ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 6, 1968 Математика

Г. В. ЖИДКОВ

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ НА ВНЕШНОСТИ ИНТЕРВАЛА И ПОЛУОСИ

Ю. А. Брудный и Р. М. Тригуб рассмотрели вопрос о приближении функций на внешности интервала и полуоси целыми функциями конечной степени и полустепени, получив результаты аналогичные результатам А. Ф. Тимана и В. К. Дзядыка в случае приближения функций на отрезке алгебраическими полиномами [1], [2].

Таким образом, в метрике непрерывных функций были указаны необходимые и достаточные условия принадлежности функции к классу Липшица.

В данной статье в метрике функций, суммируемых с квадратом, решаются задачи, обратные к задачам, рассмотренным в работах [1], [2].

А именно, указываются свойства функций на внешности интервала и полуоси, которые являются необходимыми и достаточными, чтобы наилучшее приближение удовлетворяло наравенству, имеющему место в известных классических теоремах Д. Джексона и С. Н. Бернштейна [7].

В случае приближения функций алгебраическими полиномами на отрезке аналогичный результат получен в статье [6]. Итак, пусть функция $f(x)$ определена на множестве $1 \leqslant x < \infty$. Введем функции

$$G_\sigma(x) = \int_0^\sigma P_{-1/2+i\tau}(x)\, \Phi^*(\tau)\, d\tau,$$

где

$$P_{-1/2+i\tau}(x) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{ch} \pi\tau \int_0^\infty \frac{\cos \tau z dz}{\sqrt{\operatorname{ch} z + x}}, \tag{1}$$

$$(\tau\, th \pi\tau)^{-1/2}\, \Phi^*(\tau) \in L_2\,[0, \infty).$$

Обозначим через $A_\sigma^{(2)}[f]$ наилучшее приближение $f(x)$ с помощью функций $G_\sigma(x)$

$$A_\sigma^{(2)}[f] = \inf_{G_\sigma(x)} \left(\int_1^\infty [f(x) - G_\sigma(x)]^2\, dx \right)^{1/2}$$

и соответственно

$$f_h(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(x \operatorname{ch} h + \sqrt{x^2 - 1} \operatorname{sh} h \cos \theta)\, d\theta.$$

Рассмотрим преобразование Мелера-Фока [3] функции

$$f(x) \sim \int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}(x)\, \Phi(\tau)\, d\tau,$$

где

$$\Phi(\tau) \sim \tau th\pi\tau \int_1^\infty P_{-1/2+i\tau}(x)\, f(x)\, dx.$$

Отсюда и из равенства Парсеваля [4]

$$\int_1^\infty f^2(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau\, \mathrm{th}\pi\tau}\, d\tau$$

следует

$$A_\sigma^{(2)}[f] = \left(\int_1^\infty \left[f(x) - \int_0^\sigma P_{-1/2+i\tau}(x)\, \Phi(\tau)\, d\tau \right]^2 dx \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\int_\sigma^\infty \frac{\Phi^2(\tau)}{\tau\, th\pi\tau}\, d\tau \right)^{1/2}. \tag{2}$$

Теорема 1 *Если функция $f(x)$ имеет s-ю производную, удовлетворяющую условию*

$$\int_1^\infty \left[\frac{d^s f(x)}{dx^s} \right]^2 (x^2-1)^s\, dx < \infty,$$

то для выполнения неравенства

$$\left(\int_1^\infty \left[\frac{d^s f_h(x)}{dx^s} - \frac{d^s f(x)}{dx^s} \right]^2 (x^2-1)^s\, dx \right)^{1/2} \leqslant Mh^\gamma \tag{3}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_\sigma^{(2)}[f] \leqslant \frac{C}{\sigma^{s+\gamma}}, \tag{4}$$

где M не зависит от $h > 0$, C не зависит от $\sigma > 1$, $0 < \gamma < 2$.

Доказательство. Покажем, что из (3) следует (4). Пусть

$$f(\mathrm{ch}\,\alpha) \sim \int_0^\infty P_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\,\alpha)\, \Phi(\tau)\, d\tau.$$

С помощью теоремы сложения

$$P_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\,R) = P_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\,\alpha)\, P_{-1/2+i\tau}(\mathrm{ch}\,h) +$$

$$+ 2\sum_{m=1}^\infty \frac{\Gamma(1/2+i\tau-m)}{\Gamma(1/2+i\tau+m)} P_{-1/2+i\tau}^m(\mathrm{ch}\,\alpha)\, P_{-1/2+i\tau}^m(\mathrm{ch}\,h) \cos m\theta,$$

$$\mathrm{ch}\,R = \mathrm{ch}\,\alpha\, \mathrm{ch}\,h + \mathrm{sh}\,\alpha\, \mathrm{sh}\,h \cos\theta$$

имеем

$$\left[\frac{d^s}{d\operatorname{ch}\alpha^s}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\operatorname{ch}R)\,d\theta\right)-\frac{d^s f(\operatorname{ch}\alpha)}{d\operatorname{ch}\alpha^s}\right]\operatorname{sh}^s\alpha\sim$$

$$\sim\int_0^\infty\left[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}h)-1\right]\frac{\Gamma(1/2+i\tau+s)}{\Gamma(1/2+i\tau-s)}\;P^{-s}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,\Phi(\tau)\,d\tau,$$

где

$$P^{-s}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)=\frac{\Gamma(1/2+i\tau-s)}{\Gamma(1/2+i\tau+s)}\operatorname{sh}^s\alpha\;\frac{d^s P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)}{d\operatorname{ch}\alpha^s}.$$

Применяя равенство Парсеваля для обобщенного преобразования Мелера-Фока [4]

$$\int_0^\infty f^2(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}^{2s+1}\alpha\,d\alpha=\pi\int_0^\infty\frac{\Phi^2(\tau)\,d\tau}{\tau\operatorname{sh}\pi\tau\,\Gamma(1/2+i\tau+s)\,\Gamma(1/2-i\tau+s)},$$

получим

$$\int_0^\infty\left[\frac{d^s}{d\operatorname{ch}\alpha^s}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\operatorname{ch}R)\,d\theta\right)-\frac{d^s f(\operatorname{ch}\alpha)}{d\operatorname{ch}\alpha^s}\right]^2\operatorname{sh}^{2s+1}\alpha\,d\alpha=$$

$$=\pi\int_0^\infty\left[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}h)-1\right]^2\frac{\Gamma(1/2+i\tau+s)}{\Gamma^2(1/2+i\tau-s)}\,\frac{\Phi^2(\tau)\,d\tau}{\tau\operatorname{sh}\pi\tau\;\Gamma(1/2-i\tau+s)}.$$

Так как [3]

$$\frac{\Gamma(1/2+i\tau+s)}{\Gamma(1/2+i\tau-s)}=(-1)^s\prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right],$$

$$\Gamma(1/2+i\tau+s)\,\Gamma(1/2-i\tau+s)=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau}\prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right],$$

то, учитывая условие теоремы, будем иметь

$$\int_0^\infty\left[\frac{d^s}{d\operatorname{ch}\alpha^s}\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\operatorname{ch}R)\,d\theta\right)-\frac{d^s f(\operatorname{ch}\alpha)}{d\operatorname{ch}\alpha^s}\right]^2\operatorname{sh}^{2s+1}\alpha\,d\alpha=$$

$$=\pi\int_0^\infty\left[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}h)-1\right]^2\prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\frac{\Phi^2(\tau)\,d\tau}{\tau\,th\pi\tau}\leqslant M^2h^{2\gamma}\qquad(5)$$

или

$$\int_{1/h}^{2/h}\left[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}h)-1\right]^2\tau^{2s-1}\operatorname{cth}\pi\tau\,\Phi^2(\tau)\,d\tau\leqslant M_1h^{2\gamma},$$

$$M_1=M^2/\pi.\qquad(6)$$

Воспользовавшись формулами [3]

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} 2yz}{(\operatorname{ch} z)^{2x}}\, dz = z^{2x-2} \frac{\Gamma(x+y)\Gamma(x-y)}{\Gamma(2x)},$$

где

$$R(x) > 0,\ R(x) > |R(y)|,$$

$$|\Gamma(1/2+i\tau)|^2 = \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\tau},\ |\Gamma(i\tau)|^2 = \frac{\pi}{\tau \operatorname{sh}\pi\tau}$$

и интегральным представлением (1), получим ряд Маклорена

$$P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) = 1 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)h^2 + \frac{1}{1440}\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)\left(\frac{19}{4}+3\tau^2\right)h^4 - \cdots.$$

Так как ряд—знакопеременный обвертывающего типа, то

$$\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)h^2\left(1-\frac{19}{960}h^2-\frac{\tau^2h^2}{80}\right) \leqslant 1 - P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) < \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)h^2. \tag{7}$$

При проведении дальнейших выкладок будем предполагать, что $0 < h \leqslant 1$, ибо в случае $h > 1$ доказательство теоремы проводится тривиально.

Предполагая, что $1/h \leqslant \tau \leqslant 2/h$, будем иметь

$$[P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h) - 1]^2 \geqslant \frac{1}{36}\left(\frac{1}{4}+\tau^2\right)^2 h^4 \left(1-\frac{19}{960}h^2-\frac{\tau^2h^2}{80}\right)^2 > C_1, \tag{8}$$

где C_1 — абсолютная постоянная, которая не зависит от τ и h.

Из (6) и (8) получим

$$\int_{1/h}^{2/h} \tau^{2s-1} cth\pi\tau \Phi^2(\tau)\, d\tau \leqslant M_2 h^{2\gamma},\ M_2 = M_1/C_1. \tag{9}$$

Следовательно

$$\int_{1/h}^{2/h} \frac{cth\pi\tau}{\tau}\Phi^2(\tau)\, d\tau \leqslant M_2 h^{2s+2\gamma}$$

или

$$\int_{2^j/h}^{2^{j+1}/h} \frac{cth\pi\tau}{\tau}\Phi^2(\tau)\, d\tau \leqslant 2^{-2j(s+\gamma)} M_2 h^{2s+2\gamma},\ j = 0, 1, 2, \cdots.$$

Из суммируемости по j и сходимости ряда в правой части следует

$$\int_{1/h}^{\infty} \frac{cth\pi\tau}{\tau}\Phi^2(\tau)\, d\tau < C^2 h^{2s+2\gamma}. \tag{10}$$

Соотношение (10) при $\sigma = 1/h$ и (2) дают (4).

Докажем обратное утверждение, т. е., что из (4) следует (3). Проводя аналогичные выкладки как и в начале теоремы, получим соотношение (5). Представим следующий интеграл тремя слагаемыми:

$$\pi \int_0^\infty [P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h)-1]^2 \prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\frac{\Phi^2(\tau)}{\tau th\pi\tau}\,d\tau=$$

$$=\int_0^1 \cdots + \int_1^{1/h} \cdots + \int_{1/h}^\infty \cdots. \tag{11}$$

Из условия теоремы и равенства Парсеваля аналогично соотношению (5) получим

$$\pi \int_0^\infty \prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\frac{\Phi^2(\tau)}{\tau th\pi\tau}\,d\tau=\int_0^\infty\left[\frac{d^s f(\operatorname{ch}\alpha)}{d\operatorname{ch}\alpha^s}\right]^2 \operatorname{sh}^{2s+1}\alpha\,d\alpha<\infty.$$

Поэтому, учитывая неравенство (7) и то, что $0<h\leqslant 1$, будем иметь

$$\pi \int_0^1 [P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h)-1]^2 \prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\frac{\Phi^2(\tau)}{\tau th\pi\tau}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant \pi h^4 \int_0^1 \prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\frac{\Phi^2(\tau)}{\tau th\pi\tau}\,d\tau=C_2 h^4\leqslant C_2 h^{2\gamma}.$$

Соотношение

$$k(\tau)=\int_\tau^\infty \tau^{2s-1}\operatorname{ct} h\,\pi\tau\,\Phi^2(\tau)\,d\tau=O(\tau^{-2\gamma})$$

следует из (9) и эквивалентно (10).

Так как при $\tau>1$ имеет место неравенство

$$\prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]<\prod_{k=1}^{s}\left[1+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\tau^{2s}=C_s\tau^{2s},$$

то из (7) интегрированием по частям получим

$$\pi \int_1^{1/h} [P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h)-1]^2 \prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\frac{\Phi^2(\tau)}{\tau\, th\,\pi\tau}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_s \int_1^{1/h} h^4\tau^{2s+3}\operatorname{ct} h\,\pi\tau\Phi^2(\tau)\,d\tau=-C_s h^4\int_1^{1/h}\tau^4 k'(\tau)\,d\tau=$$

$$=-C_s h^4 k(\tau)\Big|_1^{1/h}+C_s h^4\int_1^{1/h}\tau^3 k(\tau)\,d\tau\leqslant C_3 h^{2\gamma}.$$

Оценим третье слагаемое в соотношении (11).

В силу неравенства

$$|P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h)|\leqslant 1$$

и условия теоремы получим

$$\pi \int_{1/h}^\infty [P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch} h)-1]^2 \prod_{k=1}^{s}\left[\tau^2+\frac{(2k-1)^2}{4}\right]\frac{\Phi^2(\tau)}{\tau th\pi\tau}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 4\pi C_s \int\limits_{1/h}^{\infty} \tau^{2s-1} \operatorname{cth} \pi\tau \Phi^2(\tau)\, d\tau \leqslant C_4 h^{2\gamma}.$$

Объединяя оценки слагаемых в выражении (11), учитывая (5) и (6), получим (3).

Далее рассмотрим теорему о наилучшем приближении функции $f(x)$, определенной на полуоси $0 \leqslant x < \infty$.

Для этого воспользуемся интегральным преобразованием Ханкеля [5]

$$f(x) \sim C_\nu \int\limits_0^{\infty} j_\nu(\tau x)\, \Phi_\nu(\tau)\, \tau^{2\nu+1}\, d\tau, \tag{12}$$

$$\Phi_\nu(\tau) \sim \int\limits_0^{\infty} j_\nu(\tau x) f(x)\, x^{2\nu+1}\, dx, \quad C_\nu = \frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}, \quad \nu > -1/2,$$

$$j_\nu(\tau x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1) J_\nu(\tau x)}{(\tau x)^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+k+1)\, k!} \left(\frac{\tau x}{2}\right)^{2k}, \tag{13}$$

$J_\nu(\tau x)$ — функция Бесселя.

В силу теоремы сложения для функций Бесселя

$$\frac{J_\nu(\tau R)}{(\tau R)^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{i=0}^{\infty} (\nu+i) \frac{J_{\nu+i}(\tau x)}{(\tau x)^\nu} \frac{J_{\nu+i}(\tau h)}{(\tau h)^\nu} C_i^\nu(\cos\theta),$$

где $R^2 = x^2 + h^2 - 2xh\cos\theta$, $C_i^\nu(\cos\theta)$ — полиномы Гогенбауэра, и соотношений

$$\int\limits_0^{\pi} C_i^\nu(\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta\, d\theta = 0, \quad i=1, 2, \cdots, \quad \int\limits_0^{\pi} \sin^{2\nu}\theta\, d\theta = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)}{\Gamma(\nu+1)},$$

$C_0^\nu(\cos\theta) = 1$, имеем

$$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^{\pi} j_\nu(\tau R) \sin^{2\nu}\theta\, d\theta = j_\nu(\tau x)\, j_\nu(\tau h).$$

Отсюда и из (12) следует

$$f_h(x) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^{\pi} f(R) \sin^{2\nu}\theta\, d\theta \sim$$

$$\sim C_\nu \int\limits_0^{\infty} j_\nu(\tau h)\, j_\nu(\tau x)\, \Phi_\nu(\tau)\, \tau^{2\nu+1}\, d\tau. \tag{14}$$

Для преобразования Ханкеля (12) имеет место равенство Парсеваля [5]

$$\int\limits_0^{\infty} f^2(x)\, x^{2\nu+1}\, dx = C_\nu \int\limits_0^{\infty} \Phi_\nu^2(\tau)\, \tau^{2\nu+1}\, d\tau.$$

Построим функции

$$H_\sigma(x)=\int\limits_0^\sigma j_\nu(\tau x)\,\Phi^*(\tau)\,\tau^{2\nu+1}\,d\tau, \tag{15}$$

где

$$\Phi^*(\tau)\,\tau^{\nu+1/2}\in L_2[0,\infty).$$

Обозначим через $A_\sigma^{*(2)}[f]$ наилучшее приближение $f(x)$ функциями $H_\sigma(x)$ в метрике L_2

$$A_\sigma^{*(2)}[f]=\inf_{H_\sigma(x)}\left(\int\limits_0^\infty[f(x)-H_\sigma(x)]^2\,x^{2\nu+1}\,dx\right)^{1/2}. \tag{16}$$

На основании равенства Парсеваля из соотношений (12) и (16) имеем

$$A_\sigma^{*(2)}[f]=\left(\int\limits_0^\infty\left[f(x)-\int\limits_0^\sigma j_\nu(\tau x)\,\Phi_\nu(\tau)\,\tau^{2\nu+1}\,d\tau\right]^2 x^{2\nu+1}\,dx\right)^{1/2}=$$

$$=\left(\int\limits_\sigma^\infty\Phi_\nu^2(\tau)\,\tau^{2\nu+1}\,d\tau\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ имеет s-ю производную, удовлетворяющую условию*

$$\int\limits_0^\infty\left[x^s\frac{d^s f(x)}{(xdx)^s}\right]^2 x^{2\nu+1}\,dx<\infty,$$

то для выполнения неравенства

$$\left(\int\limits_0^\infty\left[x^s\frac{d^s f_h(x)}{(xdx)^s}-x^s\frac{d^s f(x)}{(xdx)^s}\right]^2 x^{2\nu+1}\,dx\right)^{1/2}\leqslant Mh^\gamma \tag{18}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$A_\sigma^{*(2)}[f]\leqslant\frac{C}{\sigma^{s+\gamma}}\quad \nu>-1/2,\ 0<\gamma<2; \tag{19}$$

M не зависит от $h>0$, постоянная C не зависит от $\sigma>1$, $f_h(x)$ определяется формулой (14).

Доказательство. Покажем, что из (18) следует (19).

Из соотношения (12) имеем

$$\frac{d^s f(x)}{(xdx)^s}\sim C_{\nu}\int\limits_0^\infty j_{\nu+s}(\tau x)\,\Phi_\nu(\tau)\,\tau^{2s+2\nu+1}\,d\tau.$$

С помощью равенства Парсеваля получим

$$\int\limits_0^\infty\left[x^s\frac{d^s f_h(x)}{(xdx)^s}-x^s\frac{d^s f(x)}{(xdx)^s}\right]^2 x^{2\nu+1}\,dx=$$

$$= C_\nu \int_0^\infty [j_\nu(\tau h) - 1]^2 \, \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2s+2\nu+1} d\tau. \tag{20}$$

Отсюда и из условия теоремы будем иметь

$$\int_0^\infty [j_\nu(\tau h) - 1]^2 \, \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2s+2\nu+1} \, d\tau \leqslant M_1 h^{2\gamma}, \quad M_1 = M^2/C_\nu.$$

Тем более справедлива оценка

$$\int_{1/h}^{2/h} [j_\nu(\tau h) - 1]^2 \, \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2s+2\nu+1} \, d\tau \leqslant M_1 h^{2\gamma}. \tag{21}$$

Так как в правой части выражения (13) — знакопеременный ряд, то имеют место неравенства

$$\frac{1}{\nu+1} \left(\frac{\tau h}{2}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{2(\nu+2)} \left(\frac{\tau h}{2}\right)^2\right] \leqslant 1 - j_\nu(\tau h) \leqslant \frac{1}{\nu+1} \left(\frac{\tau h}{2}\right)^2. \tag{22}$$

Неравенства (21) и (22) дают

$$\int_{1/h}^{2/h} \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2s+2\nu+1} \, d\tau \leqslant M_2 h^{2\gamma}, \quad M_2 = \frac{64\,(\nu+1)^2\,(\nu+2)^2}{(2\nu-3)^2} M_1$$

или

$$\int_{1/h}^{2/h} \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2\nu+1} \, d\tau \leqslant M_2 h^{2s+2\gamma}. \tag{23}$$

Следовательно

$$\int_{2^j/h}^{2^{j+1}/h} \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2\nu+1} \, d\tau \leqslant 2^{-2j(s+\gamma)} M_2 h^{2s+2\gamma}, \quad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

Суммируя по j, будем иметь

$$\int_{1/h}^{\infty} \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2\nu+1} \, d\tau \leqslant M_3 h^{2s+2\gamma}. \tag{24}$$

Полагая в (24) $1/h = \sigma$ и учитывая (17), получим (19). Докажем обратное утверждение. Из неравенства (24) следует

$$\int_{1/h}^{\infty} \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2s+2\nu+1} \, d\tau \leqslant M_4 h^{2\gamma} \tag{25}$$

и наоборот. Обозначим

$$k(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} \Phi_\nu^2(\tau) \, \tau^{2s+2\nu+1} \, d\tau = O(\tau^{-2\gamma}). \tag{26}$$

Представим следующий интеграл двумя слагаемыми

$$\int_0^\infty [j_\nu(\tau h)-1]^2\,\Phi_\nu^2(\tau)\,\tau^{2s+2\nu+1}\,d\tau=\int_0^{1/h}\cdots+\int_{1/h}^\infty\cdots.$$

Оценим первое слагаемое. На основании неравенства (22) и (26) интегрированием по частям получим

$$\int_0^{1/h}[j_\nu(\tau h)-1]^2\,\Phi_\nu^2(\tau)\,\tau^{2s+2\nu+1}\,d\tau\leqslant$$

$$<h^4\int_0^{1/h}\Phi_\nu^2(\tau)\,\tau^{2s+2\nu+5}\,d\tau=-h^4\int_0^{1/h}\tau^4\,k'(\tau)\,d\tau=$$

$$=-h^4\tau^4\,k(\tau)\Big|_0^{1/h}+4h^4\int_0^{1/h}\tau^3\,k(\tau)\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 4h^4\int_0^{1/h}\tau^3k(\tau)\,d\tau\leqslant h^4\int_0^{1/h}O\left(\tau^{-3-2\gamma}\right)d\tau\leqslant M_3h^{2\gamma}.$$

Оценим второй интеграл. Так как $|j_\nu(\tau h)|\leqslant 1$, то, учитывая (25), будем иметь

$$\int_{1/h}^\infty[j_\nu(\tau h)-1]^2\,\Phi_\nu^2(\tau)\,\tau^{2s+2\nu+1}\,d\tau\leqslant$$

$$\leqslant 4\int_{1/h}^\infty\Phi_\nu^2(\tau)\,\tau^{2s+2\nu+1}\,d\tau\leqslant 4M_4h^{2\gamma}.$$

Из полученных оценок вытекает неравенство

$$\int_0^\infty[j_\nu(\tau h)-1]^2\,\Phi_\nu^2(\tau)\,\tau^{2s+2\nu+1}\,d\tau<(M_3+4M_4)\,h^{2\gamma}.$$

Отсюда и из (20) следует (18).

Университет дружбы народов
им. П. Лумумбы

Поступило 13.IV.1967

Գ. Վ. ԺԻԴԿՈՎ

ԻՆՏԵՐՎԱԼԻ ԱՐՏԱՔԻՆ ՄԱՍՈՒՄ ԵՎ ԿԻՍԱԱՌԱՆՑՔԻ ՎՐԱ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԼԱՎԱԳՈՒՅՆ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում նշված են ֆունկցիաների այնպիսի դասեր, որոնց պատկանելը անհրաժեշտ և բավարար է այն բանի համար, որպեսզի լավագույն մոտար-

կումը ինտերվալի արտաքին մասում և կիսաառանցքի վրա բավարարի համապատասխան անհավասարությանը։

Այս անհավասարությունը հանդիսանում է Դ. Ջեկսոնի և Ս. Ն. Բերնշտեյնի Լիպշիցի դասին պատկանող ֆունկցիաների լավագույն մոտավորությունների վերաբերյալ ուղիղ և հակադարձ թեորեմների ստրուկտուրային բնութագրությունը։

G. V. ZIDKOV

ABOUT THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN THE EXTERNAL OF AN INTERVAL AND DEMIAXIS ABSTRACT

Summary

In the paper some classes of functions are indicated, belonging to which is necessary and sufficient for a function, for the best approximation in the external of an interval or on a demiaxis would satisfy certain inequality.

The inequality mentioned is a structural characteristic in well known Jackson's and Bernstein's theorems (direct and inverse) on the best approximation of functions belonging to the Lipschite's class.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ю. А. Брудный.* Конструктивная характеристика функций, заданных на некоторых совершенных множествах действительной оси, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, 1961, 122—129.
2. *Р. М. Тригуб.* Приближение функций с данным модулем гладкости на внешности отрезка и полуоси, Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций, Физматгиз, 1961, 47—51.
3. *Н. Н. Лебедев.* Специальные функции и их приложения, Изд. тех. теор. лит. 1953.
4. *Н. Я. Виленкин.* Матричные элементы неприводимых унитарных представлений, группы движений пространства Лобачевского и обобщенные преобразования Фока-Мелера, ДАН СССР, 118, № 2, 1958, 220—223.
5. *Н. Я. Виленкин.* Специальные функции и теория представлений групп, изд. „Наука", 1965.
6. *Г. В. Жидков.* Конструктивная характеристика одного класса непериодических функций, ДАН СССР, 169, № 5, 1966, 1002—1005.
7. *С. Н. Бернштейн.* Собрание сочинений, т. I, статья № 6, Изд. АН СССР, 1952, 112—123.