

Е. Э. МОГУЛЬСКИЙ

ТЕОРЕМА ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ РАЦИОНАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

Целью настоящей статьи является перенесение известной теоремы М. В. Келдыша [1] о n -кратной полноте системы собственных и присоединенных векторов полиномиального операторного пучка на случай рационального операторного пучка. Это обобщение интересно тем, что вместо конечности порядка главной части пучка требуется лишь конечность нижнего порядка. Теорема такого рода для линейного пучка была доказана В. И. Мацаевым и Ю. А. Палантом [2], а для полиномиального пучка Ю. А. Палантом (диссертация). Для получения теоремы полноты используется метод, применявшийся В. И. Мацаевым для оценок резольвент операторов [3]. Другие обобщения теоремы М. В. Келдыша на случай рационального пучка были получены Дж. Э. Аллахвердиевым [4]. В дальнейшем будем придерживаться обозначений, введенных в [5]. Через S_{∞} обозначен класс всех линейных вполне непрерывных операторов, действующих в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Для каждого такого оператора A вводится последовательность $\{s_n(A)\}_{n=1}^{\infty}$ его s -чисел, определяемых как собственные числа оператора $(A^*A)^{\frac{1}{2}}$, занумерованная в порядке убывания

с учетом кратностей (если $r = \dim (A^*A)^{\frac{1}{2}} < \infty$, то $s_n(A) = 0$ ($n = r + 1, \dots$), и функция $\nu(t, A)$, равная количеству чисел $s_n(A)$, больших t^{-1} .

Операторным пучком $L(\lambda)$ назовем оператор-функцию $L(\lambda) = 1 - M(\lambda)$, где $M(\lambda)$ — голоморфная оператор-функция со значениями из S_{∞} , определенная в некоторой области G комплексной плоскости λ . Число λ_0 называется характеристическим числом операторного пучка, если существует ненулевой вектор $\varphi_0 \in H$ такой, что $L(\lambda_0)\varphi_0 = 0$, а φ_0 называется собственным вектором пучка, отвечающим характеристическому числу λ_0 . Если существует векторный полином $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^k \varphi_s(\lambda - \lambda_0)^s$

($\varphi_s \in H$) такой, что $\|L(\lambda)\varphi(\lambda)\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{k+1})$, то мы назовем векторы $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ цепочкой векторов, присоединенных к собственному вектору φ_0 . Кратностью собственного вектора φ_0 будем называть максимальную длину цепочки присоединенных к φ_0 векторов.

Пусть φ_0 — собственный вектор кратности m , отвечающий характеристическому числу λ_0 , а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — соответствующая ему це-

пучка присоединенных векторов. Тогда, если $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s$, то

$$L(\lambda) \varphi(\lambda) = L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right) = \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \frac{\partial^k L}{\partial \lambda_0^k} (\lambda - \lambda_0)^k \right) \left(\sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right) =$$

$$= L(\lambda_0) \varphi_0 + \left(\frac{\partial L}{\partial \lambda_0} \varphi_0 + L(\lambda_0) \varphi_1 \right) (\lambda - \lambda_0) + \left(\frac{1}{2!} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_0^2} \varphi_0 + \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} \varphi_1 + \right.$$

$$\left. + L(\lambda_0) \varphi_2 \right) (\lambda - \lambda_0)^2 + \dots = \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{(m-k)!} \frac{\partial^{m-k} L}{\partial \lambda_0^{m-k}} \varphi_k \right) (\lambda - \lambda_0)^m +$$

$$+ \sum_{r=1}^m \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m+r-k)!} \frac{\partial^{m+r-k} L}{\partial \lambda_0^{m+r-k}} \varphi_k \right\} (\lambda - \lambda_0)^{m+r}.$$

Но так как

$$\left\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^m \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right) \right\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{m+1}), \text{ то}$$

$$L(\lambda_0) \varphi_0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda_0} \varphi_0 + L(\lambda_0) \varphi_1 = \dots = \sum_{k=0}^m \frac{1}{(m-k)!} \frac{\partial^{m-k} L}{\partial \lambda_0^{m-k}} \varphi_k = 0$$

и, следовательно, приведенное здесь определение цепочки совпадает с определением цепочки по М. В. Келдышу [1].

Покажем, что такое определение инвариантно в некотором смысле относительно замены независимой переменной.

Лемма 1. Если λ_0 есть характеристическое число операторного пучка, то при преобразовании $\lambda = \lambda(\mu)$, $\lambda'(\mu_0) \neq 0$ ($\lambda_0 = \lambda(\mu_0)$) подпространство собственных векторов и подпространство, натянутое на собственные и присоединенные векторы, отвечающие λ_0 , переходят соответственно в подпространство собственных векторов и подпространство, натянутое на собственные и присоединенные векторы, отвечающие μ_0 ; при этом длина максимальной цепочки не изменяется.

Если $\varphi(\lambda) = \sum_{s=0}^p \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s$ и $\|L(\lambda) \varphi(\lambda)\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1})$, то

$$L(\lambda(\mu)) \varphi(\lambda(\mu)) = L(\lambda(\mu)) \left(\sum_{s=0}^p \varphi_s \left\{ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \lambda^{(k)}(\mu_0) (\mu - \mu_0)^k \right\}^s \right) =$$

$$= L(\lambda(\mu)) \left[\sum_{s=0}^p \psi_s (\mu - \mu_0)^s + (\mu - \mu_0)^{p+1} \sum_{k=1}^m x_k (\mu - \mu_0)^k \right]$$

и

$$\left\| L(\lambda(\mu)) \left(\sum_{s=0}^p \psi_s (\mu - \mu_0)^s \right) \right\| = O(|\mu - \mu_0|^{p+1}).$$

Так как при подстановке ряда в ряд n -ый коэффициент результирующего ряда зависит лишь от первых n коэффициентов исходных рядов, то вектор ψ_s является линейной комбинацией векторов $\varphi_0, \varphi_1, \dots$,

φ_s . Обратно, поскольку $\lambda'(\mu_0) \neq 0$, то функция $\lambda(\mu)$ имеет однозначную обратную функцию $\mu(\lambda)$ в окрестности точки μ_0 , и каждому полиному $\psi(\mu) = \sum_{s=0}^p \psi_s (\mu - \mu_0)^s$ такому, что $\|L(\lambda(\mu)) \psi(\mu)\| = O(|\mu - \mu_0|^{p+1})$,

отвечает функция $\varphi(\mu(\lambda)) = \sum_{s=0}^p \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s + O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1})$, причем

$$\|L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^p \varphi_s (\lambda - \lambda_0)^s \right)\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1}), \text{ и каждый вектор } \varphi_s (s=0, 1, \dots, p)$$

является линейной комбинацией $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_s$. Из приведенных рассуждений следуют все утверждения леммы.

Отметим, что при преобразовании $\lambda = \mu + b$ собственные и присоединенные векторы сохраняются.

Характеристическое число λ_0 пучка $L(\lambda)$ называется характеристическим числом конечной алгебраической кратности, если пространство нулей оператора $L(\lambda_0)$ конечномерно и кратность каждого собственного вектора конечна. Если хотя бы в одной точке оператор $L(\lambda)$ обратим, то согласно [6], множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ состоит из дискретного множества точек конечной алгебраической кратности, которое может иметь точки сгущения на границе области G .

В дальнейшем будут рассматриваться рациональные операторные пучки вида

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{s=0}^n \lambda^s B_s - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{B_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k}, \quad (1)$$

где операторы $B_s, B_{l,k} \in S_\infty$.

Если φ_0 — собственный вектор пучка (1), отвечающий характеристическому числу λ_0 , а $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_r$ — присоединенная к нему цепочка, то соотношениями

$$\varphi_0^{(v)} = \lambda_0 \varphi_0^{(v-1)}, \quad \varphi_s^{(v)} = \lambda_0 \varphi_s^{(v-1)} + \varphi_{s-1}^{(v-1)} \quad (v=1, 2, \dots, n-1; s=1, 2, \dots, r),$$

$$\varphi_s^{(k), l} = - \sum_{p=0}^k (\lambda_l - \lambda_0)^{p-s-1} \varphi_p^{(k-1), l} \quad (k=1, \dots, n_l; l=1, \dots, N; s=0, 1, \dots, r) \quad (2)$$

$$(\varphi_s^{(0)})^{l} = \varphi_s^{(0), l} = \varphi_s$$

определяются $n + \sum_{l=1}^N n_l - 1$ собственных векторов и присоединенных к ним цепочек. Действительно, если $\varphi_0^{(v-1)}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(v-1)}, \dots, \varphi_r^{(v-1)}$ — присоединенная к нему цепочка, то

$$\left\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \varphi_s^{(v)} (\lambda - \lambda_0)^s \right) \right\| = \left\| L(\lambda) \left(\lambda_0 \varphi_0^{(v-1)} + \sum_{s=1}^r (\lambda_0 \varphi_s^{(v-1)} + \right. \right.$$

$$+ \varphi_{s-1}^{(v-1)} (\lambda - \lambda_0)^s \Big\| = \Big\| \lambda_0 L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \varphi_s^{(v-1)} (\lambda - \lambda_0)^s \right) +$$

$$+ (\lambda - \lambda_0) L(\lambda) \left(\sum_{l=0}^{r-1} \varphi_l^{(v-1)} (\lambda - \lambda_0)^l \right) \Big\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{r+1})$$

и на основании определения заключаем, что $\varphi_0^{(v)}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(v)}, \dots, \varphi_r^{(v)}$ — присоединенная к нему цепочка. Если $\varphi_0^{(k-1), l}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(k-1), l}, \dots, \varphi_r^{(k-1), l}$ — присоединенная к нему цепочка, то

$$\Big\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \varphi_s^{(k), l} (\lambda - \lambda_0)^s \right) \Big\| = \Big\| L(\lambda) \left(\sum_{s=0}^r \left\{ \sum_{p=0}^s (\lambda_l - \lambda_0)^{p-s-1} \varphi_p^{(k-1), l} \right\} \times \right.$$

$$\left. \times (\lambda - \lambda_0)^s \right) \Big\| = \Big\| \sum_{p=0}^r \frac{(\lambda - \lambda_0)^p}{(\lambda_l - \lambda_0)^{p+1}} L(\lambda) \left(\sum_{u=0}^{r-p} \varphi_u^{(k-1), l} (\lambda - \lambda_0)^u \right) \Big\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1}),$$

откуда следует, что $\varphi_0^{(k), l}$ — собственный вектор, а $\varphi_1^{(k), l}, \dots, \varphi_r^{(k), l}$ — присоединенная к нему цепочка.

Полученные системы собственных и присоединенных векторов $\{\varphi_s^{(v)}\}$ ($v = 1, \dots, n-1$), $\{\varphi_s^{(k), l}\}$ ($l = 1, 2, \dots, N$; $k = 1, 2, \dots, n_l$), ($s = 0, 1, \dots, n$) в дальнейшем для удобства будем записывать в виде $\{\varphi_s^{(\tau)}\}$, где $\varphi_s^{(\tau)} = \varphi_s^{(v)}$ ($\tau = v$; $v = 1, 2, \dots, n-1$), $\varphi_s^{(\tau)} = \varphi_s^{(k), l}$ ($\tau = n + n_1 + \dots + n_{l-1} + k - 1$; $k = 1, \dots, n_l$).

В пространстве $\tilde{N}$, являющемся ортогональной суммой $n + \sum_{l=1}^N n_l$ экземпляров пространства N , рассмотрим векторы $\varphi_s \{ \varphi_s^{(0)} \}$,

$\varphi_s^{(1)}, \dots, \varphi_s \left(n + \sum_{l=1}^N n_l - 1 \right) \}$, построенные для всех характеристических зна-

чений и всевозможных цепочек. Если векторы φ_s полны в $\tilde{N}$, то мы будем говорить, что система собственных и присоединенных векторов операторного пучка (1) $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полна в N . Для случая полиномиального пучка непосредственная выкладка показывает, что это определение эквивалентно определению М. В. Келдыша из [1].

Отсюда следует, что система собственных и присоединенных векторов будет $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полной тогда и только тогда, когда из ортогональности $\tilde{g} \in \tilde{N}$ всем векторам φ_s следует, что $\tilde{g} = 0$. Покажем, что если система собственных и присоединенных векторов не является $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полной, то найдется не нулевой вектор $\tilde{g} \{ g_0; g_1; \dots; g_{n-1};$

$g_{1,1}; \dots; g_{n,1}; \dots; g_{n,N}\}$ такой, что для любого $f \in \mathbf{H}$ функция $F(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (\lambda^\nu L^{-1} f, g_\nu) + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} ((\lambda - \lambda_l)^{-k} L^{-1} f, g_{k,l})$ может иметь особые точки лишь при $\lambda = \lambda_l$ и на бесконечности.

Если λ_0 является полюсом порядка $p+1$ функции $L^{-1} f$ ($f \in \mathbf{H}$), то функция $\psi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{p+1} L^{-1} f$ будет аналитической в точке λ_0 . Обозначив через $\hat{\psi}(\lambda)$ первые $p+1$ членов разложения в ряд функции $\psi(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 , найдем, что $\|L(\lambda) \hat{\psi}(\lambda)\| = \|L(\lambda) ((\lambda - \lambda_0)^{p+1} L^{-1} f + O((\lambda - \lambda_0)^{p+1}))\| = O(|\lambda - \lambda_0|^{p+1})$ и что, согласно определению, в главной части $\frac{\varphi_0}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1}} + \frac{\varphi_1}{(\lambda - \lambda_0)^p} + \dots + \frac{\varphi_p}{\lambda - \lambda_0}$ разложения функции $L^{-1} f$ в ряд Лорана коэффициентами будут собственный вектор φ_0 и векторы некоторой цепочки присоединенных к нему векторов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$.

Покажем теперь, что главные части лорановских разложений в окрестности точки λ_0 функций $\lambda^\nu L^{-1} f$ и $(\lambda - \lambda_l)^{-k} L^{-1} f$ будут, соответственно, $\sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(\nu)}}{(\lambda - \lambda_0)^{p-s+1}}$ и $\sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k), l}}{(\lambda - \lambda_0)^{p-s+1}}$. В самом деле, рассуждая по индукции и используя (2), имеем, например

$$\begin{aligned} \text{гл. ч. } (\lambda - \lambda_l)^{-k} L^{-1} f &= \text{гл. ч. } \sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k-1), l}}{(\lambda - \lambda_l)(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} = \\ &= \sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k-1), l}}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} \left(\sum_{r=0}^{p-s} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_l - \lambda_0} \right)^r \right) = \sum_{s=0}^p \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} \times \\ &\times \left(- \sum_{r=0}^s \frac{\varphi_r^{(k-1), l}}{(\lambda_l - \lambda_0)^{s-r+1}} \right) = \sum_{s=0}^p \frac{\varphi_s^{(k), l}}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}}. \end{aligned}$$

Тогда главная часть ряда Лорана функции $F(\lambda)$ в окрестности точки λ_0 будет равна

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \sum_{s=0}^p \frac{(\varphi_s^{(\nu)}, g_\nu)}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \sum_{s=0}^p \frac{(\varphi_s^{(k), l}, g_{k,l})}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} = \sum_{s=0}^p \frac{1}{(\lambda - \lambda_0)^{p+1-s}} (\bar{\varphi}_s, \bar{g})_{\mathbf{H}} = 0.$$

$$\text{Вместе с функцией } F(\lambda) = \left(f, L^{-1}(\bar{\lambda}) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \bar{\lambda}^\nu g_\nu + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{g_{k,l}}{(\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_l)^k} \right\} \right)$$

будет иметь особенности лишь при $\lambda = \bar{\lambda}_l$ и на бесконечности функция

$$\Phi(\lambda) = \bar{F}(\lambda) = \left(L^{-1}(\lambda) \left\{ \sum_{\nu=0}^{n-1} \lambda^\nu g_\nu + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{g_{k,l}}{(\lambda - \lambda_l)^k} \right\}, f \right)$$

при некотором $\bar{g} \in \bar{\mathbf{H}}$ и любом $f \in \mathbf{H}$.

Основной результат настоящей статьи составляет

Теорема 1. Пусть в операторном пучке

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{s=0}^n \lambda^s H^s A_s - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k A_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k} \quad (3)$$

операторы A_s ($s = 0, 1, \dots, n-1$), $A_{l,k}$ ($l = 1, \dots, N$; $k = 1, \dots, n_l - 1$) $\in S_\infty$, $A_n = 1$, $A_{l,n_l} = 1$, H и H_l — полные нормальные операторы $\in S_\infty$, n -я и n_l -я степени которых H^n и $H_l^{n_l}$ — самосопряженные операторы. Тогда система собственных и присоединенных векторов операторного пучка (3) $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -кратно полна, если

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r} < \infty, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H_l)}{\ln r} < \infty \quad (l = 1, \dots, N).$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется оценка резольвенты пучка, которую дает

Теорема 2. Пусть в операторном пучке

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{B_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k} \quad (4)$$

операторы B_l , $B_{l,k} \in S_\infty$. Предположим, что существует уходящая в бесконечность кривая M , обладающая тем свойством, что во всех достаточно удаленных от начала координат точках, лежащих на кривой, $\|L^{-1}(\lambda)\|$ равномерно ограничена. Пусть элементы g_l , $g_{l,k}$, $f \in H$ таковы, что функция

$$F(\lambda) = (L^{-1}(\lambda) f, g(\lambda)), \quad \text{где } g(\lambda) = \sum_{l=0}^{n-1} \bar{\lambda}^l g_l + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{g_{l,k}}{(\lambda - \lambda_l)^k},$$

имеет особенности лишь в точках λ_l и на бесконечности. Тогда при достаточно больших $r = |\lambda|$ имеет место оценка

$$\ln |F'(\lambda)| \leq (n-1) \ln r + \alpha \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)(2r)^l} t^{-1} \nu(t, B_l) dt.$$

Доказательство теоремы 2 основано на лемме 2, для формулировки которой введем следующее определение.

Ядром Пуассона для области D с границей C_D , являющейся спрямляемой кривой, мы будем называть функцию $K(z; \zeta)$ ($z \in D$; $\zeta \in C_D$) такую, что для любой гармонической функции $u(z)$, непрерывной вплоть до границы, справедливо равенство $u(z) = \int_{(C_D)} u(\zeta) K(z; \zeta) |d\zeta|$.

Отметим два известных свойства ядра: $K(z; \zeta) > 0$, $\int_{(C_D)} K(z; \zeta) |d\zeta| = 1$.

Лемма 2. Если $K_{R,a}(z; \zeta)$ — ядро Пуассона для кольца

$$D_{R,a} \{z: a < |z| < R\} \quad (R > 4a) \text{ и } |z| = |z_0| = \frac{R}{2}, \text{ то}$$

$$\max_{(\zeta \in C)} \frac{K_{R,a}(z; \zeta)}{K_{R,a}(z_0; \zeta)} \leq c_1,$$

где C — граница кольца $D_{R,a}$.

Обозначим через $\omega(z; E; D)$ гармоническую меру множества $E \subset C$ относительно области D в точке z . Тогда на основании принципа расширения области [7] $\omega(z; d\zeta \in C_R; D_{R,a}) > \omega(z; d\zeta \in C_R; D_{R, \frac{R}{3}})$, где C_R — окружность $|z| = R$ и, так как

$$\omega(z; d\zeta \in C_R; D_{R,a}) = K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) |d\zeta|, \text{ то } K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) > K_{R, \frac{R}{3}}(z; \zeta \in C_R).$$

Используя свойство инвариантности гармонической меры при конформном отображении, получим $K_{R, \frac{R}{3}}(z; \zeta \in C_R) = \frac{1}{R} K_{1, \frac{1}{3}}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right)$. Так

как $K_{1, \frac{1}{3}}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right)$ есть положительная непрерывная функция при $\frac{|z|}{R} = \frac{1}{2}$, то $K_{1, \frac{1}{3}}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right) > c_1 > 0$ и $K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) > \frac{c_1}{R}$.

Те же соображения позволяют получить оценку сверху при

$$\zeta \in C_R: K_{R,a}(z; \zeta \in C_R) \leq K_{R,0}(z; \zeta \in C_R) = \frac{1}{R} K_{1,0}\left(\frac{z}{R}, \frac{\zeta}{R}\right) \leq \frac{c_2}{R}$$

($K_{R,0}$ — ядро Пуассона для круга) и

$$\max_{(\zeta \in C_R)} \frac{K_{R,a}(z; \zeta)}{K_{R,a}(z_0; \zeta)} \leq \frac{c_2}{c_1}. \quad (5)$$

Перейдем к оценке ядра при $\zeta \in C_a$ (C_a — окружность $|z| = a$).

Пусть $|z_1| = \frac{3}{2}a$, тогда $K_{R,a}(z_1; \zeta \in C_a) > K_{2a,a}(z_1; \zeta \in C_a) = \frac{1}{a} K_{2,1}\left(\frac{z_1}{a}, \frac{\zeta}{a}\right) \geq \frac{c_3}{a}$ и $K_{R,a}(z_1; \zeta \in C_a) \leq K_{\infty,a}(z_1; \zeta \in C_a) = \frac{1}{a} K_{\infty,1}\left(\frac{z_1}{a}, \frac{\zeta}{a}\right) \leq \frac{c_4}{a}$ ($K_{\infty,1}$ — ядро Пуассона для внешности круга).

Рассмотрим гармоническую функцию

$$\varphi(z) = \frac{\ln \frac{R}{|z|}}{\ln \frac{2R}{3a}}.$$

Так как $K_{R,a}(z \in C_R; \zeta \in C_a) = 0$, то при $|z| = R$ и $|z| = \frac{3}{2}a$ будет выполняться неравенство

$$\frac{c_3}{a} \varphi(z) \leq K_{R,a}(z; \zeta \in C_a) \leq \frac{c_4}{a} \varphi(z). \quad (6)$$

Применяя принцип максимума, заключаем, что неравенство (6) справедливо и при $\frac{3}{2}a \leq |z| \leq R$. Если $|z| = \frac{R}{2}$, то

$$\frac{c_3}{a} \cdot \frac{\ln 2}{\ln \frac{2R}{3a}} \leq K_{R,a}(z; \zeta \in C_a) \leq \frac{c_4}{a} \cdot \frac{\ln 2}{\ln \frac{2R}{3a}}$$

$$\text{и} \quad \max_{(\zeta \in C_a)} \frac{\lambda_{R,a}(z; \zeta)}{K_{R,a}(z_0; \zeta)} \leq \frac{c_4}{c_3}. \quad (7)$$

Из (5) и (7) следует справедливость утверждения леммы.

Лемма 3*. Если операторы $A_l \in S_+$, то

$$\nu \left(t, \sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \sum_{l=1}^n \nu(nt, A_l). \quad (8)$$

Пусть $l_l = \nu(nt, A_l) = \min_{(k)} \left\{ k : s_{k+1}(A_l) \leq \frac{1}{nt} \right\}$, тогда на основании неравенства Фан Цюя [8], [5] (стр. 49) получим

$$\sum_{l=1}^n s_{l_l+1} \left(\sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \sum_{l=1}^n s_{l_l+1}(A_l) \leq n \cdot \frac{1}{nt} = \frac{1}{t}.$$

Если $l = \nu \left(t, \sum_{l=1}^n A_l \right) = \min_{(k)} \left\{ k : s_{k+1} \left(\sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \frac{1}{t} \right\}$, то $l+1 \leq \sum_{l=1}^n l_l+1$,

ибо $l+1$ — наименьший номер, для которого $s_p \left(\sum_{l=1}^n A_l \right) \leq \frac{1}{t}$.

Доказательство теоремы 2. Представим каждый из операторов B_l в виде суммы $B_l = B_l^{(m)} + E_l^{(m)}$, где $B_l^{(m)}$ — конечномерный оператор, s -числа которого совпадают с s -числами оператора B_l , большими $\|E_l^{(m)}\|$. Тогда операторный пучок принимает вид

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} - E(\lambda).$$

Если $\|E_l^{(m)}\| \leq \frac{1}{(n+2)R^l}$ (8), где $R > r = |\lambda|$, то для $r > r_1 = 2 \max_{(l)} |\lambda_l|$, $BN(n+2)+1$, где $B = \max_{(l,k)} \|B_{l,k}\|$, получим

$$\|E(\lambda)\| \leq \sum_{l=1}^n \frac{1}{n+2} \left(\frac{r}{R} \right)^l + B \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{|\lambda - \lambda_l|^k} < \frac{n}{n+2} + B \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{1}{(|\lambda| - |\lambda_l|)^k} <$$

* Лемму 3 можно вывести из леммы 5.1 [9].

$$< \frac{n}{n+2} + B \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \left(\frac{2}{r} \right)^k < \frac{n}{n+2} + \frac{2BN}{r-2} < \frac{n+1}{n+2}$$

и тогда $\| (1 - E(\lambda))^{-1} \| < \sum_{l=0}^{\infty} \| E(\lambda)^l \| < n+2$.

Введем в рассмотрение две функции $D_0(\lambda)$ и $D_1(\lambda)$:

$$D_0(\lambda) = \det \left(1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right),$$

$$D_1(\lambda) = (L^{-1}(\lambda) f, g(\lambda)) \cdot D_0(\lambda).$$

С помощью неравенства Вейля [10], [5] (стр. 56) устанавливается следующая оценка:

$$\begin{aligned} |D_0(\lambda)| &\leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j \left(\sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right) \right) = \\ &= \exp \left\{ \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) d\nu \left(t, \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right) \right\} = \\ &= \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\nu \left(t, \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right)}{t^2 + t} dt \right\}. \end{aligned}$$

Так как $s_j(\lambda^l B_l^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1}) \leq |\lambda|^l \| (1 - E(\lambda))^{-1} \| \cdot s_j(B_l^{(m)})$, то на основании леммы 3 будем иметь

$$\begin{aligned} |D_0(\lambda)| &\leq \exp \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\sum_{l=1}^n \nu(n(n+2)r^l t, B_l^{(m)})}{t^2 + t} dt \right\} = \\ &= \exp \left\{ \sum_{l=1}^n \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) d\nu(n(n+2)r^l t, B_l^{(m)}) \right\}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что в силу (8)

$$\nu(n(n+2)r^l t, B_l^{(m)}) = \begin{cases} \nu(n(n+2)r^l t, B_l) & \text{при } t \leq \frac{1}{n} \left(\frac{R}{r} \right)^l, \\ \text{const} & \text{при } t > \frac{1}{n} \left(\frac{R}{r} \right)^l, \end{cases}$$

то

$$|D_0(\lambda)| \leq \exp \left\{ \sum_{l=1}^n \int_0^{\frac{1}{n} \left(\frac{R}{r} \right)^l} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) d\nu(n(n+2)r^l t, B_l) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{(n+2)R^i} \ln \left(1 + \frac{r^i n (n+2)}{t} \right) dv(t, B_i) \right\} = \\
&= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\ln \left(1 + n \left(\frac{r}{R} \right)^i \right) v((n+2)R^i, B_i) + \right. \right. \\
&+ \left. \int_0^{(n+2)R^i} \frac{r^i n (n+2) v(t, B_i)}{t (t + r^i n (n+2))} dt \right\} \leq \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{\ln(1+n)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \int_0^{(n+3)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \int_0^{(n+2)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt \right] \right\} \leq \exp \frac{\ln(1+n)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{(n+3)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt \right\}. \quad (9)
\end{aligned}$$

Так как в точке $\lambda_0 \in M(R > |\lambda_0| > r_1)$ оператор $L(\lambda_0)$ обратим и $\|L^{-1}(\lambda_0)\| \leq d$ (d не зависит от λ_0), то можно оценить $|D_0(\lambda_0)|$ снизу

$$\begin{aligned}
\frac{1}{D_0(\lambda_0)} &= \det \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} (1 - E(\lambda_0))^{-1} \right)^{-1} = \det \left((1 - E(\lambda_0)) \left(1 - E(\lambda_0) - \right. \right. \\
&\left. \left. - \sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} \right) \right)^{-1} = \det \left(1 + \sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} L^{-1}(\lambda_0) \right)
\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|D_0(\lambda_0)|} &\leq \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j \left(\sum_{i=1}^n \lambda_0^i B_i^{(m)} L^{-1}(\lambda_0) \right) \right) \leq \\
&\leq \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{t} \right) dv(nt r_0^i d_1 B_i^{(m)}) \right\} \leq \\
&\leq \exp \beta \left\{ \sum_{i=1}^n \int_0^{(n+3)R^i} t^{-1} \cdot v(t, B_i) dt \right\}, \quad (10)
\end{aligned}$$

где

$$\beta \geq \max \left(1, \frac{\ln \left(1 + \frac{nd}{n+2} \right)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \right).$$

Так как $L^{-1}(\lambda) = (1 - E(\lambda))^{-1} \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda^i B_i^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right)$, то

$$\|J_1(\lambda)\| \leq \|f\| \cdot \|g(\lambda)\| \cdot \|D_0(\lambda)\| \cdot \|(1 - E(\lambda))^{-1}\| \cdot \left\| \left(1 - \sum_{i=1}^n \lambda^i B_i^{(m)} (1 - E(\lambda))^{-1} \right)^{-1} \right\|. \quad (11)$$

Оператор $\sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \in S_1$ и поэтому, на основании теоремы 5.1, из [5], с учетом (9), имеем

$$\left\| \left(1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \right)^{-1} \right\| \leq \frac{\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + s_j \left(\sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \right) \right)}{\left| \det \left(1 - \sum_{l=1}^n \lambda^l B_l^{(m)} (1-E(\lambda))^{-1} \right) \right|} \leq \\ \leq \frac{\exp \left\{ \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)R^l} t^{-1} \cdot \gamma(t, B_l) dt \right\}}{|D_0(\lambda)|}.$$

Так как $|g(\lambda)| \leq a_1 r^{n-1}$ ($r > r_1$), то можно усилить (11)

$$|D_1(\lambda)| \leq a_2 r^{n-1} \exp \left\{ \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)R^l} t^{-1} \cdot \gamma(t, B_l) dt \right\}. \quad (12)$$

Выберем $a > r_1$, тогда в кольце $D_{R,a} \{ \lambda : a < |\lambda| < R \}$ ($R > 4a$) функция $F(\lambda)$ будет аналитической, а для субгармонической функции $\ln |F(\lambda)|$ будет выполнено неравенство

$$\ln |F(\lambda)| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln \left| \frac{D_1(\zeta)}{D_0(\zeta)} \right| |d\zeta| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ \left| \frac{D_1(\zeta)}{D_0(\zeta)} \right| |d\zeta| \leq \\ \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ |D_1(\zeta)| |d\zeta| + \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta|. \quad (13)$$

Так как $\ln |D_0(\lambda)|$ также является субгармонической в кольце $D_{R,a}$ функцией, то

$$\ln |D_0(\lambda_0)| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln |D_0(\zeta)| |d\zeta| = \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) (\ln^+ |D_0(\zeta)| - \\ - \ln^- |D_0(\zeta)|) |d\zeta|$$

$$\text{и} \\ \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta| \leq \ln \frac{1}{|D_0(\lambda_0)|} + \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^+ |D_0(\zeta)| |d\zeta|. \quad (14)$$

Тогда

$$\ln |F(\lambda)| \leq \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ |D_1(\zeta)| |d\zeta| + \\ + \int_{(C)} \frac{K_{R,a}(\lambda; \zeta)}{K_{R,a}(\lambda_0; \zeta)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta| \leq$$

$$\leq \int_{(\zeta)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) \ln^+ |D_1(\zeta)| |d\zeta| + \max_{(\zeta \in C)} \frac{K_{R,a}(\lambda; \zeta)}{K_{R,a}(\lambda_0; \zeta)} \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda_0; \zeta) \ln^- |D_0(\zeta)| |d\zeta|, \quad (15)$$

где λ_0 выбирается на кривой M так, чтобы $|\lambda| = |\lambda_0|$. И в точке $\lambda \left(|\lambda| = \frac{R}{2} \right)$, на основании леммы 2 и оценок (9), (10), (12), будем иметь

$$\text{из (15), с учетом } \int_{(C)} K_{R,a}(\lambda; \zeta) |d\zeta| = 1$$

$$\begin{aligned} \ln |F(\lambda)| &\leq \ln^+ a_s + (n-1) \ln r + \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt + \\ &+ c \left(\beta \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt + \frac{\ln(n+1)}{\ln \frac{n+3}{n+2}} \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt \right) \leq \\ &< (n-1) \ln r + \alpha \sum_{l=1}^n \frac{(n+3)(2r)^l}{n+2} \int_0^1 t^{-1} \nu(t, B_l) dt. \end{aligned}$$

В процессе доказательства теоремы 1 нам потребуется

Лемма 4. Операторный пучок (3) сохраняет свой вид при преобразовании $\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_p}$ в том смысле, что

$$L(\lambda(\mu)) = 1 - \sum_{s=0}^{n_p} \mu^s H_p^s A_{p,s} - \sum_{l=1}^n \mu^{-l} H^l B^l - \sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k B_{l,k}}{\left(\mu - \frac{1}{\lambda_l - \lambda_p} \right)^k},$$

где операторы

$$A_{p,0}, B_l (i=1, \dots, n-1), B_{l,k} (l=1, \dots, N; l \neq p; k=1, \dots, n_l-1) \in S_n, \\ B_n = 1, B_{l,n_l} = 1.$$

Действительно

$$L(\lambda(\mu)) = 1 - \sum_{s=0}^n \left(\lambda_p + \frac{1}{\mu} \right)^s H^s A_s - \sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k A_{l,k}}{\left(\frac{1}{\mu} + \lambda_p - \lambda_l \right)^k} - \sum_{s=0}^{n_p} \mu^s H_p^s A_{p,s},$$

так как

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{\mu} + \lambda_p - \lambda_l \right)^k} = \frac{(-1)^k}{(\lambda_l - \lambda_p)^k} \cdot \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{1}{\left(\mu - \frac{1}{\lambda_l - \lambda_p} \right)^p (\lambda_l - \lambda_p)^{k-p}},$$

то

$$\begin{aligned} L(\lambda(\mu)) &= 1 - \sum_{s=0}^n \lambda_p^s H^s A_s - \sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} (-1)^k \frac{H_l^k A_{l,k}}{(\lambda_l - \lambda_p)^k} - \sum_{s=1}^{n_p} \mu^s H_p^s A_{p,s} - \\ &- \frac{1}{\mu} H \sum_{l=1}^{n-1} i l_p^{l-1} H^{l-1} A_l - \dots - \frac{1}{\mu^{n-1}} H^{n-1} (A_{n-1} + n \lambda_p H) - \frac{1}{\mu^n} H^n - \end{aligned}$$

$$-\sum_{(l+p)}^N \sum_{k=1}^{n_l} \left(\frac{H_l^k}{1 - \frac{1}{\lambda_l - \lambda_p}} \right)^k \cdot \left\{ \sum_{p=k}^{n_l} (-1)^p H_l^{p-k} A_{l,p} \frac{1}{(\lambda_l - \lambda_p)^{k+p}} \right\}.$$

После соответствующих переобозначений получаем утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Не ограничивая общности, можно считать оператор $1 - A_0$ обратимым. Действительно, сдвиг $\lambda \rightarrow \lambda + b$ (при этом собственные и присоединенные векторы не изменяются) преобразуем пучок к виду $L(\lambda + b) = 1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s -$

$$-\sum_{s=1}^{n-1} \lambda^s H^s A'_s - \lambda^n H^n - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{H_l^k A_{l,k}}{(\lambda - b - \lambda_l)^k}, \text{ где операторы } A'_s \in S_n (s=1, \dots, n-1), \text{ а оператор } 1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s \text{ при}$$

$$b \in G_{\theta, c} \left\{ \lambda: |\lambda| > c, \frac{\pi p}{n} + \theta \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi(p+1)}{n} - \theta; 0 < \theta < \frac{\pi}{2n} \right\} \\ (p = 0, 1, \dots, 2n-1),$$

где c достаточно велико, будет обратим в силу леммы М. В. Келдыша

$$[5] \text{ (стр. 329): } \left(1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s \right)^{-1} = \left(1 - \sum_{s=0}^{n-1} b^s (1 - b^n H^n)^{-1} H^s A_s \right)^{-1} \times \\ \times (1 - b^n H^n)^{-1} \text{ и } \left\| \left(1 - \sum_{s=0}^n b^s H^s A_s \right)^{-1} \right\| \leq c_1 \text{ всюду в } G_{\theta, c}.$$

Если теорема неверна, то найдутся $n + \sum_{l=1}^N n_l$ векторов $g_0, g_1, \dots, g_{n+N}$ таких, что при любом $f \in \mathbb{H}$ функция $F(\lambda)$ может иметь особые точки лишь при $\lambda = \lambda_l$ и на бесконечности. Изучим поведение $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$.

Выберем $a > 2 \max_{(l)} (\max_{(l,k)} |\lambda_l|, BN(n+2)+1)$, где $B = \max_{(l,k)} \|H_l^k A_{l,k}\| \times (1 - A_0)^{-1}$ и таким образом, чтобы в области $G_{\theta, a} \|L^{-1}(\lambda)\|$ была равномерно ограничена, последнее возможно, в силу леммы М. В. Келдыша. Тогда в кольце $D_{R,a} (\lambda: a < |\lambda| < R) (R > 4a)$ функция $F(\lambda)$ будет аналитической и, на основании теоремы 2 (в качестве кривой M можно выбрать, например, биссектрису угла $\frac{\pi p}{n} + \theta \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi(p+1)}{n} - \theta$), получим

$$\ln |F(\lambda)| \leq (n-1) \ln r + \alpha \sum_{l=1}^n \int_0^{(n+3)(2r)^l} t^{-1} \cdot v(t, H^l A_l (1 - A_0)^{-1}) dt \leq$$

$$\leq (n-1) \ln r + \sigma \ln (n+3) (2r)^n \sum_{i=1}^n \nu((n+3)(2r)^i \|A_i(1-A_0)^{-1}\|, H^i). \quad (16)$$

Если $k = \max_{(i)} \{(n+3)2^i \|A_i(1-A_0)^{-1}\|\}^{\frac{1}{i}}$, то из (16) следует:

$$\ln |F(\lambda)| \leq \alpha' \ln r + \nu(kr, H). \quad (17)$$

Пусть $M(r) = \max_{|\lambda|=r} |F(\lambda)|$, тогда в силу (17) и условия теоремы

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M(r)}{\ln r} \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(kr, H)}{\ln r} < \infty. \quad (18)$$

Выберем δ так, чтобы $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r} < \frac{\pi}{2\delta}$ и применим в углах

$$\left| \arg \left(\lambda - a e^{i \frac{\pi p}{n}} \right) - \frac{\pi p}{n} \right| < \delta \quad \text{принцип Фрагмена-Линделефа [11] к функции}$$

$$\frac{F(\lambda)}{\lambda^{n-1}}.$$

Так как в области $G_{0, \alpha} |F(\lambda)| \leq d_1 r^{n-1}$ на основании леммы

М. В. Келдыша, то на сторонах углов $\left| \arg \left(\lambda - a e^{i \frac{\pi p}{n}} \right) - \frac{\pi p}{n} \right| < \delta$ ($\theta < \delta$)

$$\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda^{n-1}} \right| < d_2 \quad \text{и поэтому в виду (18) внутри углов} \left| \arg \left(\lambda - a e^{i \frac{\pi p}{n}} \right) - \frac{\pi p}{n} \right| < \delta$$

справедливо неравенство: $\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda^{n-1}} \right| \leq d_2$. Следовательно, при

$$r > \alpha \quad |F(\lambda)| \leq d' r^{n-1}. \quad (19)$$

Так как при преобразовании $\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_l}$, на основании леммы 4, вид

пучка сохраняется, то исследование поведения $F(\lambda)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_l$ сводится

к исследованию поведения $F(\mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$. Следовательно, $|F(\lambda)| \leq$

$d_l \frac{1}{|\lambda - \lambda_l|^{n_l-1}}$ при $|\lambda - \lambda_l| < a_l$ и поэтому

$$F(\lambda) = \sum_{s=0}^{n-1} b_s \lambda^s + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{b_{k,l}}{(\lambda - \bar{\lambda}_l)^k}. \quad (20)$$

Функция $\psi(\lambda) = L^{*-1}(\lambda) g(\bar{\lambda})$ может иметь особенности лишь в точках $\bar{\lambda}_l$ и на бесконечности, а, так как при любом $f \in \mathbf{H}$ ($\psi(\lambda)$, f), в силу (20), имеет лишь полюсы конечного порядка, то

$$\psi(\lambda) = \sum_{s=0}^{n-1} \psi_s \lambda^s + \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{\psi_{k,l}}{(\lambda - \bar{\lambda}_l)^k} \quad (\psi_s, \psi_{k,l} \in \mathbf{H}).$$

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях λ и $\lambda - \bar{\lambda}_l$ в выражении $L^*(\lambda) \psi(\lambda) = g(\lambda)$. Коэффициент при наибольшей степени λ^{2n-1}

слева равен $H^n \psi_{n-1}$, а справа -0 , отсюда из полноты оператора H_n следует, что $\psi_{n-1} = 0$; коэффициент при λ^{2n-2} слева равен $A_{n-1}^* (H^*)^{n-1} \psi_{n-1} + H^n \psi_{n-2}$, а справа -0 , но, так как $\psi_{n-1} = 0$, то $\psi_{n-2} = 0$ и т. д.; аналогично проводим рассуждения и для коэффициентов при степенях $\lambda - \bar{\lambda}_l$. Следовательно, $g(\lambda) \equiv 0$, что возможно лишь при $g_0 = g_1 = \dots = g_{N,N} = 0$. Теорема доказана.

Утверждение теоремы остается в силе и в том случае, когда $A_n = e^{i\theta_n} 1$, $A_{l,n_l} = e^{i\theta_{l,n_l}} 1$, а также, когда вместо пучка (3) рассматривается пучок

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{s=0}^n \lambda^s A_s H^s - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{A_{l,k} H_l^k}{(\lambda - \lambda_l)^k}. \quad (3')$$

Автор выражает искреннюю благодарность В. И. Мацаеву за постоянное внимание и руководство.

Артиллерийская радиотехническая академия
им. А. А. Говорова

Поступило 14.XI.1967

Ե. Զ. ՄՈՉՈՒՍՅԱՆ

ՔԵՆՈՐԵՄ ԲԱՑԻՈՆԱԿ ՕՊԵՐԱՏՈՐԱՅԻՆ ՓԵՋԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ԵՎ ՄԻԱԿՑՎԱՄ
ՎԵԿՏՈՐՆԵՐԻ ԼՐԻՎՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում ապացուցվում է թեորեմ

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i H^i - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{A_{l,k} H_l^k}{(\lambda - \lambda_l)^k}$$

օպերատորային փնջի սեփական և միակցված ֆունկցիաների լրիվության վերաբերյալ: Այստեղ A_i ($i=0,1,\dots,n-1$), $A_{l,k}$ ($k=1,\dots,n_l-1$; $l=1,\dots,N$) օպերատորները լրիվին անընդհատ են; $A_n=1$, $A_{l,n_l}=1$, իսկ H և H_l օպերատորները լրիվ նորմալ լրիվին անընդհատ օպերատորներ են, որոնց n և n_l աստիճանները ինքնահամալուծ են և

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln v(r, H)}{\ln r} < \infty, \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln v(r, H_l)}{\ln r} < \infty \quad (l=1,\dots,N):$$

Այս թեորեմը Մ. Վ. Կելդիշի հայտնի թեորեմի ընդհանրացումն է:

* Примечание при корректуре. Утверждение теоремы остается верным и в том случае, когда в пучках (3) и (3') спектр операторов H и H_l ($l=1,\dots,N$) сосредоточен на системе лучей, исходящих из точки $\lambda=0$ (для каждого оператора своя система лучей).

E. Z. MOGULSKY

A COMPLETENESS THEOREM FOR THE EIGEN-AND ADJOINED FUNCTIONS OF THE RATIONAL OPERATOR BUNCH

S u m m a r y

A theorem is proved about $n + \sum_{l=1}^N n_l$ -fold completeness for the system of eigen-and adjoined functions of the operator bunch

$$L(\lambda) = 1 - \sum_{l=0}^n \lambda^l A_l H^l - \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^{n_l} \frac{A_{l,k} H_l^k}{(\lambda - \lambda_l)^k}$$

provided that $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H)}{\ln r} < \infty$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \nu(r, H_l)}{\ln r} < \infty$ ($l=1, 2, \dots, N$).

Here operators A_l ($l=0, \dots, n-1$), $A_{l,k}$ ($k=1, \dots, n_l-1$; $l=1, \dots, N$) are completely continuous, $A_n=1$, $A_{l,n_l}=1$ and operator H , H_l are normal completely continuous operators, n th and n_l th powers of which are self-conjugate operators.

This theorem is a generalization of the well-known theorem by M. V. Keldysh.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. В. Келдыш. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, 1, 1951.
2. В. И. Мацаев. Несколько теорем о полноте корневых подпространств вполне непрерывных операторов, ДАН СССР, 155, 2, 1964.
3. В. И. Мацаев. Об одном методе оценки резольвент несамосопряженных операторов, ДАН СССР, 154, 5, 1964.
4. Дж. Э. Аллахвердиев. О полноте системы собственных и присоединенных элементов операторов, являющихся рациональными функциями параметра, ДАН СССР, 159, 5, 1964.
5. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, Изд. "Наука", 1965.
6. А. С. Маркус. О голоморфных оператор-функциях, ДАН СССР, 119, 6, 1958.
7. Р. Неванлинна. Однозначные аналитические функции, ОГИЗ, ГИТТЛ, 1941, стр. 47.
8. Ky Fan. Maximum properties and inequalities for eigenvalues of completely continuous operators, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 37, 1951.
9. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, Изд. "Наука", 1967, стр. 142.
10. H. Weyl. Inequalities between the two kinds of eigenvalues of linear transformation, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 35, 1949.
11. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, т. 2, Изд. "Наука", 1968, стр. 206.