ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 6, 1968 Математика

Б. И. ГОЛУБОВ

КРИТЕРИИ КОМПАКТНОСТИ МНОЖЕСТВ В ПРОСТРАНСТВАХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ОБОБЩЕННОЙ ВАРИАЦИИ

1. **Введение**. В настоящей заметке доказываются аналоги критериев компактности М. Рисса [1] и А. Н. Колмогорова [2] для пространств AC_M*, введенных Муселаком и Орличем [3]. Для этой цели введено понятие $M\,(M')$—модуля непрерывности функции пространства AC_M.

Вообще пространства AC_M определяются в зависимости от функции $M(u)$, которая задана, непрерывна и не убывает на $[0, +\infty)$, причем $M(0)=0$ и $M(u)>0$ при $u>0$. Однако мы в этой работе наложим на функцию $M(u)$ дополнительно следующие ограничения:

(c) $M(u)$ выпукла на $[0, +\infty)$;

(0) $\lim\limits_{u\to+0}\dfrac{M(u)}{u}=0$;

(Δ_2) существуют постоянные $a>0$, $b>0$ такие, что

$$M(2u)\leqslant bM(u) \text{ при } 0<u\leqslant a.$$

Все рассматриваемые ниже функции $x(t)$ считаются комплексно-значными, периодическими с периодом $T=1$, причем $x(0)=0$. Однако результаты можно распространить и на непериодические функции.

Отметим, что многие определения и обозначения заимствованы нами из [3]. На основании результатов этой же работы доказаны почти все необходимые вспомогательные утверждения.

2. **Класс** V_M. Л. Юнг [5], обобщая определение функции ограниченной p-вариации, введенное Н. Винером [6], рассмотрела класс V_M функций ограниченной M-вариации. Говорят, что функция $x(t)$ принадлежит классу V_M, если

$$V_M(x)\equiv\sup_{\Pi}\sum_{i=1}^{m}M[|x(t_i)-x(t_{i-1})|]<\infty,$$

где $\Pi=\{0=t_0<t_1<\cdots<t_m=1\}$ — произвольное разбиение отрезка $[0,1]$.

2.01. В [3] показано, что для того чтобы класс V_M был линеен (линейность означает, что условие $x_i\in V_M$ $(i=1, 2)$ влечет $x_1+x_2\in V_M$

* Один критерий компактности для пространств AC_M (см. ниже, лемму 3.24) вытекает из результата Г. Е. Шилова [4].

и $cx_i \in V_M$ для любого комплексного c), необходимо и достаточно, чтобы функция $M(u)$ удовлетворяла условию (Δ_2). В наших предположениях условие (Δ_2) выполнено, следовательно, класс V_M линеен.

2.1. **Класс AC_M.** Муселак и Орлич [3], обобщая определение класса V^p Лава [7], рассмотрели класс AC_M таких функций $x(t)$, которые обладают следующим свойством.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует, такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{i=1}^{m} M[|x(\beta_i) - x(\alpha_i)|] < \varepsilon$$

для всякой конечной системы неперекрывающихся интервалов $(\alpha_i, \beta_i) \subset \subset [0, 1]$, если только

$$\sum_{i=1}^{m} M(\beta_i - \alpha_i) < \delta.$$

Если $x \in AC_M$, то говорят, что $x(t)$ абсолютно непрерывна относительно функции $M(u)$. Легко видеть, что $AC_M \subset V_M$, и функции класса AC_M непрерывны.

2.2. **M-модуль непрерывности.** Если $x \in V_M$, то положим

$$\omega_M(\delta, x) = \inf k,$$

где точная нижняя грань распространяется на все числа $k > 0$, удовлетворяющие условию

$$V_M^{\delta}\left(\frac{x}{k}\right) \equiv \sup_{|\Pi| < \delta} \sum_{i=1}^{m} M\left[\frac{|x(t_i) - x(t_{i-1})|}{k}\right] \leqslant 1;$$

($|\Pi| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} (t_i - t_{i-1})$). Величину $\omega_M(\delta, x)$ назовем M-модулем непрерывности функции $x(t)$. Например, при $M(u) = u^p$ $(1 < p < \infty)$ имеем

$$\omega_{u^p}(\delta, x) = \sup_{|\Pi| < \delta} \left\{\sum_{i=1}^{m} |x(t_i) - x(t_{i-1})|^p\right\}^{1/p}.$$

Величину $\omega_{u^p}(\delta, x)$ ввела Л. Юнг [8], а систематически использовал А. П. Терехин [9].

2.3. **Свойства M-модуля непрерывности и определение пространств V_M и AC_M.** Как показали Муселак и Орлич [3] (см. п.п. 3.03, 3.21, 1.01) при наших предположениях относительно функции $M(u)$ величина $\omega_M(1, x)$ является нормой (напомним, что $x(0) = 0$) в линейном классе V_M (AC_M), причем V_M (AC_M) — банахово пространство относительно нормы

$$\|x\|_M = \omega_M(1, x).$$

Подобным же образом можно доказать, что при любом фиксированном $\delta > 0$ величина $\omega_M(\delta, x)$ обладает всеми свойствами нормы, в частности, справедливо неравенство треугольника

$$\omega_M(\delta, x_1 + x_2) \leqslant \omega_M(\delta, x_1) + \omega_M(\delta, x_2).$$

Используя результаты [3] (см. п. 2.11), легко показать, что, в силу (0), условие

$$\lim_{\delta \to +0} \omega_M(\delta, x) = 0$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция x из класса V_M принадлежала AC_M.

2.4. **M'-модуль непрерывности.** Пусть $x_h(t) = x(t+h)$. Положим

$$\omega'_M(\delta, x) = \sup_{0<h<\delta} \|x_h - x\|_M .$$

Назовем эту величину M'-модулем непрерывности функции $x \in V_M$. При наших предположениях относительно функции $M(u)$ условие $\omega'_M(\delta, x) \to 0$ $(\delta \to +0)$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция x класса V_M принадлежала AC_M (см. [3], п. п. 2.41, 3.11).

3. Основные предложения.

3.1. Критерий М. Рисса для пространств AC_M. *Для компактности множества $K \subset AC_M$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия:*

1) $\|x\|_M \leqslant C \quad (x \in K, \ C = C(K))$;

2) $\lim_{\delta \to +0} \sup_{x \in K} \omega_M(\delta, x) = 0.$

3.2. Критерий Колмогорова для пространств AC_M. *Для компактности множества $K \subset AC_M$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия*

1°) $|x(t)| \leqslant C \quad (x \in K, \ C = C(K), -\infty < t < \infty)$;

2°) $\lim_{h \to +0} \sup_{x \in K} \|x - x_h^s\|_M = 0,$

где

$$x_h^s(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} x(\tau)\, d\tau$$

— *функция Стеклова для* $x(t)$*.

Для доказательства теорем 3.1 и 3.2 нам понадобятся леммы 3.21 — 3.24.

3.21. *Пусть $x \in V_M$ и в точках разбиения* $\Pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = 1\}$ *ломаная линия* $x_1(t)$ *совпадает с* $x(t)$, т. е. $x(t_i) = x_1(t_i)$ $(i = 0, 1, \cdots, m)$. *Тогда*

$$\|x - x_1\|_M \leqslant 4\omega_M(|\Pi|, x).$$

Для доказательства заметим, что в работе [3] (см. п. 2.21) фактически доказано неравенство

$$V_M\left(\frac{x - x_1}{4k}\right) \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} V_M\left(\frac{x}{k};\ t_{i-1}, t_i\right),$$

---

* По поводу условия 1°) см. замечание в конце доказательства предложения 3.2.

где $k>0$ — любое, $V_M(x; a, b)$ — M-вариация функции x на $[a,b]$, а M удовлетворяет условиям (0) и (Δ_2) или (0) и (c).

Правда, это неравенство доказано в [3] для случая, когда $x_1(t)$ — ступенчатая функция, непрерывная справа и совпадающая с $x(t)$ в точках разбиения П, однако доказательство без изменений проходит и для нашего случая. Из этого неравенства следует

$$V_M\left(\frac{x-x_1}{4k}\right) \leqslant \frac{1}{2} V_M^{\text{III}}\left(\frac{x}{k}\right).$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы 3.21.

Пусть

$$\varphi_0(t) \equiv 1, \quad \varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(\tau)\, d\tau \quad (n=1, 2, \cdots)$$

для $t \in [0, 1]$, где $\chi_n(t)$ — система Хаара (см. [10], стр. 57). Тогда $\{\varphi_n(t)\}$ — система Шаудера (см. [10], стр. 63).

3.22. *Система Шаудера $\{\varphi_n(t)\}$ является базисом в пространстве AC_M. Более того, если $x \in AC_M$ и*

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, \varphi_k,$$

то

$$\|x - S_n(x)\|_M \leqslant 4\omega_M(\delta_n, x),$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, \varphi_k$, *а* $\delta_0 = \delta_1 = 1$, $\delta_n = 2^{-m}$ *при* $2^m < n \leqslant 2^{m+1}$.

Приступая к доказательству, положим $x \in AC_M$. Тогда $x(t)$ непрерывна, а, поскольку система Шаудера $\{\varphi_n(t)\}$ — базис в пространстве $C[0, 1]$ непрерывных (в частности, периодических с периодом $T=1$) функций на $[0,1]$, то

$$x \overset{C}{=} \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x)\, \varphi_k,$$

причем это представление единственно. Докажем, что этот ряд сходится и по норме пространства AC_M. Пусть $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность всех двоично-рациональных чисел отрезка $[0,1]$, занумерованных следующим образом: $w_0=0$, $w_1=1$, w_n $(n\geqslant 2)$ — точка максимума функции $\varphi_n(t)$ на отрезке $[0,1]$. Тогда

$$S_n(x) \equiv S_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, \varphi_k(t)$$

есть ломаная линия, звенья которой являются хордами кривой $y=x(t)$, а значения параметра t в концевых и угловых точках хорды равны $w_0, w_1, \cdots, w_n$* (см. [10], стр. 63). Поэтому к функции $x - S_n(x)$ можно применить лемму 3.21, чем и завершается доказательство.

* Отметим, что функция $y = x(t)$ и $S_n(t, x)$ комплекснозначны.

Замечание. Отметим, что в силу условия $x(0)=0$ и периодичности $x(t)$ в лемме 3.22 $a_0(x)=a_1(x)=0$ для любой функции $x\in AC_M$.

3.23. *Если $x\in AC_M$, то*

$$\|x-x_h^s\|_M\leqslant\omega_M'(h, x)\quad(h>0),$$

где x_h^s — функция Стеклова для $x(t)$, а $\omega_M'(h, x)$ — M'-модуль непрерывности функции $x(t)$.

Приступая к доказательству, отметим, что в работе [3] (см. п. 2.44) фактически установлено неравенство

$$V_M\left(\frac{x-x_h^s}{k}\right)\leqslant\frac{1}{h}\int_0^h V_M\left(\frac{x-x_\tau}{k}\right)d\tau$$

($k>0$ — любое).

Поэтому существует такое τ_0, что

$$V_M\left(\frac{x-x_h^s}{k}\right)\leqslant V_M\left(\frac{x-x_{\tau_0}}{k}\right)\quad(0\leqslant\tau_0\leqslant h).$$

Из этого неравенства и определения M'-модуля непрерывности вытекает утверждение леммы 3.23.

Следующая лемма вытекает из одного результата Г. Е. Шилова [4] (см. также [11], стр. 262).

3.24. *Для компактности множества $K\subset AC_M$ необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

а) $\|x\|_M\leqslant C\quad(x\in K,\ C=C(K))$;

в) $\lim\limits_{\delta\to+0}\sup\limits_{x\in K}\omega_M'(\delta, x)=0.$

Ссылка на результат Г. Е. Шилова [4] возможна в силу того, что AC_M является однородным банаховым пространством, т. е. из $x\in AC_M$ следует $x_h\in AC_M$, $\|x_h\|_M=\|x\|_M$ при любом h и справедливо равенство $\lim\limits_{h\to0}\|x_h-x\|_M=0$ (см. [3], п.п. 2.41 и 3.11).

3.3. **Доказательство предложения 3.1.** Необходимость доказывается аналогично случаю пространства L_p $(1<p<\infty)$. Итак, пусть множество $K\subset AC_M$ компактно. Тогда в пространстве AC_M для любого $\varepsilon>0$ существует конечная $\varepsilon/2$-сеть $x_1, x_2,\cdots, x_n$ для множества K. А так как $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_M(\delta, x)=0$ для любой функции $x\in AC_M$, то $\omega_M(h, x_i)<\varepsilon/2$ при $0<h<\delta(\varepsilon)$ $(i=1, 2,\cdots, n)$. Наконец, пользуясь неравенством треугольника для M-модулей непрерывности $\omega_M(\delta, x)$ и их монотонностью относительно δ, имеем для любого $x\in AC_M$ и $0<h<$ $<\delta(\varepsilon)$

$$\omega_M(h, x)\leqslant\omega_M(h, x-x_{i_0})+\omega_M(h, x_{i_0})\leqslant$$

$$\leqslant\|x-x_{i_0}\|_M+\omega_M(h, x_{i_0})<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\quad(i_0=i_0(x)).$$

Необходимость условия 2) доказана. Необходимость условия 1) известна.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1) и 2) предложения 3.1. Из условия 2) и леммы 3.22 следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_ε такой, что

$$\|x - S_n(x)\|_{\mathrm{H}} < \varepsilon \quad (n \geqslant n_\varepsilon,\ x \in K),$$

где $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\,\varphi_k$. Отсюда и из условия 1) на основании критерия компактности для пространств с базисом (см., напр., [12], стр. 247), вытекает компактность множества K.

3.4. **Доказательство предложения** 3.2. Необходимость. Пусть множество $K \subset AC_{\mathrm{H}}$ компактно. Тогда $\|x\|_{\mathrm{H}} \leqslant C\ (C = C(K))$ для $x \in K$, откуда и вытекает 1°). Условие 2°) вытекает из лемм 3.23 и 3.24.

Достаточность. Пусть выполнены условия 1°) и 2°). Из условия 2°) следует, что множество $\{x_h^s | x \in K,\ h > 0\}$ является ε-сетью для множества K при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому достаточно доказать, что множество $\{x_h^s | x \in K\}$ компактно при любом фиксированном $h > 0$.

В самом деле, для любого разбиения $\Pi = \{t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_m = 1\}$ на основании условия 1°) имеем для любых $h > 0$ и $k > 0$:

$$\sum_{i=1}^{m} M\left[\frac{|x_h^s(t_i) - x_h^s(t_{i-1})|}{k}\right] \leqslant \sum_{i=1}^{m} M\left[\frac{2C(t_i - t_{i-1})}{hk}\right].$$

Но в силу условия (0) $\lim\limits_{\|\Pi\| \to 0} \sum_{i=1}^{m} M(t_i - t_{i-1}) = 0$, поэтому из предыдущего неравенства следует, что

$$\lim_{\delta \to +0} \sup_{x \in K} \omega_{\mathrm{H}}(\delta, x_h^s) = 0 \quad (h > 0 \text{ фиксировано}).$$

Из этого же самого неравенства вытекает, что

$$\|x_h^s\|_{\mathrm{H}} \leqslant \frac{2C}{h}\|t\|_{\mathrm{H}} < \infty \quad (x \in K).$$

Таким образом, для множества $\{x_h^s | x \in K\}$ ($h > 0$ фиксировано) выполнены условия 1) и 2) теоремы 3.1, поэтому это множество компактно. Теорема 3.2 доказана.

Замечание. Условие 1°) в теореме 3.2 можно заменить условием

1′) $$\|x\|_{\mathrm{H}} < C \quad (x \in K,\ C = C(K)).$$

Это следует из доказательства. Именно условие 1′) вместо 1°) фигурирует в теореме Колмогорова для пространств L_p $(1 < p < \infty)$. Условие 1′) всегда влечет 1°), а обратное неверно. Поэтому теорема 3.2 в смысле достаточности является более сильным утверждением, чем то, которое получится из него, если условие 1°) заменить на 1′).

Московский физико-технический институт

Поступило 15.XII.1967

Բ. Ի. ԳՈԼՈՒԲՈՎ

ԲԱԶՄՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԿՈՄՊԱԿՏՈՒԹՅԱՆ ՍԿԶԲՈՒՆՔՆԵՐԸ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՎԱՐԻԱՑԻԱՅԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՄԵՋ

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցված է Մ. Ռիսսի [1] և Կոլմոգորովի [2] կոմպակտության սկզբունքի անալոգները Օրլիչի — Մուսելակի [3] AC_M տարածության համար։

Այդ նպատակի համար մտցված է ֆունկցիաների M-մոդուլ անընդհատության հասկացողությունը AC_M տարածության մեջ։

Ենթադրվում է, որ $M(u)$ ֆունկցիան բավարարում է հետևյալ պայմաններին

a) $M(0)=0$, $M(u)>0$ *և աճում է երբ* $u>0$.

c) $M(u)$-*ն ուռուցիկ է* $[0, +\infty)$ *տիրույթում.*

0) $\lim\limits_{u\to+0} \frac{M(u)}{u} = 0.$

(Δ_2) *Գոյություն ունեն* $a>0$, $b>0$ *այնպիսի հաստատուններ, որ* $M(2u) \leqslant bM(u)$, *երբ* $0<u\leqslant a$:

B. I. GOLUBOV

THE CRITERIA OF COMPACTNESS OF SETS IN THE SPACES OF FUNCTIONS OF FINITE GENERALIZED VARIATIONS

Summary

In this paper some analoga of criteria of compactness by M. Riesz [1] and by Kolmogoroff [2] in the spaces AC_M of Orlicz-Musielak [3] are proved. To this aim the M-moduli of continuity in the space AC_M is introduced. The function $M(u)$ is assumed to satisfy the following conditions:

(a) $M(0)=0$, $M(u)>0$ and non decreasing for $u>0$;

(c) $M(u)$ is a convex function for $u>0$;

(0) $\lim\limits_{u\to+0} \frac{M(u)}{u} = 0;$

(Δ_2) there exist $a>0$ and $b>0$ such that $M(2u) \leqslant b\,M(u)$ for $0<u\leqslant a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *M. Riesz*. Sur les ensembles compacts de fonctions sommabl'es, Acta Sci. Math., Szeged. 6, 1933, 136—142.
2. *А. Н. Колмогоров*. Über kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel, Nachr, Ges. Wiss. Göttingen, № 1, 1931, 60—63.

3. *J. Musielak, W. Orlicz.* On generalized variations (I), Studia Math., 18, 1959, 11—41.
4. *Г. Е. Шилов.* Критерий компактности в однородном пространстве функций, ДАН СССР, 92, № 1, 1953.
5. *L. C. Young.* Sur une généralisation de la notion de la variation de puissance p-iéme bornée au sens de N. Wiener..., Compt. Rend., 204, 1937, 470—473.
6. *N. Wiener.* The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients, Massachusetts Journ. Math., 3, 1924, 73—94.
7. *E. R. Love.* A generalization of absolute continuity, J. Lond. Math. Soc., 26, 1951, 1—13.
8. *L. C. Loung.* An inequality of the Hölder type, connected with Stiltjes integration, Acta Math., 67, 1936, 251—282.
9. *А. П. Терехин.* Приближение функций ограниченной p-вариации, Изв. высш. учебн. завед. (математика), № 2, 1965, 171—187.
10. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Москва, 1958.
11. *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича, Москва, 1958.
12. *Л. А. Люстерник, В. И. Соболев.* Элементы функционального анализа, Москва, 1965.