ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 6, 1968 Математика

Т. В. СТРОЧИК

К ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ С. Е. ВАРШАВСКОГО

Пусть S—полуполоса в комплексной плоскости $w=u+iv$: $\{u>1,\ \varphi_-(u)<v<\varphi_+(u)\}$, где $\varphi_\pm(u)$ —непрерывные функции на $[1,\infty)$. Полуполосу S можно конформно отобразить на прямолинейную полуполосу S_0 плоскости $z=x+iy$: $\{x>0,\ 0<y<1\}$ посредством аналитической функции $z=Z(w)=X(w)+iY(w)$ так, чтобы точки $w=i\varphi_\pm(1)$ перешли, соответственно, в точки $z=i$, $z=0$, а $w=\infty$ — в $z=\infty$.

Варшавским [1] доказаны два основных неравенства для действительной части отображающей функции в случае так называемой L-полосы. Полуполоса S называется L-полосой (с наклоном границы в точке $u=\infty$, равным нулю), если оба выражения

$$\frac{\varphi_+(u_2)-\varphi_+(u_1)}{u_2-u_1},\ \frac{\varphi_-(u_2)-\varphi_-(u_1)}{u_2-u_1},\ 0<u_1<u_2$$

стремятся к нулю при $u_1,\ u_2\to\infty$.

Если обозначить

$$\psi(u)=\frac{\varphi_+(u)+\varphi_-(u)}{2},\ \theta(u)=\varphi_+(u)-\varphi_-(u),$$

то неравенства Варшавского сформулируются следующим образом:

I. Если S является L-полосой, то ($w_j=u_j+iv_j$, $j=1,2$)

$$X(w_2)-X(w_1)\leqslant\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1+\psi'^2(u)}{\theta(u)}\,du+\frac{1}{12}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\theta'^2(u)}{\theta(u)}\,du+o(1), \tag{I}$$

где $o(1)\to0$ при $u_1<u_2$, $u_1\to\infty$ равномерно по v_1, v_2.

II. Если, кроме того, $\varphi'_\pm(u)$ непрерывны и имеют ограниченную вариацию на $[1,\infty)$, то

$$X(w_2)-X(w_1)\geqslant\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{1+\psi'^2(u)}{\theta(u)}\,du-\frac{1}{4}\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{\theta'^2(u)}{\theta(u)}\,du+o(1), \tag{II}$$

где $o(1)\to0$ при $u_1<u_2$, $u_1\to\infty$ равномерно по v_1, v_2,

Для справедливости второго неравенства на $\varphi_\pm(u)$ накладываются дополнительные условия. Возникает вопрос, насколько они существенны. Рассмотренный ниже простой пример показывает, что без условия ограниченности вариации функций $\varphi'_\pm(u)$ неравенство II, вообще говоря, может не быть верным.

Пример. Пусть $\varphi_\pm(u)=\pm\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin u^{3/2}}{u}$. Рассмотрим полуполосу S: $\{u>1,\ \varphi_-(u)<v<\varphi_+(u)\}$. Для нее $\theta(u)\equiv 1$, $\psi'(u)=\dot\varphi_+(u)=$ $=\varphi'_-(u)=\dfrac{3\cos u^{3/2}}{2u^{1/2}}-\dfrac{\sin u^{3/2}}{u^2}$. Так как $\dot\varphi_\pm(u)\to 0$ при $u\to\infty$, то S будет L-полосой. Кроме того, $\dot\varphi_\pm(u)$ непрерывны на $[1,\infty)$ и их вариация на этом промежутке неограничена, так как

$$\int_1^\infty |d\dot\varphi_\pm(u)|\geqslant\sum_{n=1}^\infty\left|\dot\varphi_+\left(\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)^{2/3}\right)-\dot\varphi_+((2\pi n)^{2/3})\right|=$$

$$=\sum_{n=1}^\infty\left|\frac{3}{2}\frac{1}{(2\pi n)^{1/3}}+\frac{1}{\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)^{4/3}}\right|>\frac{3}{2}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(2\pi n)^{1/3}}=\infty.$$

Заметим, что в нашем примере $\dot\varphi_\pm(u)=O(1)$ при $u\to\infty$.

Если бы мы не добивались выполнения $\dot\varphi_\pm(u)=O(1)$, то пример можно было бы построить проще.

Предположим, что для $z=Z(w)$ выполняется неравенство (II)

$$X(w_2)-X(w_1)>\int_{u_1}^{u_2}[1+\psi'^2(u)]\,du+o(1)>u_2-u_1+\int_{u_1}^{u_2}\psi'^2(u)\,du-C_1. \tag{1}$$

Здесь и дальше C_j обозначают положительные постоянные, не зависящие от u_1 и u_2.

Пусть $\tilde S$ — полуполоса в w-плоскости: $\{u>1,\ \tilde\varphi_-(u)<v<\tilde\varphi_+(u)\}$, где $\tilde\varphi_\pm(u)=\pm\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{(\sin u^{3/2}\mp 1)^2}{4u}$. Так как

$$\varphi_+(u)-\tilde\varphi_+(u)=\frac{\sin u^{3/2}}{u}+\frac{(\sin u^{3/2}-1)^2}{4u}=\frac{(\sin u^{3/2}+1)^2}{4u}\geqslant 0,$$

$$\tilde\varphi_-(u)-\varphi_-(u)=\frac{(\sin u^{3/2}-1)^2}{4u}-\frac{\sin u^{3/2}}{u}=\frac{(\sin u^{3/2}-1)^2}{4u}\geqslant 0,$$

то $\tilde S\subset S$.

Рассмотрим в w-плоскости четырехугольник $\{v_1\leqslant u\leqslant u_2,\ \varphi_-(u)\leqslant\leqslant v\leqslant\varphi_+(u)\}$. Функция $z=Z(w)$ отображает его на четырехугольник в z-плоскости, лежащий в полуполосе S_0 и ограниченный кривыми $z=Z(u_1+iv)$, $\varphi_-(u_1)\leqslant v\leqslant\varphi_+(u_1)$; $z=Z(u_2+iv)$, $\varphi_-(u_2)\leqslant v\leqslant\varphi_+(u_2)$; $y=0$; $y=1$.

Пусть функция $\tilde z=\tilde Z(w)=\tilde X(w)+i\tilde Y(w)$ отображает полуполосу $\tilde S$ на полуполосу $\tilde S_0$ плоскости $\tilde z==\tilde x+i\tilde y$: $\{\tilde x>0,\ 0<\tilde y<1\}$. Обозначим

$$X(w_1^{(1)})=\max_{\operatorname{Re} w_1=u_1}X(w_1);\quad X(w_2^{(1)})=\min_{\operatorname{Re} w_2=u_2}X(w_2);$$

$$\bar{X}(w_1^{(2)}) = \min_{\operatorname{Re} w_1 = u_1} \bar{X}(w_1); \quad \bar{X}(w_2^{(2)}) = \max_{\operatorname{Re} w_2 = u_2} \bar{X}(w_2).$$

Так как модуль четырехугольника* $\{u_1 \leqslant u \leqslant u_2,\ \varphi_-(u) \leqslant v \leqslant \leqslant \varphi_+(u)\}$ не превышает модуля четырехугольника $\{u_1 \leqslant u \leqslant u_2,\ \bar{\varphi}_-(u) \leqslant \leqslant v \leqslant \bar{\varphi}_+(u)\}$, то имеет место неравенство

$$\bar{X}(w_2^{(2)}) - \bar{X}(w_1^{(2)}) > X(w_2^{(1)}) - X(w_1^{(1)}). \tag{2}$$

Полуполоса $\bar{S}$ является L-полосой, поэтому к функции $\tilde{z} = \tilde{Z}(w)$ можно применить неравенство (1) Варшавского

$$\tilde{X}(w_2^{(2)}) - \tilde{X}(w_1^{(2)}) \leqslant \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \tilde{\psi}'^2(u)}{\bar{\theta}(u)}\, du + \frac{1}{12} \int_{u_1}^{u_2} \frac{\bar{\theta}'^2(u)}{\bar{\theta}(u)}\, du + C_2. \tag{3}$$

В нашем случае $\tilde{\psi}(u) = \dfrac{\sin u^{3/2}}{2u} = \dfrac{\psi(u)}{2}$; $\bar{\theta}(u) = 1 - \dfrac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u}$;

$$\bar{\theta}'(u) = -\frac{3 \sin u^{3/2} \cos u^{3/2}}{2u^{1/2}} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u^2}.$$

Неравенство (3) перепишется так

$$\bar{X}(w_2^{(2)}) - \bar{X}(w_1^{(2)}) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{u_1}^{u_2} \frac{1 + \dfrac{\psi'^2(u)}{4} + \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{3 \sin u^{3/2} \cos u^{3/2}}{2u^{1/2}} - \dfrac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u^2}\right)^2}{1 - \dfrac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u}}\, du + C_2 =$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left[1 + \frac{\psi'^2(u)}{4} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} + \frac{3}{16} \frac{\sin^2 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{u} + O\left(\frac{1}{u^{3/2}}\right)\right] du + C_2 <$$

$$\leqslant \int_{u_1}^{u_2} \left[1 + \frac{\psi'^2(u)}{4} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} + \frac{3}{16} \frac{\sin^2 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{u}\right] du + C_3. \tag{3'}$$

Сравнивая (1) и (3'), согласно (2) получаем

$$u_2 - u_1 + \int_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\psi'^2(u)}{4} + \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} + \frac{3}{16} \frac{\sin^2 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{u}\right) du + C_3 >$$

$$\geqslant u_2 - u_1 + \int_{u_1}^{u_2} \psi'^2(u) - C_1$$

или

* О модулях четырехугольников и их свойствах см., например, [7].

$$C_4 > \int\limits_{u_1}^{u_2} \left(\frac{27}{16} \frac{\cos^2 u^{3/2}}{u} - \frac{\sin^2 u^{3/2} + 1}{2u} - \frac{3}{16} \frac{\cos^2 u^{3/2} \sin^2 u^{3/2}}{u} \right) du.$$

Учитывая очевидное тождество

$$27 \cos^2 \varphi - 8 \sin^2 \varphi - 8 = 3 \cos^2 \varphi + 16 \cos 2\varphi,$$

получаем

$$C_4 > \frac{3}{16} \int\limits_{u_1}^{u_2} \left(\frac{\cos^2 u^{3/2}}{u} - \frac{\sin^2 u^{3/2} \cos^2 u^{3/2}}{u} \right) du + \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\cos (2u^{3/2})}{u} du =$$

$$= \frac{3}{16} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du + \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\cos (2u^{3/2})}{u} du > \frac{3}{16} \int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du - C_5.$$

Здесь мы учли, что интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{\cos (2u^{3/2})}{u} du$ сходится. Таким образом, $\int\limits_{u_1}^{u_2} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du < C_6$. Фиксируя u_1 и устремляя u_2 к ∞, получим, что $+\infty = \int\limits_{u_1}^{\infty} \frac{\cos^4 u^{3/2}}{u} du \leqslant C_6$.

Мы пришли к противоречию.

В заключение выражаю благодарность А. А. Гольдбергу, под чьим руководством выполнена эта работа.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило 20.IV.1967

Տ. Վ. ՍՏՐՈՉԻԿ

Ս. Ե. ՎԱՐՇԱՎՍԿՈՒ ՄԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ցույց է տրված անվերջ շերտերի կոնֆորմ արտապատկերման վերաբերյալ Վարշավսկու [1] հայտնի թեորեմում նշված մի սահմանափակման էական լինելը։

T. W. STROCHIK

ON A THEOREM OF S. E. WARSCHAWSKI

Summary

Present note shows, that in a well-known theorem of Warschawski, concerning conformal mappings of infinite stripes, a certain restriction is essential.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Е. Варшавский*. Конформное отображение бесконечных полос, Сб. переводов „Математика“, 2, № 4, 1958, 67—116.
2. *Г. М. Голузин*. Геометрическая теория функций комплексного переменного, Москва, изд. „Наука“, 1966.