

А. Г. РАММ

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ  
ПРОДОЛЖЕНИИ РЕЗОЛВЕНТНОГО ЯДРА ОПЕРАТОРА  
ШРЕДИНГЕРА ПО СПЕКТРАЛЬНОМУ ПАРАМЕТРУ§ 1. Аналитическое продолжение резольвентного ядра  
в случае области с границей

Пусть  $L$  — полуограниченный снизу самосопряженный оператор,  $R(-p^2) = (L + p^2)^{-1}$  — его резольвента,  $p = \sigma + i\tau$  — комплексное переменное.

Моделируя часто встречающиеся при исследовании спектра оператора Шредингера случаи, будем считать, что оператор  $L$  имеет абсолютно непрерывный положительный спектр и дискретный отрицательный спектр конечной общей кратности. Резольвента, рассматриваемая как функция переменной  $p$ , аналитична при  $\sigma > 0$ , имеет разрез по мнимой оси и конечное число полюсов в точках  $\sigma_n > 0$ , соответствующих отрицательному дискретному спектру. Обычно используемый спектральный параметр связан с параметром  $p$  формулами  $\lambda = -p^2$ ,  $k = \sqrt{\lambda} = ip$ . Нам удобно пользоваться параметром  $p$ , совпадающим с параметром преобразования Лапласа, имея в виду приложение к нестационарным задачам. В разных задачах физики и математики возникает вопрос об аналитическом продолжении аналитической при  $\sigma > 0$  функции  $R(-p^2)$  через разрез, соответствующий непрерывному спектру, на второй лист римановой поверхности. В работе [1] было исследовано ядро резольвенты оператора Шредингера при  $\sigma \geq 0$  в случае  $D = E_3$  и в случае внешности ограниченной области. В работах [2]—[3] аналогичные результаты были получены для некоторых областей с бесконечной границей. Излагаемые ниже результаты опубликованы без доказательства в заметках [4]—[6]. В настоящей работе будет исследовано аналитическое продолжение ядра резольвенты оператора Шредингера в полуплоскость  $\sigma < 0$ . Будет доказано, что ядро резольвенты оператора Шредингера задачи

$$(L + p^2) H(x, y, -p^2) = (-\Delta + q(x) + p^2) H(x, y, -p^2) = \delta(x - y) \text{ в } D, \quad (1.1)$$

$$H(x, y, -p^2)|_{x \in \Gamma} = 0, \quad (1.2)$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial H}{\partial n} + p H \right|^2 ds = 0, \quad (1.3)$$

где  $D \subset E_3$  — внешность ограниченной области с ляпуновской границей  $\Gamma$ , а потенциал  $q(x)$  является вещественной финитной функцией, один раз дифференцируемой, допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного  $p$ . Это аналитическое продолжение является мероморфной функцией при  $\sigma < 0$ ; при  $\sigma \geq 0$  ядро резольвенты имеет полюса лишь в точках  $\sigma_n > 0$ , соответствующих отрицательному дискретному спектру оператора  $L$ . В отдельных случаях удастся показать, что некоторая полоса  $-\sigma_0 < \sigma < 0$ ,  $\sigma_0 > 0$  свободна от полюсов ядра резольвенты. В случае  $D = E_3$  будет доказано, что полюса резольвенты в полуплоскости  $\sigma < 0$  лежат левее некоторой логарифмики  $\sigma = -A \ln|\tau| + B$ , где  $A > 0$  и  $B$  — некоторые постоянные. Если

$$|q(x)| = O(e^{-a|x|}), \quad a > 0 \quad (1.4)$$

для любого  $a > 0$ , то ядро допускает аналитическое продолжение на всю плоскость как мероморфная функция. Если оценка (4) верна для некоторого фиксированного  $a > 0$ , то аналитическое продолжение возможно в полуплоскость  $\sigma > -\frac{a}{2}$ . В плоском случае характер результатов сохраняется, но аналитическое продолжение осуществляется на плоскость с разрезом вдоль отрицательной вещественной полуоси. Точка  $p = 0$  является точкой ветвления логарифмического типа для ядра  $H(x, y, -p^2)$ .

Ниже в этом параграфе предполагается, что  $D \subset E_3$  — внешность ограниченной области с ляпуновской границей. Нам понадобится следующая

**Теорема 1.0.** ([7], [13]). Если  $A(p)$  — аналитическая операторнозначная функция, определенная в связной области  $\Delta$  плоскости комплексного переменного  $p$ , и если  $A(p)$  — вполне непрерывный оператор при всех  $p \in \Delta$ , то либо оператор  $B - A(p)$  не имеет ограниченного обратного ни в одной точке области  $\Delta$ , либо этот обратный существует всюду в  $\Delta$ , кроме, быть может, счетного числа изолированных точек. Здесь  $B$  — ограниченный оператор, имеющий ограниченный обратный оператор\*.

**Теорема 1.1.** Пусть  $q(x)$  — финитная дифференцируемая функция,  $D \subset E_3$  — внешность ограниченной области с ляпуновской границей,  $f(y)$  — финитная дважды дифференцируемая функция. Тогда функция

$$u(x, p) = \int_D H(x, y, -p^2) f(y) dy \quad (1.5)$$

допускает аналитическое продолжение на всю плоскость комплексного переменного  $p$  как мероморфная функция. При  $\sigma \geq 0$  она имеет

\* Упомянутые изолированные точки являются полюсами оператора  $(B - A(p))^{-1}$  (см. приложение).

конечное число полюсов, расположенных в точках  $\sigma_n = \sqrt{|\lambda_n|}$ , где  $\lambda_n = -|\lambda_n|$  — точки отрицательного дискретного спектра оператора задачи (1) — (3).

Доказательство. С помощью формулы Грина при  $\sigma \geq 0$  получаем

$$u(x, p) = \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) dy - \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} q(y) u(y, p) dy + \\ + \int_\Gamma \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \quad (1.6)$$

Выберем число  $k > 0$  так, чтобы внутренняя задача Неймана для оператора Лапласа для области  $\Omega = E_3/D$  не имела собственного числа  $k^2$ . Перепишем уравнение (6) в виде

$$Bu = u - \int_\Gamma \frac{e^{-k|x-s|}}{4\pi|x-s|} \frac{\partial u}{\partial n} ds = g(p) - A(p)u, \quad (1.7)$$

где

$$A(p)u = \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} q(y) u(y) dy - \\ - \int_\Gamma \frac{e^{-p|x-s|}}{4\pi|x-s|} \frac{e^{-k|x-s|}}{4\pi|x-s|} \frac{\partial u}{\partial n} ds = A_1(p) + A_2(p). \quad (1.8)$$

Пусть  $\Delta$  — произвольная замкнутая ограниченная область на плоскости комплексного переменного  $p$ , содержащая внутри себя отрезок оси  $\sigma = 0$ . Обозначим

$$\alpha = \min_{p \in \Delta} \operatorname{Re} p. \quad (1.9)$$

Рассмотрим уравнение (7) в пространстве  $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$  с нормой

$$\|u\| = \max_{x \in D} e^{-\alpha|x|} \left[ |u| + \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| \right], \quad (1.10)$$

где поле направлений  $n$  обращается на поверхности  $\Gamma$  в поле нормалей к  $\Gamma$ . Проверим, что оператор  $B$  имеет ограниченный обратный в введенном пространстве. Пусть

$$Bu = h, \quad (1.11)$$

где  $h \in C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$ . Дифференцируя обе части этого уравнения по направлению нормали к поверхности  $\Gamma$  и устремляя после этой операции точку  $x$  к точке  $s \in \Gamma$ , получаем

$$\frac{\mu}{2} - Q\mu = \frac{\partial h}{\partial n}, \quad (1.12)$$

где

$$\mu(s) = \frac{\partial u}{\partial n}, \quad Q\mu = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{e^{-k|s-s'|}}{4\pi|s-s'|} \mu(s') ds', \quad (1.13)$$

а  $n$  — направление внешней к области  $D$  нормали.

Уравнение (12) является фредгольмовым в пространстве  $C(\Gamma)$ . Оно однозначно разрешимо, если однородное уравнение не имеет ненулевого решения. Пусть  $\mu$  — ненулевое решение однородного уравнения (12). Тогда функция  $u(x) = \int_{\Gamma} \frac{e^{-k|x-s|} \mu(s)}{4\pi(x-s)} ds$  является решением

однородной внутренней задачи Неймана в области  $\Omega$  и, следовательно, в силу выбора числа  $k$ , есть тождественный нуль. Поэтому  $u|_{\Gamma} = 0$ . Функция  $u(x)$  является, следовательно, решением задачи

$$(-\Delta + k^2)u = 0 \text{ в } D, u|_{\Gamma} = 0, k^2 > 0, u|_{\infty} = 0. \quad (1.14)$$

Поэтому  $u \equiv 0$  в  $D$ . Следовательно,  $\mu \equiv 0$ , и уравнение (12) однозначно разрешимо в  $C(\Gamma)$ . Решение уравнения (11) имеет вид

$$u = h(x) + \int_{\Gamma} \frac{e^{-k|x-s|}}{4\pi|x-s|} \mu(s) ds$$

и, очевидно, принадлежит  $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$ . Таким образом, оператор  $B$  имеет ограниченный обратный, определенный на всем пространстве  $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$ . Так как  $f(x)$  финитна, то свободный член в уравнении (7) есть аналитическая в  $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$  вектор-функция. Чтобы применить теорему 1.0 достаточно проверить, что оператор-функция  $A(p)$  является аналитической и вполне непрерывной при  $p \in \Delta$ . Аналитичность вытекает из аналитичности ядра, финитности функции  $q(x)$  и конечности границы  $\Gamma$ . Проверка полной непрерывности оператора  $A(p)$  в пространстве  $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$  не составляет труда. Проверим, например, что оператор  $A_2(p)$  вполне непрерывен\*. Ввиду гладкости ядра оператор  $A_2(p)$  повышает гладкость. Следовательно, ограниченное в  $C_1(e^{-\alpha|x|}, D)$  множество он переводит в компактное в любой конечной области множество. Полная непрерывность оператора  $A_2(p)$  будет установлена, если мы проверим, что

$$\max_{|x| > N} e^{-\alpha|x|} \left[ |A_2(p)u| + \left| \frac{\partial}{\partial n} A_2(p)u \right| \right] \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty.$$

Имеем, например

$$\begin{aligned} \max_{|x| > N} e^{-\alpha|x|} \left| \frac{\partial}{\partial n} A_2(p)u \right| &\leq \max_{|x| > N} C e^{-\alpha|x|} \int_{\Gamma} \left| \frac{e^{-p|x-s|-k|x-s|}}{|x-s|} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| ds \leq \\ &\leq C \max_{|x| > N} \int_{\Gamma} \frac{e^{(-\alpha + |\operatorname{Re} p| - k)|x|}}{N} ds \rightarrow 0 \text{ при } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Слагаемое  $e^{-\alpha|x|} |A_2(p)u|$  рассматривается вполне аналогично. Таким образом, полная непрерывность оператора  $A(p)$  установлена. Проверим, наконец, что найдется  $p \in \Delta$  такое, что однородное уравнение (7) не имеет ненулевого решения. Если это будет показано, то из теоре-

\* Аналогично рассматривается оператор  $A_1(p)$ .

мы 1.0 и известных спектральных свойств оператора Шредингера (1) — (3) будет следовать утверждение теоремы 1. Пусть  $u(x)$  — решение однородной задачи (7),  $p = i\tau$ ,  $\tau > 0$ , причем  $\tau^2$  не есть собственное число оператора  $-\Delta$  задачи Неймана для области  $\Omega$ . Поскольку  $\Delta$  содержит отрезок оси  $\sigma = 0$  такое значение  $p$  найдется. Формулу (6) можно рассматривать при  $f(x) = 0$  как представление функции  $u(x)$ . Функция  $u(x)$  удовлетворяет однородному уравнению (1), в котором надо положить  $p = i\tau$ , и условию (3). Обозначим через  $\eta(s)$  граничное значение  $u(x)/_{x \in \Gamma}$ , и покажем, что  $\eta(s) \equiv 0$ . Написав для  $u(x)$  представление по формуле Грина и сравнив его с формулой (6), получим

$$\int_{\Gamma} \eta(s) \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{e^{i\tau|x-s|}}{4\pi|x-s|} ds = 0, \quad x \in D.$$

Переходя на поверхность и используя известные формулы теории потенциала, получим

$$\frac{\eta(s)}{2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_{s'}} \frac{e^{i\tau|s-s'|}}{4\pi|s-s'|} \eta(s') ds' = 0. \quad (1.15)$$

Так как  $\tau^2$  не есть собственное число внутренней задачи Неймана, то  $\eta(s) \equiv 0$ . Следовательно,  $u(x)$  есть решение однородной задачи (1) — (3), в которой надо положить  $p^2 = -\tau^2$ ,  $\tau^2 > 0$ . Поэтому  $u \equiv 0$ . Теорема 1 полностью доказана.

**Замечание 1.1.** Утверждение и доказательство теоремы 1 сохраняют силу, если оценка (4) выполнена при любом  $a > 0$ .

**Замечание 1.2.** Если оценка (4) выполнена для некоторого фиксированного  $a > 0$ , то аналитическое продолжение функции  $u(x, p)$  возможно лишь в полуплоскость  $\sigma > -\frac{a}{2}$ , поскольку интегральный оператор в уравнении (6) при сделанном о потенциале предположении является вполне непрерывным и аналитически зависящим от  $p$  оператором лишь при  $\sigma > -\frac{a^*}{2}$ . В самом деле, подберем

наибольшее  $b > 0$  такое, чтобы этот оператор был хотя бы ограничен в  $C(D, e^{-b|x|})$ . Имеем

$$\begin{aligned} \max_{x \in D} e^{-b|x|} \left| \int_D \frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|} q(y) v(y) dy \right| &\leq C \max_{x \in D} e^{-b|x|} \int_D \frac{e^{-\sigma|x-y| - a|y| + b|y|}}{|x-y|} dy \leq \\ &\leq C \max_{x \in D} \int_D \frac{e^{-\sigma|x-y| + (b-a)|y| - b|x|}}{|x-y|} dy \leq C \max_{x \in D} \times \\ &\times \int_D \frac{e^{-(\sigma-b)|x| + (b-a-\sigma)|y|}}{|x-y|} dy. \end{aligned} \quad (1.16)$$

В [15] показано, что степенное убывание потенциала обеспечивает дифференцируемость функции  $u(x, p)$  по  $p$  при  $\sigma = 0$ . В том случае аналитическое продолжение в область  $\sigma < 0$ , вообще говоря, невозможно. Исключения составляют потенциалы, аналитические по  $x$ , например, Кулоновский потенциал.

Чтобы правая часть неравенства (16) была ограничена необходимо, чтобы  $-\sigma \leq b$ ,  $-\sigma + b \leq a$ , следовательно, если  $b \leq \frac{a}{2}$ ,  $-\sigma < \frac{b}{2}$ , то оператор в уравнении (6) ограничен в  $C(D, e^{-\frac{a}{2}|x|})$ . Легко проверить, что при  $b = \frac{a}{2}$  и  $-\sigma < \frac{a}{2}$  этот оператор вполне непрерывен в  $C(D, e^{-\frac{a}{2}|x|})$  и аналитически зависит от  $p$  при  $\sigma > -\frac{a}{2}$ . Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным при доказательстве теоремы 1.

Во многих задачах интересно знать, существует ли полоса  $-\sigma_0 < \sigma < 0$ ,  $\sigma_0 > 0$ , свободная от полюсов функции  $u(x, p)$ . Рассмотрим, например, нестационарную задачу:

$$U_{tt} + LU = f(x) e^{i\omega t} \text{ в } D \times [0, \infty), \quad (1.17)$$

$$U|_{t=0} = U_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{\Gamma} = 0, \quad (1.18)$$

и будем считать, что оператор  $L$  не имеет дискретного спектра. Достаточно, например, считать, что  $q(x) \geq 0$ . Преобразуя задачу (17) — (18) по Лапласу и применяя формулу обращения, получим

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt} u(x, p)}{p-i\omega} dp, \quad \sigma > 0, \quad (1.19)$$

где  $u(x, p)$  определено формулой (5). Пусть выполнена оценка

$$|u(x, p)| < \frac{c}{1 + |p|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \text{ при } |p| \rightarrow \infty, \quad \sigma > -\sigma_0, \quad \sigma_0 > 0 \quad (*)$$

и предположения теоремы 1. Тогда, если в полосе  $-\sigma_0 < \sigma < 0$ ,  $\sigma_0 > 0$  нет полюсов функции  $u(x, p)$ , можно передвинуть контур интегрирования в формуле (19) влево. При этом надо добавлять вычет в полюсе  $p = i\omega$ . В результате получим

$$U(x, t) = e^{i\omega t} u(x, i\omega) + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\sigma_1-i\infty}^{-\sigma_1+i\infty} \frac{u(x, p)}{p-i\omega} e^{pt} dp, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_0. \quad (1.20)$$

Отсюда, в силу оценки (\*), вытекает, что при  $t \rightarrow \infty$

$$U(x, t) = e^{i\omega t} u(x, i\omega) + O(e^{-\sigma_1 t}), \quad \sigma_1 > 0. \quad (1.21)$$

Покажем, что, если оценка (\*) выполнена при  $\sigma > -\sigma_0$ ,  $\sigma_0 > 0$  и точка  $p = 0$  не является полюсом функции  $u(x, p)$ , то эта функция не имеет полюсов в некоторой полосе  $-\sigma_1 < \sigma < 0$ ,  $\sigma_1 > 0$ . Достаточно заметить, что, в силу этой оценки, при  $|\tau| \geq N$  и достаточно большом  $N$   $u(x, p)$  ограничена в полосе  $-\sigma_0 < \sigma < 0$ . Так как по теореме 1 функция  $u(x, p)$  мероморфна, то при  $|\tau| > N_1 - \sigma_0 < \sigma < 0$  она не имеет полюсов. Во всех точках  $\sigma = 0$ ,  $|\tau| < N$  функция  $u(x, p)$  аналитична, следовательно, вокруг каждой из них существует некоторый круг, в котором  $u(x, p)$  аналитична. По лемме Гейне-Бореля существует конечная система та-

ких кругов, покрывающая отрезок  $\sigma = 0$ ,  $|\tau| < N$ . Повтому существует полоса  $|\tau| < N$ ,  $-\rho < \sigma < 0$ , в которой функция  $u(x, \rho)$  аналитична. В качестве  $\tau_1$  можно взять  $\min(\tau_0, \rho)$ .

Мы не будем здесь касаться трудного вопроса о том, каким условиям должны удовлетворять потенциал и область для того, чтобы оценка (\*) была выполнена в некоторой полосе  $-\tau_0 < \sigma < 0^*$ . В следующем параграфе этот вопрос будет подробно разобран в случае  $D = E_3$ .

## § 2. Аналитическое продолжение резольвентного ядра в случае всего пространства. Распределение полюсов резольвенты на втором листе римановой поверхности

В этом параграфе предполагается, что  $D = E_3$ . Решение задачи (1.1) — (1.3) для случая  $D = E_3$  обозначим  $G(x, y, -p^2)^*$ . В силу теоремы 1.1 в условиях этой теоремы функция  $G(x, y, -p^2)$  допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость  $p$  как мероморфная функция. Полуплоскость  $\sigma < 0$  соответствует второму листу римановой поверхности  $\sqrt{-\lambda}$ . Основная задача состоит в нахождении области в полуплоскости  $\sigma < 0$ , свободной от полюсов функции  $v(x, p)$ . Нам будет удобно использовать параметр  $k = ip$ ,  $k = k_1 + ik_2$ . Исходным является уравнение

$$v(x, k) = \int \frac{e^{ik|x-y|}}{-4\pi|x-y|} q(y) v(y, k) dy + g(x, k), \quad (2.1)$$

где

$$g(x, k) = \int \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} f(y) dy. \quad (2.2)$$

Относительно  $f(y)$  и  $q(y)$  сохранены предположения теоремы 1.1. Интегрирование без обозначения области интегрирования ведется по всему пространству  $E_3$ . Удобно рассматривать один раз проинтегрированное уравнение (1)

$$[I - T(k)] v = \psi, \quad (2.3)$$

где

$$T(k)v = \int T(x, y, k) q(y) v(y) dy, \quad (2.4)$$

$$T(x, y, k) = \int \frac{e^{ik[|x-z| + |z-y|]}}{16\pi^2 |x-z| \cdot |z-y|} q(z) dz, \quad (2.5)$$

$$\psi(x, k) = \int \frac{e^{ik|x-y|}}{-4\pi|x-y|} q(y) g(y, k) dy + g(x, k). \quad (2.6)$$

Для того чтобы указать область, свободную от полюсов функции  $v(x, k)$ , достаточно указать область, в которой

$$\|T(k)\| \leq \beta < 1. \quad (2.7)$$

В самом деле, в силу финитности функций  $f(y)$  и  $q(y)$ , функции  $\psi(x, k)$  и  $T(x, y, k)$  являются целыми функциями  $k$ . При выполнении условия (7) уравнение (3) однозначно разрешимо и, в силу теоремы 1.0, его

\* См. недавно вышедшую книгу [16].

решение аналитично по  $k$ . Займемся выяснением того, в какой области имеет место неравенство (7). Введем, как это сделано в работе [8], вытянутые сфероидальные координаты [9]:

$$\begin{aligned} z_1 &= l s t + a, \quad z_2 = l \sqrt{(s^2 - 1)(1 - t^2)} \cos \varphi + b, \\ z_3 &= l \sqrt{(s^2 - 1)(1 - t^2)} \sin \varphi + c, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} = \frac{\bar{x} + \bar{y}}{2}, \quad z = (z_1, z_2, z_3). \quad (2.9)$$

Якобиан этой замены  $J = l^3 (s^2 - t^2)$ . Пределы изменения новых переменных

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 1 \leq s < \infty, \quad -1 \leq t \leq 1. \quad (2.10)$$

Имеют место формулы

$$\begin{aligned} |x - z| + |z - y| &= 2ls, \quad |x - z| - |z - y| = 2lt, \\ 2l &= |x - y|; \quad |x - z| \cdot |z - y| = l^2 (s^2 - t^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В новых переменных ядро  $T(x, y, k)$  примет вид

$$T(x, y, k) = l \int_1^\infty e^{2ikls} Q(s) ds, \quad (2.12)$$

где

$$Q(s) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dt \cdot \bar{q}(s, t, \varphi), \quad (2.13)$$

а  $q(s, t, \varphi) = q(z_1, z_2, z_3)$ . В силу финитности функции  $q(z_1, z_2, z_3)$  интегрирование в (12) фактически ведется по конечному промежутку. Имеем

$$T(x, y, k) = -\frac{e^{2ikl}}{2ik} Q(1) - \frac{1}{2ik} \int_1^\infty e^{2ikls} Q'(s) ds. \quad (2.14)$$

Пусть  $k_2 = \Phi(k_1)$ , где  $\Phi(t)$  — функция, которую мы выберем ниже. Из формулы (14) получаем

$$|T(x, y, k)| < C \frac{e^{-2l\Phi(k_1)}}{\sqrt{k_1^2 + \Phi^2(k_1)}}, \quad 2l = |x - y|. \quad (2.15)$$

Положим для  $|k_1| > 1$

$$\Phi(k_1) = -A \ln |k_1|, \quad 2dA \leq \beta < 1, \quad (2.16)$$

где  $d = \text{diam } D_q$ , а  $D_q$  — область, вне которой финитная функция  $q(x) \equiv 0$ , и проверим, что при  $|k_1| \rightarrow \infty$  будет выполнено условие (7), причем оператор  $T$  рассматривается в пространстве  $C(E, e^{-A \ln |k_1| |x|})$ . Действительно

$$|T| \leq \max_{x \in E} e^{-A \ln |k_1| |x|} \int |T(x, y, k)| |q(y)| e^{A \ln |k_1| |y|} dy \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq C \max_{x \in E_1} \int_{D_q} \frac{e^{A \ln |k_1| [|x-y| - |x| + |y|]}}{\sqrt{k_1^2 + A^2 \ln^2 |k_1|}} dy \leq \frac{C}{|k_1|} \max_{x \in E_1} \int e^{A \ln |k_1| [|x| + |y| - |x| + |y|]} dy \leq \\ &\leq \frac{C}{|k_1|} \max_{x \in E_1} \int_{D_q} e^{2A \ln |k_1| |y|} dy \leq \frac{C}{|k_1|} e^{2 \ln |k_1|} \text{mes } D_q \leq \frac{C}{|k_1|^{1-\beta}} \xrightarrow{|k_1| \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Из формулы (17) вытекает даже более сильное соотношение, чем (7) В частности из этой формулы и теоремы 1.1 вытекает

**Теорема 2.1.** Пусть  $D = E_3$  и выполнены условия теоремы 1.1. Тогда резольвентное ядро оператора Шредингера  $G(x, y, k^2)$ ,  $k = ip$  допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость  $k$  как мероморфная функция. При  $k_2 > 0$  она аналитична всюду за исключением конечного числа полюсов  $k_n = i x_n$ ,  $x_n \geq 0$ , соответствующих точкам отрицательного дискретного спектра оператора Шредингера. В полуплоскости  $k_2 < 0$  полюса резольвентного ядра  $G(x, y, k^2)$  лежат под кривой

$$k_2 = -A \ln |k_1| + B, \quad (2.18)$$

где  $A > 0$  и  $B$  — некоторые постоянные. Существует функция  $F(k_1)$  и некоторая постоянная  $d > 0$  такие, что

$$F(k_1) > d \text{ при } -\infty < k_1 < \infty; F(k_1) \sim A \ln |k_1| \text{ при } |k_1| \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

и все полюса ядра  $G(x, y, k^2)$  в полуплоскости  $k_2 < 0$  лежат под кривой  $k_2 = -F(k_1)$ . Для доказательства достаточно заметить, что ядро  $G(x, y, k^2)$  удовлетворяет уравнению

$$G(x, y, k^2) + \int \frac{e^{ik_1|x-z|}}{4\pi|x-z|} q(z) G(z, y, k^2) dz = \frac{e^{ik_1|x-y|}}{4\pi|x-y|}. \quad (2.20)$$

Это уравнение легко приводится к уравнению вида (3) для функции  $\Gamma(x, y, k^2) = G(x, y, k^2) - \frac{e^{ik_1|x-y|}}{-4\pi|x-y|}$ . Поэтому для доказательства теоремы 1 остается заметить, что оценка (17) позволяет утверждать, что выполнено неравенство (\*) для функции  $\int G(x, y, -p^2) f(y) dy$ . В самом деле, в силу оценки (17) из уравнения (3) вытекает, что при  $|k_1| \rightarrow \infty$ ,  $k = ip$

$$\|v\|_{C(E_3, e^{-A \ln |k_1| |x|})} \leq C \| \psi \|_{C(E_3, e^{-A \ln |k_1| |x|})}. \quad (2.21)$$

Поэтому достаточно проверить, что

$$|\psi(x, k)| < \frac{C}{1 + |k|^\gamma}, \quad \gamma > 0, \quad k_2 > -\sigma_0, \quad |k_1| \rightarrow \infty \quad (2.22)$$

при всех  $x \in \tilde{D}$ , где  $\tilde{D}$  — любая конечная область. Для этого, в силу формул (2), (6) достаточно установить оценку (22) для функции  $g(x, k)$ . Это легко сделать, например, следующим образом. Из определения  $g(x, k)$  следует, что

$$(\Delta + k^2) g(x, k) = -f(x). \quad (2.23)$$

Поэтому

$$g(x, k) = -\frac{f(x)}{k^2} - \frac{\Delta g(x, k)}{k^2}. \quad (2.24)$$

Но

$$|\Delta g| = \left| \int \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \Delta f dy \right| \leq C \int_{D_f} \frac{e^{-k_2|x-y|}}{|x-y|} dy, \quad (2.25)$$

где  $D_f$  носитель финитной функции  $f(x)$ . Из (25) получаем, что при любом  $k_2$  верно неравенство

$$\|\Delta g\|_{C(E, e^{k_2|x|})} \leq C(k_2, f). \quad (2.26)$$

Отсюда и из формулы (24) следует, что оценка (\*) выполнена для оператора Шредингера в некоторой полуплоскости  $k_2 > -\sigma_0$ , причем  $\gamma = 2$ . Напомним, что всюду выше относительно функций  $q(x)$  и  $f(x)$  предполагались выполненными условия теоремы 1.1. Эта оценка для функции  $v(x, k)$  имеет вид

$$|v(x, k)| < \frac{C}{1 + |k|^2}, \quad k_2 > -\sigma_0, \quad \sigma_0 > 0, \quad |k_1| \rightarrow \infty, \quad x \in \bar{D}, \quad (2.27)$$

где постоянная  $C$  зависит от  $f(x)$  и  $\bar{D}$ , а  $\bar{D}$  — произвольная ограниченная область. Оценка (27) имеет место и при всех  $k$  из полуплоскости  $k_2 > -\sigma_0$  с вырезанными кружками вокруг точек  $k_n = ix_n$ , соответствующих отрицательному дискретному спектру оператора Шредингера.

**Замечание 2.1.** Если потенциал  $q(x)$  не является финитным, но удовлетворяет оценке (1.4) при любом  $a > 0$ , то, как нетрудно проследить, теорема 2.1 сохраняет силу до слов „В полуплоскости...“, а ее доказательство мало меняется.

Предположим, что функции  $q(x)$ ,  $\nabla q(x)$  удовлетворяют оценке (1.4) с некоторым фиксированным  $a > 0$ . Повторяя рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 1 и замечания 1.2, приходим к теореме.

**Теорема 2.2.** Если  $q(x)$  и  $\nabla q(x)$  удовлетворяют оценке (1.4) при некотором  $a > 0$ , то ядро  $G(x, y, k^2)$  допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $k_2 > -\frac{a}{2}$  как мероморфная функция. В полуплоскости  $k_2 \geq 0$  ядро  $G(x, y, k^2)$  имеет конечное число полюсов  $k_n = ix_n$ ,  $x_n \geq 0$ , соответствующих отрицательному дискретному спектру. В полосе  $-\frac{a}{2} < k_2 < 0$ ,  $|k_1| > N$  при достаточно большом  $N$  нет полюсов функции  $G(x, y, k^2)$ . При любом  $\varepsilon > 0$  в полосе  $-\frac{a}{2} + \varepsilon < k_2 < 0$ ;  $|k_1| < N$  этих полюсов лишь конечное число. Су-

существует полоса  $-\varepsilon_0 < k_2 < 0$ , свободная от полюсов ядра  $G(x, y, k^2)$ .

**Следствие 2.1.** Пусть выполнены условия теоремы 2, и оператор  $L$  не имеет дискретного спектра. Тогда для этого оператора выполнен принцип предельной амплитуды в форме (1.21).

Доказательство совпадает с приведенным перед формулой (1.21). В случае финитного потенциала аналогичная оценка получена в работе [10].

### § 3. Особенности аналитического продолжения резольвентного ядра в двумерной области. Аналитическое продолжение в случае области с бесконечной границей

Упомянутые в заглавии особенности обусловлены тем, что функция  $-\frac{1}{4i}H_0^{(1)}(ipr)$  — резольвентное ядро оператора задачи (1.1) — (1.3) для случая  $q(x) \equiv 0$ ,  $D = E_2$  имеет логарифмическую точку ветвления при  $p = 0$  на комплексной плоскости  $p$ . Если провести разрез  $(-\infty, 0)$  на плоскости комплексного переменного  $p$ , то в разрезанной плоскости функция  $\frac{1}{-4i}H_0^{(1)}(ipr)$  аналитична по  $p$ . Рассмотрим задачу (1.1) — (1.3), где  $D \subset E_2$ , а относительно потенциала  $q(x)$  сделаны те же предположения, что и в § 1. Мы сохраняем обозначения § 1 с той разницей, что вместо ядра  $\frac{e^{-p|x-y|}}{4\pi|x-y|}$  надо ставить  $\frac{1}{-4i}H_0^{(1)}(ipr_{xy})$ ,  $r_{xy} = |x - y|$ .

Повторяя доказательство теоремы 1.1 мы приходим к теореме.

**Теорема 3.1.** Пусть  $D \subset E_1$  и выполнены условия теоремы 1.1. Тогда функция  $u(x, p)$ , определенная формулой (1.5), допускает аналитическое продолжение на плоскость комплексного переменного  $p$  с разрезом  $(-\infty, 0)$  как мероморфная функция. При  $\sigma > 0$  она имеет конечное число полюсов, расположенных в точках  $\sigma_n = \sqrt{|\lambda_n|}$ , где  $\lambda_n = -|\lambda_n|$  — точки отрицательного дискретного спектра оператора Шредингера. Точка  $p = 0$  — точка ветвления логарифмического типа.

К теореме 1 можно сделать замечания, аналогичные замечаниям 1.1, 1.2. В замечании, аналогичном замечанию 1.2, аналитическое продолжение функции  $u(x, p)$  осуществляется в полуплоскость  $\sigma > -\frac{a}{2}$  с разрезом  $(-\frac{a}{2}, 0)$ .

Оценку (1.21) теперь получить нельзя, так как контур интегрирования будет содержать петлю, охватывающую разрез. Тот факт, что функция  $H_0^{(1)}(ipr)$  имеет при  $p = 0$  точку ветвления логарифмичес-

кого типа, обуславливает явление диффузии волн в плоском и, вообще, в четномерном случае [14].

Пусть

$$U_{tt} + L U = 0 \text{ в } D \times [0, \infty), \quad (3.1)$$

$$U|_{t=0} = 0; \quad U_t|_{t=0} = g(x), \quad (3.2)$$

$$U|_{x \in \partial} = 0. \quad (3.3)$$

Рассмотрим сначала наиболее простой случай  $q(x) \equiv 0$ ,  $D = E_2$ . Предполагается, что  $g(x)$  — финитная гладкая функция. Решение задачи (1) — (3) имеет вид

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} u(x, p) dp, \quad (3.4)$$

где

$$u(x, p) = \int \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ip|x-y|) g(y) dy, \quad (3.5)$$

а интеграл без обозначения области интегрирования берется по  $E_2$ . Деформируем контур интегрирования в формуле (4) в контур, состоящий из отрезков, соединяющих точку  $-i\infty - \sigma_0$  с точкой  $-i0 - \sigma_0$ , точку  $-\sigma_0 + i0$  с точкой  $-\sigma_0 - i\infty$ , и петли  $C_{\sigma_0}$ , охватывающей разрез  $(-\sigma_0, 0)$  и соединяющей точки  $-\sigma_0 - i0$  и  $-\sigma_0 + i0$ . Тогда, учитывая, что при  $x \in \bar{D}$ , где  $\bar{D}$  — ограниченная область, выполнена оценка

$$|u(x, p)| = O\left(\frac{1}{1 + |p|^2}\right), \quad p = \sigma + i\tau, \quad |\tau| \rightarrow \infty, \quad (3.6)$$

можно утверждать, что при  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \in \bar{D}$

$$U(x, t) = O(e^{-\sigma_0 t}) + \int_{C_{\sigma_0}} e^{pt} u(x, p) dp = O(e^{-\sigma_0 t}) + J_{\sigma_0}(t). \quad (3.7)$$

Очевидно, что для произвольного  $\varepsilon > 0$

$$J_{\sigma_0}(t) = O(e^{-\varepsilon t}) + \int_{C_\varepsilon} e^{pt} u(x, p) dp. \quad (3.8)$$

Воспользуемся формулой

$$\frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr) \underset{p \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{2}{ipr}. \quad (3.9)$$

Из формул (5) и (9) вытекает, что

$$\begin{aligned} u(x, p) &\sim \frac{1}{2\pi} \int_{E_2} \ln \frac{2}{ipr_{xy}} g(y) dy = -\frac{1}{2\pi} \ln p \int g(y) dy + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{2}{ir_{xy}} g(y) dy = A \ln p + O(1) \text{ при } p \rightarrow 0, \quad x \in \bar{D}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Подставляя выражение (10) в интеграл, стоящий в правой части формулы (8) и проводя простой подсчет, получим

$$\int_{C_+} u(x, p) e^{pt} dp = 2\pi i A \frac{e^{-it} - 1}{t} = O\left(\frac{1}{t}\right). \quad (3.11)$$

Сравнивая формулы (7), (8), (11), имеем

$$|U(x, t)| = O\left(\frac{1}{t}\right), \quad x \in \bar{D}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

причем, если  $A \neq 0$ , то порядок убывания, указанный в формуле (12), не может быть улучшен, даже если  $g(y) \in C_0^\infty(E_2)$ .

Рассмотрим теперь случай, когда  $D = E_2$ ,  $q(x) \neq 0$  — финитная дифференцируемая функция

$$q(x) > 0, \quad (3.13)$$

и изучим поведение резольвентного ядра  $G(x, y, -p^2)$  при  $p \rightarrow 0$ .

**Теорема 3.2.** При сделанных предположениях существует

$$\lim_{p \rightarrow 0} v(x, p) = \lim_{p \rightarrow 0} \int G(x, y, -p^2) f(y) dy = v_0(x), \quad |\arg p| < \pi \quad (3.14)$$

какова бы ни была финитная дважды дифференцируемая функция  $f(y)$ . Функция  $v_0(x)$  является решением уравнения (1.1) при  $p=0$ ,  $D=E_2$ , причем в правой части уравнения (1.1) вместо  $\delta(x-y)$  нужно поставить  $f(x)^*$ .

**Доказательство.** Функция  $v(x, p)$  удовлетворяет уравнению

$$[I + T(p)] v \equiv v + \int \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xy}) q(y) v(y) dy = g(x, p). \quad (3.15)$$

Интеграл без обозначения области интегрирования берется по  $E_2$ . Будем считать, что  $\sigma > 0$ , и рассмотрим уравнение (15) в пространстве  $C(E_2)$ . Как и в [26] легко доказать, что оператор  $T(p)$  вполне непрерывен в  $C(E_2)$  при всех  $p$ ,  $\sigma > 0$ ,  $p \neq 0$ . При  $p \rightarrow 0$  ядро интегрального оператора в (15) стремится к бесконечности. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr) &= \frac{1}{-4i} [J_0(ipr) + iY_0(ipr)] = \frac{1}{2\pi} J_0(ipr) \ln \frac{2}{ipr} + O(1) = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln p - \frac{1}{4i} - \frac{C}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + O(p^2 r^2 \ln ipr) + o(1), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $J_0(z)$  — функция Бесселя,  $C$  — постоянная Эйлера, а через  $o(1)$  обозначена некоторая целая функция переменной  $ipr$ , обращающаяся в ноль при  $p=0$ . Конкретный вид этой функции нас не интересует (см. [11], стр. 352).

Введем обозначение

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi} \ln p - \frac{1}{4i} - \frac{C}{2\pi}. \quad (3.17)$$

\* Формулировка близкая к теоремам 3.2, 3.3 утверждений приведена в [12] для вещественных значений параметра  $\lambda = -p^2$ ,  $\lambda \in (0, \delta_0)$ ,  $\delta_0 > 0$ .

Уравнение (15) перепишем в виде

$$(I + \alpha q + Kq)v = g, \quad (3.18)$$

где положено

$$\begin{aligned} \alpha q v &\equiv \alpha \int q(y) v(y) dy; Kq v \equiv \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) dy + \\ &+ \int \Psi(x, y, p) q(y) v(y) dy \equiv K_0 q v + \Psi q v, \end{aligned} \quad (3.19)$$

а

$$\Psi(x, y, p) = O(p^2 r_{xy}^2 \ln ipr) + o(1). \quad (3.20)$$

Вычислим оператор

$$R_\alpha \equiv (I + \alpha q)^{-1} \quad (3.21)$$

в явном виде. Пусть

$$(I + \alpha q)v = \Phi, \quad \Phi \in C(E_2). \quad (3.22)$$

Умножим обе части уравнения (22) на  $q(y)$  и проинтегрируем по  $E_2$ . Вводя обозначения

$$\int \Phi(y) q(y) dy = \Phi_q, \quad \int q(y) dy = q_0, \quad (3.23)$$

получим

$$v_q + \alpha q_0 v_q = \Phi_q, \quad (3.24)$$

откуда при  $\alpha q \neq -1$  следует

$$v_q = \frac{\Phi_q}{1 + \alpha q_0}. \quad (3.25)$$

Заметим, что из определения (17) величины  $\alpha$  вытекает, что при малых  $p$  можно считать условие  $\alpha q_0 \neq -1$  выполненным. Из уравнения (22) находим

$$v = \Phi - \alpha v_q = \Phi - \frac{\alpha \Phi_q}{1 + \alpha q_0} \equiv R_\alpha \Phi. \quad (3.26)$$

Формула (26) определяет оператор (21) в явном виде. Подействуем на обе части уравнения (18) оператором  $R_\alpha$ . В результате получим

$$v + R_\alpha Kq v \equiv v + Q_\alpha v = R_\alpha g; \quad Q_\alpha \equiv R_\alpha Kq. \quad (3.27)$$

Из определения (26) оператора  $R_\alpha$  следует, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|R_\alpha - R_0\| = 0, \quad (3.28)$$

где

$$R_0 \Phi \equiv \Phi - \frac{1}{q_0} \Phi_q. \quad (3.29)$$

Напомним, что из условия (13) вытекает неравенство  $q_0 > 0$ . Уравнение (27) имеет вид

$$v + Kq v - \frac{\alpha}{1 + \alpha q_0} (Kq v)_q = g - \frac{\alpha g_q}{1 + \alpha q_0}. \quad (3.30)$$

В силу определения функции  $g$  имеем

$$g(x, p) = \int \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xy}) f(y) dy = \alpha \int f(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy + \\ + \int \Psi(x, y, p) f(y) dy \equiv \alpha f_0 + \alpha(x, p), \quad (3.31)$$

причем равномерно относительно  $x \in \bar{D}$  ( $\bar{D}$  — ограниченная область)

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int \Psi(x, y, p) f(y) dy = 0. \quad (3.32)$$

Так как при  $p = \sigma + i\tau$ ,  $\sigma > 0$ , меняющихся в ограниченной области и любых  $x$  и  $y$ , функция  $\Psi(x, y, p)$  равномерно ограничена, то из формулы (32) следует, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left\| \int \Psi(x, y, p) f(y) dy \right\|_{C(E, \frac{1}{1+|x|})} = 0. \quad (3.33)$$

Начиная отсюда, будем рассматривать уравнение (27) в пространстве  $X = C(E, \frac{1}{1+|x|})$ . Оператор  $Kq$  является вполне непрерывным оператором в  $X$ . Действительно, являясь интегральным оператором типа потенциала, он вполне непрерывен как оператор из  $X$  в  $C(\bar{D})$ , где  $\bar{D}$  — любая ограниченная область (вспомним, что  $q(y)$  — финитная функция). Поэтому достаточно проверить, что

$$\sup_{\|v\|_X < 1} \max_{|x| > N} \frac{|Kqv|}{1+|x|} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (3.34)$$

Имеем

$$|K_q v| \leq \int_{D_q} \left| \ln \frac{1}{r_{xy}} \right| |q(y)| (1+|y|) dy \leq C_q \int_{D_q} |\ln r_{xy}| dy \leq C_q (1 + |\ln |x||), \quad (3.35)$$

где  $D_q$  — носитель функции  $q(y)$ . Из (35) непосредственно следует (34). Так как  $R_\alpha$  — равномерно ограниченный в  $X$  оператор при всех  $\alpha > 0$ , то операторы  $Q_\alpha$  и  $Q_0 = R_0 K_0 q$  — вполне непрерывны в  $X$ . Покажем, что существует и ограничен оператор  $(1 + Q_0)^{-1}$ . Достаточно установить отсутствие ненулевого решения в  $X$  уравнения

$$(I + Q_0) v = v + K_0 q v - \frac{1}{q_0} (K_0 q v)_q = 0. \quad (3.36)$$

Умножим обе части уравнения (36) на  $q(x)$  и проинтегрируем по  $E_2$ . Получим

$$\int q(x) v(x) dx = 0. \quad (3.37)$$

Умножим обе части уравнения (36) на  $q(x) \overline{v(x)}$  и проинтегрируем по  $E_2$ . Используя равенство (37), получим

$$\int q |v|^2 dx + \iint \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) q(x) \overline{v(x)} dx dy = 0. \quad (3.38)$$

Если мы покажем, что

$$J \equiv \iint \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) q(x) \overline{v(x)} dx dy > 0 \quad (3.39)$$

для любой  $v \in X$ , то из равенства (38) и неравенства (13) можно будет заключить, что  $v \equiv 0$ . Докажем неравенство (39). Обозначив

$$w(x) = \int \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) dy = \int_{D_q} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v(y) dy, \quad (3.40)$$

можем написать

$$J = - \int w \Delta w dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \int_{|x| < R} |\nabla w|^2 dx - \int_{|s|=R} w \frac{\partial w}{\partial n} ds \right). \quad (3.41)$$

Сходимость интегралов (39) — (41) вытекает из финитности функции  $q(y)$ . Из формулы

$$r_{xy} = |x - y| = |x| \left( 1 - \frac{(x^0, y)}{|x|} + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad x^0 = \frac{x}{|x|}, \quad (3.42)$$

соотношения (37) и равенства (40) следует

$$w(x) = \frac{1}{2\pi|x|} \int (x^0, y) q(y) v(y) dy + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.43)$$

кроме того

$$\frac{\partial w}{\partial |x|} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (3.44)$$

Из двух последних формул следует, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|s|=R} w \frac{\partial w}{\partial n} ds = 0. \quad (3.45)$$

Таким образом, доказано, что уравнение (36) не имеет ненулевого решения в  $X$ , и, так как оператор  $Q_0$  вполне непрерывен в  $X$ , то существует ограниченный оператор

$$(I + Q_0)^{-1} \equiv F. \quad (3.46)$$

Из формулы (28), в которой операторы можно рассматривать как действующие в  $X$ , вытекает, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|Q_\alpha - Q_0\| = 0. \quad (3.47)$$

Отсюда и из равенства (46) следует, что  $\|F_\alpha - F\| \rightarrow 0$ , где  $F_\alpha \equiv (I + Q_\alpha)^{-1}$ .

Поэтому для любого  $h \in X$  решение уравнения

$$(I + Q_\alpha) v_\alpha = h_\alpha, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|h_\alpha - h\|_X = 0 \quad (3.48)$$

сходится в  $X$  к элементу  $Fh$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \|v_\alpha - Fh\|_X = 0. \quad (3.49)$$

Уравнение (27) имеет вид (48), причем

$$\begin{aligned}
 h_a &\equiv R_a g = g - \frac{a g_a}{1 + a q_0} = a f_0 + a(x, p) - \frac{a(a q_0 f_0 + a_q(x, p))}{1 + a q_0} = \\
 &= a(x, p) + \frac{a f_0 - a a_q(x, p)}{1 + a q_0}, \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

где мы использовали обозначения формулы (31). Из формулы (50) следует, что в смысле сходимости в  $X$

$$\begin{aligned}
 h_a \xrightarrow{a \rightarrow \infty} a(x, 0) + \frac{f_0}{q_0} - \frac{1}{q_0} a_q(x, 0) &= \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy + \\
 + \frac{f(y) dy}{q_0} - \frac{1}{2\pi q_0} \int dx q(x) \int \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy &\equiv h. \quad (3.51)
 \end{aligned}$$

Повторяя

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \|v_a - v_0\| = 0, \quad v_0 = Fh. \quad (3.52)$$

Чтобы закончить доказательство теоремы 2 нужно показать, что функция  $v_0$  удовлетворяет уравнению (1.1) при  $p = 0$ , то есть  $\lambda = \infty$ .

Вспомогая определения (46), (27), (29), (19), получаем уравнение для  $v_0$

$$v_0 + \frac{1}{2\pi} \int \ln \frac{1}{r_{xy}} q v_0 dy - \frac{1}{2\pi q_0} \int dx \int \ln \frac{1}{r_{xy}} q(y) v_0(y) dy = h. \quad (3.53)$$

Применяя к обеим частям уравнения (53) оператор  $-\Delta$  и вспомогая определение (51) функции  $h$ , получаем уравнение

$$[-\Delta + q(x)] v_0(x) = f(x). \quad (3.54)$$

Теорема полностью доказана.

Рассмотрим теперь случай, когда  $D \neq E_2$  — внешность ограниченной области с ляпуновской границей  $\Gamma$ ,  $q(x) \equiv 0$ ,  $f(x)$  — финитная дважды дифференцируемая функция.

**Теорема 3.3.** При сделанных предположениях имеет место утверждение теоремы 2 для функции  $v(x, p) = \int_D H_0(x, y, -p^2) f(y) dy$ ,

где  $H_0(x, y, -p^2)$  — решение задачи (1.1) — (1.3) при  $q(x) \equiv 0$ ,  $D \neq E_2$ . Доказательство. Мы исходим из уравнений

$$v(x, p) = g - \int_{\Gamma} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xs}) \mu(s, p) ds, \quad (3.55)$$

$$\left(\frac{1}{2}I + Q\right) \mu = \frac{\partial g}{\partial n_s}; \quad g(x, p) = \int_D \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xy}) f(y) dy, \quad (3.56)$$

$$Q\mu = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{ss'}) \mu(s') ds'. \quad (3.57)$$

Из формулы (16) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial n_s} - \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{ss'}) = \frac{\partial}{\partial n_s} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{ss'}} + \psi(s, s', p), \quad (3.58)$$

где

$$\lim_{p \rightarrow 0} |\psi(s, s', p)| = 0 \quad (3.59)$$

равномерно относительно  $s, s' \in \Gamma$ .

Поэтому оператор  $\frac{1}{2}I + Q$ , рассматриваемый как оператор в  $C(\Gamma)$ , равномерно сходится при  $p \rightarrow 0$  к оператору  $\frac{1}{2}I + Q_0$ , где

$$Q_0 \mu = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln \frac{1}{r_{ss'}} \mu(s') ds'. \quad (3.60)$$

Из теории потенциала известно, что оператор  $\left(\frac{1}{2}I + Q_0\right)^{-1}$  существует и ограничен. Свободный член в уравнении (56) также имеет предел в силу соотношения (58)

$$\lim_{p \rightarrow 0} \left\| \frac{\partial g(s, p)}{\partial n_s} - \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln \frac{1}{r_{sy}} f(y) dy \right\|_{C(\Gamma)} = 0. \quad (3.61)$$

Из сказанного и леммы 1 из работы [4] вытекает, что решение уравнения (56) имеет предел в  $C(\Gamma)$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \|\mu(s, p) - \mu_0(s)\|_{C(\Gamma)} = 0; \quad \mu_0(s) = \left(\frac{1}{2}I + Q_0\right)^{-1} h, \quad (3.62)$$

где

$$h \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_s} \ln \frac{1}{r_{sy}} f(y) dy. \quad (3.63)$$

Исследуем предельный переход  $p \rightarrow 0$  в уравнении (55).

Имеем

$$\begin{aligned} v(x, p) &= g(x, p) - \int_{\Gamma} \frac{1}{-4i} H_0^{(1)}(ipr_{xs}) \mu(s, p) ds = \\ &= \alpha \int_{\Gamma} f(y) dy + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy - \alpha \int_{\Gamma} \mu_0(s) ds - \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{r_{xs}} \mu_0(s) ds + o(1) \quad \text{при } p \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

где  $\alpha$  определено формулой (17).

Покажем, что

$$\int_{\Gamma} \mu_0(s) ds - \int_{\Gamma} f(y) dy = 0. \quad (3.65)$$

Отсюда и из формулы (64) вытекает, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} v(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_D \ln \frac{1}{r_{xy}} f(y) dy - \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \ln \frac{1}{r_{xs}} \varphi_0(s) ds \equiv v_0(x). \quad (3.66)$$

Проверку того факта, что функция  $v_0(x)$  является решением задачи

$$-\Delta v_0(x) = f(x), \quad (3.67)$$

$$v_0|_{\Gamma} = 0 \quad (3.68)$$

проведем вместе с доказательством формулы (65).

Для доказательства равенства (65) используем формулу (64) и вспомним, что функция  $v(x, p)$  удовлетворяет условию Дирихле

$$v(x, p)|_{x \in \Gamma} = 0. \quad (3.69)$$

Из определения (17) следует, что

$$\lim_{p \rightarrow 0} \alpha = +\infty. \quad (3.70)$$

Так как  $\alpha$  не зависит от  $x$ , то равенства (64), (69) и (70) совместны лишь при условии, что (65) выполнено.

Остается заметить, что функция  $v(x, p)$  удовлетворяет условию (69) при  $p \neq 0$  и при  $p \rightarrow 0$  равномерно относительно  $x \in \bar{D}$  ( $\bar{D}$  — любая ограниченная область) стремится к  $v_0(x)$ . Поэтому и  $v_0(x)$  удовлетворяет граничному условию (69). Теорема 3 доказана полностью.

Не останавливаясь на доказательстве, которое мало отличается от приведенных выше рассуждений, отметим, что имеет место

**Теорема 3.4.** Пусть  $q(x) \in C_0^1(D)$ ,  $f(x) \in C_0^2(D)$ , где  $D$  — внешность ограниченной области с ляпуновской границей. Пусть оператор  $L$  задачи (1.1) — (1.3) не имеет дискретного спектра (для этого достаточно, чтобы было выполнено условие (13)). Тогда для функции  $u(x, p) = \int_D H(x, y, -p^2) f(y) dy$  выполнено утверждение

теоремы 3. Здесь  $H(x, y, -p^2)$  — решение задачи (1.1) — (1.3) при  $D \in E_2$ .

В заключение сделаем замечание об аналитическом продолжении функции (1.5) в случае области  $D \subset D_0$  с бесконечной границей  $\Gamma$ , равномерно удовлетворяющей условию Ляпунова. Предполагается, что граница  $\Gamma$  приближается к границе  $\Gamma_0$  угловой области  $D_0$  так, что

$$\rho(s) \equiv \rho(s, \Gamma_0) < C e^{-a|s|}, \quad a > 0. \quad (3.71)$$

Потенциал  $q(x)$  — вещественная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|q(x)| < C e^{-b|x|}, \quad b > 0. \quad (3.72)$$

В формулах (1.6) — (1.10) ядро  $\frac{e^{-p|x-y|}}{-4\pi|x-y|}$  должно быть заменено функцией  $G_0(x, y, ip)$ , изученной в [3]. В силу оценок, полученных в [3],

уравнение (9) может быть рассмотрено точно также, как это было сделано в § 1.

Функция  $\rho(s)$  играет при изучении уравнения (1.9) такую же роль, какую играет потенциал  $q(x)$  при изучении уравнения (1.6). Таким образом, получаем аналог теоремы 1.

**Теорема 3.5.** Пусть  $D \subset D_0$  — область с бесконечной границей. Пусть граница удовлетворяет условию Ляпунова, и постоянные Ляпунова равномерно ограничены. Пусть выполнены условия (71), (72). Тогда функция (1.5) допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $\sigma > -\sigma_0$ ,  $\sigma_0 = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ , с разрезом  $(-\sigma_0, 0)$ , как мероморфная функция. В полуплоскости  $\sigma > 0$  эта функция имеет лишь конечное число полюсов, расположенных в точках  $\sigma_n = \sqrt{|\lambda_n|}$ , где  $\lambda_n = -|\lambda_n|$  — точки отрицательного дискретного спектра оператора задачи (1.1)–(1.3). Точка  $p = 0$  — точка ветвления логарифмического типа.

### П р и л о ж е н и е

В условиях теоремы 1.0 изолированные точки, в которых не существует оператор  $(B - A(p))^{-1}$ , являются полюсами этого оператора.

Доказательство использует метод, изложенный в книге [13]. Не ограничивая общности, положим  $B = I$ . Пусть  $p_0$  — изолированная точка, в которой не существует оператор  $(I - A(p_0))^{-1}$ . Обозначим через  $l_1, l_2, \dots, l_n$  базис подпространства нулей оператора  $I - A(p_0)$ , через  $g_1, g_2, \dots, g_n$  — базис подпространства нулей оператора  $I - A^*(p_0)$  ( $R(I - A(p_0))$ ). Оператор  $B(p) \equiv I - A(p) + \sum_{j=1}^n (\cdot, l_j) g_j$  при  $p = p_0$  не имеет нулей, а  $R(B)$  совпадает со всем пространством. Следовательно, при  $|p - p_0| < \rho$ ,  $\rho > 0$  существует  $B^{-1}(p)$ . Уравнение  $[I - A(p)]\varphi = f$  эквивалентно уравнению  $B(p)\varphi = \sum_{j=1}^n (\varphi, l_j) g_j$  или системе

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \xi_j B^{-1}(p) g_j + \eta(p); \quad \xi_j = (\varphi, l_j), \quad \eta = B^{-1}(p) f.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^n (\delta_{jk} - b_{jk}(p)) \xi_j = \eta_k(p), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\eta_k(p) \equiv (\eta, l_k), \quad b_{jk}(p) \equiv (B^{-1}(p) g_j, l_k), \quad \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}.$$

При  $p \neq p_0$ ,  $|p - p_0| < \rho$  определитель этой системы  $\Delta(p) \neq 0$ , если  $\rho$  достаточно мало. Функции  $\eta_k(p)$  и  $b_{jk}(p)$  — аналитические в круге  $|p - p_0| < \rho$ . Имеем  $\xi_j = \frac{\Delta_j(p)}{\Delta(p)}$ , где определители  $\Delta_j(p)$ ,  $\Delta(p)$  — аналити-

ческие при  $|p-p_0| < \delta$  функции. Следовательно,  $\xi_j(p)$  имеет в точке  $p = p_0$  полюс (так как  $\Delta(p_0) = 0$ ). Поэтому  $\varphi = (I - A(p))^{-1} f = \eta(p) + \sum_{j=1}^n \xi_j(p) B^{-1}(p) g_j$  имеет в точке  $p = p_0$  полюс. Так как  $f$  произвольна, то оператор  $(I - A(p))^{-1}$  имеет полюс при  $p = p_0$ .

Ленинградский институт точной механики  
и оптики

Поступило 27.V.1967

Ա. Գ. ՌԱՄՄ

ՈՐՈՇ ԹԵՈՐԵՄՆԵՐ ՇՐԵԴԻՆԳԵՐԻ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՌԵԶՈԼՎԵՆՏԱԳԻՆ ԿՈՐԻՋԻ  
ԸՍՏ ՍՊԵԿՏՐԱԼ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻ ՎԵՐԼՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՄԱՍԻՆ

Ա Մ Փ Ո Փ Ո Մ

Հոդվածում տրված է անալիտիկ շարունակության մեթոդ և ապացուցված են թեորեմներ որոշ անվերջ տիրույթներում Շրեդինգերի օպերատորի ռեզոլվենտային սպեկտրալ պարամետրից կախման մերոմորֆ բնույթի մասին:

A. G. RAMM

# SOME THEOREMS ON ANALYTICAL CONTINUATION OF RESOLVENT KERNELS OF SCHRÖDINGER OPERATOR WITH RESPECT TO SPECTRAL PARAMETER

## S u m m a r y

In the paper a method for analytic continuation is given and some theorems about meromorphic character of dependence of the resolvent kernel of the Schrödinger operator on spectral parameter in some unbounded domains are proved.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Я. Повзнер. О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора  $-\Delta + C$ , Матем. сб., 32, 1, 1953, 109—156.
2. А. Г. Рамм. а) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, ДАН СССР, 152, № 2, 1963, 282—285. б) Спектральные свойства оператора Шредингера в областях с бесконечной границей, Матем. сб., № 3, 66 (108), 1965, 321—343.
3. А. Г. Рамм. Исследование задачи рассеяния в некоторых бесконечных областях, I, II, Вестник АГУ, № 7, 1963, 45—66; № 19, 1963, 69—76.
4. А. Г. Рамм. Об аналитическом продолжении резольвентного ядра оператора Шредингера и принципе предельной амплитуды, ДАН АзССР, 21, № 1, 1965, 3—7.
5. А. Г. Рамм. Об аналитическом продолжении решения уравнения Шредингера по спектральному параметру и поведении решения нестационарной задачи при  $t \rightarrow \infty$ , УМН, 19, № 5, 1964, 192—194.

6. А. Г. Рамм. Об области, свободной от резонансных полюсов, в задаче рассеяния на трехмерном потенциале, ДАН СССР, 166, № 6, 1966, 1319—1322.
7. Н. Данфорд, Д. Шварц. Ляпунговские операторы, ч. 1, ИИЛ, М., 1962, стр. 632.
8. Л. Д. Фаддеев. Единственность решения обратной задачи теории рассеяния, Вестник ЛГУ, № 7, 1956, 126—130.
9. Ф. Морс, Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. I, II, ИИЛ, М., 1958.
10. О. А. Ладыженская. О принципе предельной амплитуды, УМН, 12, № 3, 1957, 161—164.
11. И. М. Рыжик, И. С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ М., 1951.
12. Д. М. Эйдус. Краевые задачи в бесконечных областях и принцип предельной амплитуды, Автореферат диссертации, Ленинград, 1965.
13. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд-во "Наука", М., 1965, стр. 37.
14. А. Г. Рамм. О диффузии воли, Математика, Известия высш. учеб. завед., № 2, 1965, 136—138.
15. А. Г. Рамм. О принципе предельной амплитуды, Диф. уравнения, 4, № 4, 1968, 714—720.
16. P. D. Lax, R. S. Phillips. Scattering theory, Berlin, Springer Verlag, 1967.