)$, $\theta = \arg(L, M)$.

Теперь теорема легко получается из равенства (3.32).

Пусть отображение $T \subset B_Q$, тогда, как это вытекает из равенства (3.11),

$$(L, M) = 0. \tag{3.33}$$

Из равенства (3.32) следует, что тогда $\cos\psi = \cos\varphi$.

Если углы между направлениями сохраняются, то $\cos\varphi = \cos\psi$. Из равенства (3.32) следует, что это возможно только в том случае, если имеет место равенство (3.33), то есть если отображение $T \subset B_Q$.

Итак, определения 1 и 2 эквивалентны следующему определению:

Определение 3. Отображение $T \subset C^1(G)$ области $G \subset \mathbf{C}^n_z$ на область $G^* \subset \mathbf{C}^n_w$ *принадлежит к классу квазиголоморфных отображений $B_Q$ в точке $Q \in G$,* если его голоморфная часть в этой точке невырождена, во всех комплексных прямых, проходящих через точку $Q$, отображение $T_d$ сохраняет углы между направлениями, принадлежащими к этим комплексным прямым.

Итак, мы установили, что следующие три требования приводят к одному и тому же классу квазиголоморфных отображений $B_Q$ в точке $Q \in G$, обладающих свойством конформности на комплексных прямых.

1. Требуется, чтобы при отображении $T_d$, вычисленном в точке $Q \in G$, сохранялись окружности с центром в этой точке, лежащие на комплексных прямых, проходящих через точку $Q$.

2. Требуется, чтобы при отображении $T_d$, вычисленном в точке $Q \in G$, сохранялись углы между векторами, выходящими из этой точки, принадлежащие к комплексным прямым, проходящим через точку $Q$.

3. Требуется, чтобы дифференциал $T_d$ отображения $T$, вычисленный в точке $Q \in G$, имел вид $T_l$.

## § 4. Построение квазиголоморфных отображений области $G \subset \mathbf{C}^n_z$, конформных на комплексных прямых

Лемма 4.1. *Даны невырожденная матрица* $\Omega = \|\alpha_{ij}\|$, $i, j = 1, \cdots, n$, *и кососимметрические матрицы* $U_k = \|u_{ij}^{(k)}\|$, $i, j, k = 1, \cdots, n$.

*Для того чтобы кососимметрические матрицы* $U_k$, $k = 1, \cdots, n$ *были нулевыми необходимо и достаточно выполнение соотношений*

$$U_k X_m = U_m X_k, \quad k < m, \; k, m = 1, \cdots, n. \tag{4.1}$$

*Здесь* $X_i = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \cdots, \alpha_{ni})$, $i = 1, \cdots, n$ — *матрицы-столбцы.*

Доказательство. Необходимость этих условий очевидна. Докажем достаточность. Представим каждую матрицу $U_k$, $k = 1, \cdots, n$ в виде

$$U_k = (\Omega^{-1})' V_k \Omega^{-1}, \quad k = 1, \cdots, n, \tag{4.2}$$

где $V_k = \|v_{ij}^{(k)}\|$, $i, j, k = 1, \cdots, n$ — кососимметрическая матрица порядка $n$. Это возможно, в силу леммы 3.2. В этом случае равенство (4.1) равносильно следующему:

$$V_k E_m = V_m E_k, \quad k < m, \; k, m = 1, \cdots, n, \tag{4.3}$$

где векторы $E_i$, $i = 1, \cdots, n$ образуют простейший базис.

В силу равенства (4.3) матрицы $V_k$, $k = 1, \cdots, n$ имеют следующую структуру (мы предполагаем, что $i \leqslant j \leqslant k$):

$$V_i = \begin{vmatrix} v_{1i}^{(1)} \cdots v_{1i}^{(i)} \cdots v_{1i}^{(j)} \cdots v_{1i}^{(k)} \cdots v_{1i}^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{ii}^{(1)} \cdots v_{ii}^{(i)} \cdots v_{ii}^{(j)} \cdots v_{ii}^{(k)} \cdots v_{ii}^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{ji}^{(1)} \cdots v_{ji}^{(i)} \cdots v_{ji}^{(j)} \cdots v_{ji}^{(k)} \cdots v_{ji}^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{ki}^{(1)} \cdots v_{ki}^{(i)} \cdots v_{ki}^{(j)} \cdots v_{ki}^{(k)} \cdots v_{ki}^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{ni}^{(1)} \cdots v_{ni}^{(i)} \cdots v_{ni}^{(j)} \cdots v_{ni}^{(k)} \cdots v_{ni}^{(n)} \end{vmatrix}, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{4.4}$$

Докажем, что все элементы матрицы $V_k$, $k = 1, \cdots, n$, с индексами, меньшими или равными $k$, равны нулю. Отсюда наша лемма вытекает немедленно, так как тогда $V_n$ — нулевая матрица. В матрице $V_{n-1}$ последний столбец нулевой (последний столбец матрицы $V_{n-1}$ состоит из элементов матрицы $V_n$). Воспользовавшись кососимметричностью, получим, что $V_{n-1}$ — нулевая матрица; и так далее.

Из того, что матрицы $V_k$, $k=1, \cdots, n$ — нулевые, на основании равенства (4.2) заключаем, что $U_k$, $k=1, \cdots, n$ — также нулевые матрицы.

Рассмотрим матрицы $V_i$, $V_j$, $V_k$, $i < j \leqslant k$, $i, j, k=1, \cdots, n$. Легко видеть, что выполняются следующие соотношения. (Мы пользуемся их кососимметричностью).

$$\left| \begin{array}{ll} v_{ij}^{(k)}+v_{ji}^{(k)}=0 & \text{из рассмотрения матрицы } V_k; \\ v_{ij}^{(k)}+v_{ki}^{(j)}=0 & \text{из рассмотрения матрицы } V_i; \\ v_{jk}^{(k)}+v_{ki}^{(j)}=0 & \text{из рассмотрения матрицы } V_j. \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Из системы (4.5) следует, что $v_{ij}^{(k)}=0$, $i < j \leqslant k$, $i, j, k=1, \cdots, n$.

Лемма доказана.

Переходим к доказательству основной теоремы.

Теорема 4.1. *I. Отображение $T^*$ области $G \subset \mathbf{C}_z^n$, определяемое равенствами*

$$(T^*) \; w_i = \frac{1}{\sqrt{\det (E - \Phi \overline{\Phi})}} \Big\{ \Lambda_i + \sum_{k=1}^{m-1} \Big[ \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_{2k} \\ p_j < p_{j+1}}} \overline{\Delta}_{p_1 \cdots p_{2k}} \Lambda_{ip_1 \cdots p_{2k}} +$$

$$+ \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} \Delta_{ip_1 \cdots p_{2k+1}} \overline{\Lambda}_{p_1 \cdots p_{2k+1}} \Big] \Big\}, \quad i=1, \cdots, n, \tag{4.6}$$

*принадлежит к классу квазиголоморфных отображений $B_0$, если* $\det A = \dfrac{\partial (w_1, \cdots, w_n)}{\partial (z_1, \cdots, z_n)} \neq 0$. *Здесь $\Lambda_i$, $\Delta_{ij}=-\Delta_{ji}$, $i, j=1, \cdots, n$ — функции, голоморфные в области $G$, $\Delta_{p_1 \cdots p_{2k}}$, $\Lambda_{p_1 \cdots p_{2k+1}}$ — кососимметрические объекты четного и нечетного порядков, составленные из функций $\Delta_{ij}$ и $\Lambda_i$, $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$, $m=\left[\dfrac{n}{2}\right]$.*

II. *Если отображение $T \{w_p = f_p(z),\ p=1, \cdots, n\} \subset B_0$ в каждой точке $Q \in G$ и функции, определяющие это отображение, принадлежат $C^2(G)$, то в некоторой окрестности точки $Q$ оно может быть представлено в виде $T^*$, где $\Lambda_i$, $\Delta_{ij}$ — функции, голоморфные в точке $Q$.*

*Каждое гомеоморфное отображение $T^*$ области $G$ принадлежит к классу квазиголоморфных отображений $B_0$.*

Доказательство. Утверждение I проверяется непосредственно. Докажем утверждение II.

Если отображение $T \subset B_0$ во всякой точке $Q \in G$, то функции $w_p$, $p=1, \cdots, n$ удовлетворяют (как это следует из леммы (3.3)) системе дифференциальных уравнений, записанных с помощью формальных производных

$$\overline{B} = \overline{\Phi} A, \tag{4.7}$$

где $A = \left\| \frac{\partial w_i}{\partial z_j} \right\|$ — матрица голоморфной части,

$B = \left\| \frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_j} \right\|$ — матрица антиголоморфной части, $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$ — кососимметрическая матрица, элементы которой $\Delta_{ij}$ — пока произвольные функции класса $C^1(G)$.

В силу равенства (4.7) имеем

$$\frac{\partial \overline{w}_i}{\partial z_j} = \sum_{p=1}^{n} \overline{\Delta}_{ip} \frac{\partial w_p}{\partial z_j}, \ i, j = 1, \cdots, n. \tag{4.8}$$

Выпишем еще одно равенство:

$$\frac{\partial \overline{w}_i}{\partial z_q} = \sum_{p=1}^{n} \overline{\Delta}_{ip} \frac{\partial w_p}{\partial z_q}, \ i, q = 1, \cdots, n. \tag{4.9}$$

Дифференцируя теперь (4.8) по $z_q$, (4.9) — по $z_j$ и вычитая из первого полученного равенства второе, имеем

$$\sum_{p=1}^{n} \left( \frac{\partial \overline{\Delta}_{ip}}{\partial z_q} \frac{\partial w_p}{\partial z_j} - \frac{\partial \overline{\Delta}_{ip}}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial w_p}{\partial z_q} \right) = 0, \ i, j, q = 1, \cdots, n. \tag{4.10}$$

Или в матричной форме

$$\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z_q} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_j} = \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z_j} \cdot \frac{\partial W}{\partial z_q}, \ j, q = 1, \cdots, n, \tag{4.11}$$

где $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$, $W = (w_1, \cdots, w_n)$ — матрица-столбец.

Так как $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z_i}$, $i = 1, \cdots, n$, кососимметрична и $\frac{\partial (w_1, \cdots, w_n)}{\partial (z_1, \cdots, z_n)} \neq 0$, на основании леммы 4.1 заключаем, что $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z_i}$, $i = 1, \cdots, n$ — нулевые матрицы.

Таким образом, мы показали, что $\Delta_{ij}$, $i, j = 1, \cdots, n$ — голоморфные функции.

Допустим, что функции $w_p$, $p = 1, \cdots, n$, удовлетворяют системе (4.7) или, что то же самое, системе (4.8) в области $G$. Положим

$$\Lambda_i = w_i - \sum_{p=1}^{n} \Delta_{ip} \overline{w}_p, \ i = 1, \cdots, n, \tag{4.12}$$

где $\Delta_{ip}$ — произвольные голоморфные функции в области $G$, $\Lambda_i$ — функции класса $C^1(G)$.

Определенные равенствами (4.12) функции $\Lambda_i$, $i = 1, \cdots, n$, удовлетворяют условиям Коши-Римана.

Действительно, в силу (4.8)

$$\frac{\partial \Lambda_i}{\partial \bar{z}_q} = \frac{\partial w_i}{\partial \bar{z}_q} - \sum_{p=1}^{n} \Delta_{ip} \frac{\partial \overline{w}_p}{\partial \bar{z}_q} = 0, \ i, q = 1, \cdots, n. \tag{4.13}$$

Перепишем теперь систему (4.12) в матричной форме

$$W = \Phi \overline{W} + \varphi, \tag{4.14}$$

где $W = (w_1, \cdots, w_n)'$; $\Phi = \|\Delta_{ij}\|$, $\varphi = (\Lambda_1, \cdots, \Lambda_n)'$, $\Lambda_p$, $p=1, \cdots, n$ — голоморфные функции в области $G$.

Из уравнения (4.14) легко получается, что

$$W = (E - \Phi\overline{\Phi})^{-1} (\Phi \overline{\varphi} + \varphi), \tag{4.15}$$

где $E$ — единичная матрица порядка $n$.

Воспользовавшись теперь теоремой 3.1, мы получим отображение $T \subset B_Q$ в форме (4.6).

З а м е ч а н и е. Полученное отображение $T^*$ не является вырожденным, так как

$$J = \frac{\partial (w_1, \cdots, w_n, \overline{w}_1, \cdots, \overline{w}_n)}{\partial (z_1, \cdots, z_n, \overline{z}_1, \cdots, \overline{z}_n)} = \sqrt{\det (E - \Phi\overline{\Phi})} \cdot \mathrm{mod}^2 \det A \neq 0, \tag{4.16}$$

где $A = \left\| \dfrac{\partial w_i}{\partial z_j} \right\|$.

## § 5. Примеры биголоморфно неэквивалентных областей, эквивалентных относительно класса квазиголоморфных отображений $B_Q$

Т е о р е м а 5.1. *Отображение*

$$(S) \quad w_i = z_i \frac{(1 - |z_1|^2) \cdots (1 - |z_{i-1}|^2)(1 + |z_{i+1}|^2) \cdots (1 + |z_n|^2)}{\Gamma_n}, \quad i=1, \cdots, n, \tag{5.1}$$

*где* $\Gamma_n = 1 + \sum\limits_{k=1}^{m} |z_1 \cdots z_{2k}|^2$, $m = \left[\dfrac{n}{2}\right]$, *принадлежащее к классу* $B_Q$ *в единичном полицилиндре* $E = \{(z_1, \cdots, z_n) : |z_i| < 1,\ i = 1, \cdots, n\}$, *осуществляет гомеоморфное отображение этого полицилиндра на единичный гипершар* $B = \left\{ (w_1, \cdots, w_n) : \sum\limits_{i=1}^{n} |w_i|^2 < 1 \right\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая в формулах (4.6)

$$\Lambda_i = z_i, \ \Delta_{ij} = \begin{cases} z_i z_j, & \text{если } i < j, \\ 0, & \text{если } i = j, \ i, j = 1, \cdots, n, \\ -z_i z_j, & \text{если } i > j, \end{cases} \tag{5.2}$$

получим отображение (5.1), принадлежащее к классу $B_Q$ в единичном полицилиндре $E$.

Нетрудно показать, что

$$\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2 = \sum_{k=0}^{m} \sum_{\substack{p_1, \cdots, p_{2k+1} \\ p_j < p_{j+1}}} |z_{p_1} \cdots z_{p_{2k+1}}|^2 \Big(1 +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k}\\ p_j<p_{j+1}}}|z_{p_1}\cdots z_{p_{2k}}|^2\Bigg)^{-1}. \tag{5.3}$$

Из формулы (5.3) вытекает, что отображение (5.1) переводит внутренность единичного полицилиндра $E$ во внутренность гипершара $B$.

Нам остается доказать лишь гомеоморфизм отображения (5.1).

Заметим, что точки $z_i=0$, $i=1,\cdots,n$, и только они переходят при отображении (5.1) в точки $w_i=0$, $i=1,\cdots,n$. Поэтому мы можем предполагать, что $z_i\neq 0$ для всех $i=1,\cdots,n$.

Пусть различным точкам $(z_1,\cdots,z_n)$, $(\overset{\bullet}{z}_1,\cdots,\overset{\bullet}{z}_n)\in E$ соответствует при отображении (5.1) одна точка $(w_1,\cdots,w_n)$. Обозначим

$$\overset{\bullet}{z}_k=\alpha_k z_k,\quad k=1,\cdots,n. \tag{5.4}$$

Из формул (5.1), в силу сделанных предположений, вытекает, что

$$\alpha_i\,\frac{(1-|\alpha_1z_1|^2)\cdots(1-|\alpha_{i-1}z_{i-1}|^2)(1+|\alpha_{i+1}z_{i+1}|^2)\cdots(1+|\alpha_nz_n|^2)}{\overset{\bullet}{\Gamma}_n}=$$

$$=\frac{(1-|z_1|^2)\cdots(1-|z_{i-1}|^2)(1+|z_{i+1}|^2)\cdots(1+|z_n|^2)}{\Gamma_n},\quad i=1,\cdots,n, \tag{5.5}$$

где

$$\Gamma_n=1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k}\\ p_j<p_{j+1}}}|z_{p_1}\cdots z_{p_{2k}}|^2,\quad \overset{\bullet}{\Gamma}_n=1+\sum_{k=1}^{m}\sum_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k}\\ p_j<p_{j+1}}}|\alpha_{p_1}\cdots\alpha_{p_{2k}}z_{p_1}\cdots z_{p_{2k}}|^2,$$

$$m=\left[\frac{n}{2}\right].$$

Из уравнений (5.5) следует, что $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ — положительные числа, причем

$$|\alpha_k z_k|<1,\ |z_k|<1,\ k=1,\cdots,n. \tag{5.6}$$

Рассмотрим $i$-ое и $(i+1)$-ое уравнения системы (5.5). Поделив второе уравнение на первое, получим

$$\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\cdot\frac{1-|\alpha_i z_i|^2}{1+|\alpha_{i+1}z_{i+1}|^2}=\frac{1-|z_i|^2}{1+|z_{i+1}|^2}. \tag{5.7}$$

Или иначе

$$(\alpha_{i+1}-\alpha_i)(1+\alpha_i\alpha_{i+1}|z_iz_{i+1}|^2)=(\alpha_i|z_i|^2+\alpha_{i+1}|z_{i+1}|^2)(\alpha_i\alpha_{i+1}-1). \tag{5.8}$$

Если $\alpha_i\alpha_{i+1}-1=0$, то из уравнения (5.8) следует, что $\alpha_i=\alpha_{i+1}=1$. Исключив пока этот случай из рассмотрения, мы можем записать равенство (5.8) в следующем виде:

$$\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{\alpha_i\alpha_{i+1}-1}=\frac{\alpha_i|z_i|^2+\alpha_{i+1}|z_{i+1}|^2}{1+\alpha_i\alpha_{i+1}|z_iz_{i+1}|^2}. \tag{5.9}$$

Из уравнения (5.9) имеем

$$0<\frac{\alpha_{i+1}-\alpha_i}{\alpha_i\alpha_{i+1}-1}\leqslant 1. \tag{5.10}$$

Отсюда вытекает, что

$$\text{либо } \alpha_{i+1} \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \text{ либо } \alpha_{i+1} > \alpha_i > 1, \ i=1,\cdots, n-1 \tag{5.11}$$

(здесь мы учитываем и тот случай, который был ранее исключен из рассмотрения).

Так как различные точки $(z_1,\cdots,z_n)$, $(\alpha_1 z_1,\cdots,\alpha_n z_n) \in E$, в силу нашего предположения, переходят при отображении (5.1) в одну и ту же точку $(w_1,\cdots,w_n)$, из формулы (5.3) вытекает, что

$$\frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k+1} \\ p_j<p_{j+1}}} |z_{p_1}\cdots z_{p_{2k+1}}|^2}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k} \\ p_j<p_{j+1}}} |z_{p_1}\cdots z_{p_{2k}}|^2} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{m} \sum\limits_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k+1} \\ p_j<p_{j+1}}} \alpha_{p_1}^2\cdots\alpha_{p_{2k+1}}^2 |z_{p_1}\cdots z_{p_{2k+1}}|^2}{1+\sum\limits_{k=1}^{m} \sum\limits_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k} \\ p_j<p_{j+1}}} \alpha_{p_1}^2\cdots\alpha_{p_{2k}}^2 |z_{p_1}\cdots z_{p_{2k}}|^2}, \tag{5.12}$$

где $m$ — указанное ранее число.

Непосредственно проверяется, что из равенства (5.12) следует

$$\sum_{l=1}^{n} |z_l|^2 \ (\alpha_l^2-1)(1-\alpha_1^2|z_1|^4)\cdots(1-\alpha_{l-1}^2|z_{l-1}|^4)(1-\alpha_{l+1}^2|z_{l+1}|^4)\cdots(1-\alpha_n^2|z_n|^4)+$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\prod_{k=1}^{k}(\alpha_1^2-1)\cdots(\alpha_{2k+1}^2-1)\,|z_1\cdots z_{2k+1}|^2=0. \tag{5.13}$$

Отсюда, в силу (5.11), вытекает, что

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=1. \tag{5.14}$$

На этом заканчивается доказательство гомеоморфизма отображения (5.1)*.

Нетрудно проверить, что

$$\sum_{k=1}^{l} |w_k|^2 = \frac{(1+|z_{l+1}|^2)^2\cdots(1+|z_n|^2)^2}{\Gamma_n^2}\sum_{k=0}^{q}\sum_{\substack{p_1,\cdots,p_{2k+1}=1 \\ p_j<p_{j+1}}}^{l} |z_{p_1}\cdots z_{p_{2k+1}}|\,\Gamma_l, \tag{5.15}$$

где $l=1,\cdots,n$, $q=[l/2]$. Отсюда следует

Предложение. *Граничные гиперповерхности* $\{|z_l|=1, |z_k|<1, k\neq i, k=1,\cdots,n\}$ *переходят при отображении* (5.1) *в гиперсферы*

$$\sum_{k=1}^{l} |w_k|^2=1. \tag{5.16}$$

Это утверждение вытекает из (5.15), если заметить, что при $|z_l|=1$

$$\Gamma_n=(1+|z_1|^2)\cdots(1+|z_{l-1}|^2)(1+|z_{l+1}|^2)\cdots(1+|z_n|^2) \tag{5.17}$$

---

* Можно доказать, что якобиан отображения $(S)$ отличен от нуля всюду в области $E$ и обращается в нуль лишь на границе $E$.

и

$$\sum_{k=0}^{q} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_{2k+1}=1 \\ p_j < p_{j+1}}}^{l} |z_{p_1} \cdots z_{p_{2k+1}}|^2 = \Gamma_l = (1+|z_1|^2) \cdots (1+|z_{l-1}|^2). \tag{5.18}$$

Приведем еще один пример голоморфно неэквивалентных областей, эквивалентных относительно класса $B_Q$ квазиголоморфных отображений.

Рассмотрим пространство $\mathbf{C}_z^2$ комплексных переменных $z_1$, $z_2$.

Возьмем в (4.6) $\Delta_{12} = z_2 f(z_1)$, где $f(z_1)$ — голоморфная функция в круге $|z_1| < 1$ и $f(0) = 0$, $\Lambda_1 = z_1$, $\Lambda_2 = z_2$.

Справедлива следующая

Теорема 5.2. *Отображение*

$$w_1 = \frac{z_1 + |z_2|^2 \overline{f(z_1)}}{1+|z_2 f(z_1)|^2}, \quad w_2 = z_2 \frac{1-\overline{z}_1 f(z_1)}{1+|z_2 f(z_1)|^2}, \tag{5.19}$$

*где $f(z_1)$ ($|f(z_1)| < 1$) — функция, голоморфная в круге $|z_1| < 1$, и $f(0) = 0$, принадлежащее к классу $B_Q$ в полукруговой области*

$$G = \left\{ (z_1, z_2)\colon |z_2|^2 < \frac{1-|z_1|^2}{1-|f(z_1)|^2} \right\}, \tag{5.20}$$

*осуществляет локально гомеоморфное отображение этой области на единичный гипершар $B = \{(w_1, w_2)\colon |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$.*

Доказательство. Из (5.19) имеем

$$|w_1|^2 + |w_2|^2 = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{1+|z_2 f(z_1)|^2}. \tag{5.21}$$

Из равенства (5.21) следует, что область (5.20) отображается на единичный гипершар $B$.

Докажем теперь локальную гомеоморфность этого отображения. Вычислим

$$I = (1+|z_2 f(z_1)|^2)^{-2} \left| \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(z_1, z_2)} \right|^2. \tag{5.22}$$

В результате вычислений получим

$$I = \frac{1-\overline{z}_1 f(z_1) + |z_2|^2 f'(z_1)(1 - z_1 \overline{f(z_1)})}{(1+|z_2 \cdot f(z_1)|^2)^4}, \tag{5.23}$$

или

$$I = |1-\overline{z}_1 f(z_1)| e^{-i\psi} \frac{e^{2i\psi} + |z_2|^2 f'(z_1)}{(1+|z_2 f(z_1)|^2)^4}, \tag{5.24}$$

где $\psi = \arg(1 - \overline{z}_1 f(z_1))$.

Имеем $1 - \overline{z}_1 f(z_1) \neq 0$ в рассматриваемой области, в силу условий $|z_1| < 1$, $|f(z_1)| < 1$. Это выражение может обращаться в нуль лишь на границе рассматриваемой области.

Предположим теперь, что

$$e^{2H_2} + |z_2|^2 f'(z_1) = 0. \tag{5.25}$$

Отсюда следует, что

$$|z_2|^2 = |f'(z_1)|^{-1}. \tag{5.26}$$

(Заметим, что в точке (0, 0) $I(0, 0) \neq 0$. Поэтому мы можем точку (0, 0) исключить из рассмотрения).

Из равенства (5.26) и неравенства (5.20) вытекает оценка

$$|f'(z_1)| > \frac{1 - |f(z_1)|^2}{1 - |z_1|^2}. \tag{5.27}$$

Полученное неравенство (5.27) противоречит неравенству, найденному при доказательстве леммы Шварца (см. [3], стр. 333).

Противоречие, которое мы получили, доказывает теорему.

Отображение (5.19) существенно отличается от голоморфного, так как в рассматриваемом случае дефект (см. [5], стр. 411)

$$\delta(z_1, z_2) = \frac{2|z_2 f(z_1)|}{1 - |z_2 f(z_1)|^2}. \tag{5.28}$$

В рассматриваемой области $G$ $0 \leqslant \delta(z_1, z_2) < \infty$ ($\delta(z_1, z_2) = \infty$ при приближении к границе области). Отсюда следует, что рассматриваемое отображение не сводится к суперпозиции голоморфного и линейного неголоморфного отображений. Отображение является локально гомеоморфным внутри области $G$ и имеет точки ветвления на границе области.

Замечание 1. При $f(z_1) = z_1$ в предположениях теоремы (5.2 мы получаем гомеоморфное отображение области $G = \{(z_1, z_2): |z_2| < 1\}$ на единичный гипершар $B = \{(w_1, w_2): |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$.

Замечание 2. При $f(z_1) = \alpha z_1^p$ в предположениях теоремы (5.2), где $\alpha$ — комплексный параметр, $p$ — произвольное натуральное число, мы получаем локально гомеоморфное отображение двоякокруговых областей вида

$$G = \left\{ (z_1, z_2): |z_2|^2 < \frac{1 - |z_1|^2}{1 - |\alpha z_1^p|^2} \right\} \tag{5.29}$$

на единичный гипершар $B = \{(w_1, w_2): |w_1|^2 + |w_2|^2 < 1\}$.

Московский институт электронного машиностроения

Поступило 20.IV.1967

Ա. Ա. ՇՄԱՏԿՈՎ

## $C^n_z$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՔՎԱԶԻՀՈԼՈՄՈՐՖ ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՈՒՄՆԵՐԸ, ՈՐՈՆՔ ԿՈՆՖՈՐՄ ԵՆ ԿՈՄՊԼԵՔՍ ՈՒՂԻՂՆԵՐԻ ՎՐԱ

### Ամփոփում

*Հոդվածում կառուցվում և ուսումնասիրվում է $C^n_z$ տարածության կվազիհոլոմորֆ, կոմպլեքս ուղիղների վրա կոնֆորմ արտապատկերումների $B_a$ դասը՝ §§ 1,2-ը ունեն ներածական բնույթ։*

§ 3-ում բերվում են քվազիհոլոմորֆ արտապատկերումների $B_Q$ դասին պատկանող ֆունկցիաների երեք սահմանում և ապացուցվում է այդ սահմանումների համարժեքությունը։

§ 4-ում արտածվում են այն մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնց բավարարում են $B_Q$ դասի բոլոր ֆունկցիաները։ Այդ հնարավորություն է տալիս $B_Q$ քվազիհոլոմորֆ արտապատկերումներն արտահայտել բացահայտ տեսքով։

§ 5-ը նվիրված է կառուցված $B_Q$ դասի նկատմամբ համարժեք, բայց հոլոմորֆորեն ոչ համարժեք տիրույթների որոշ օրինակների։

Մասնավորապես ապացուցվում է, որ $B_Q$ դասին պատկանող ֆունկցիաների միջոցով կարելի է $C^n_z$ տարածության միավոր բազմագլանը հոլոմորֆ կերպով արտապատկերել $C^n_z$ տարածության միավոր հիպերգնդի վրա։

A. A. SHMATKOV

## ON QUASI-HOLOMORPHIC MAPPINGS OF $C^n_z$ SPACE WHICH ARE CONFORM ON COMPLEX LINES

### Summary

The first two sections of the paper are devoted to the introduction and some auxialary statements.

In § 3 three definitions of the class $B_Q$ of quasi-holomorphic mappings are introduced and the equivalence of these definitions is shown.

In § 4 a system of partial differential equations, which is satisfied by the functions from $B_Q$ is derived. This enables to find an explicit representation of the function belonging to $B_Q$.

The § 5 is devoted to the examples of holomorphically inequivalent domains which are equivalent with respect to the class $B_Q$. In particular, the possibility of holomorphic mapping of the unit polycilinder in $C^n_z$ on the unit hyperspher in $C^n_z$ with the aid of the function from $B_Q$ is proved.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Bergman.* A class of pseudoconformal and Quasi-pseudoconformal mappings, Math. Ann., 136, 1958, 134—138.
2. *S. Bergman.* A class of Quasi-pseudoconformal Transformations in the teory of functions of two complex variables, Journ. of Math and mech., 7, № 6, 1958, 937—956.
3. *И. И. Привалов.* Введение в теорию функций комплексного переменного, ГТТИ, 1946.
4. *Д. Е. Рудник.* О квазиголоморфных отображениях, Труды МИЭМ, 1966.
5. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963.
6. *S. Hitotumatu.* On quasi-conformal function of several complex variables, Journ. of Math. and Mech., 8, № 1, 1959, 77—94.
7. *А. А. Шматков.* Об одном классе квазибиголоморфных отображений, Ученые записки Моск., обл. пед. института, т. 138, 157—169.
8. *А. А. Шматков.* Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, Москва, 1965.