ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, №№ 4—5, 1968 Математика

Л. А. ПЕТРОСЯН

ИНВАРИАНТНЫЙ ЦЕНТР ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

Рассматриваемые в настоящей заметке игры представляют собой простое преследование на $n-1$-мерных поверхностях в n-мерном эвклидовом пространстве R^n. Пусть в R^n задана некоторая $n-1$-мерная поверхность S. Преследователь P перемещается по ней, имея возможность в каждый момент изменять направление своего движения. Величина его скорости предполагается постоянной и равной u. Аналогично, преследуемый E перемещается на S, имея возможность в каждый момент времени управлять направлением вектора своей скорости. Скорость E также постоянна и равна v. Предполагаем, что $u > v$. Таким образом, в процессе игры игроки остаются на поверхности S. Если поверхность задается уравнениями

$$z = z_i\,(s_1, \cdots, s_{n-1}),\ i = 1,\ \cdots,\ n, \tag{1}$$

то уравнения движения игроков записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial z_i}{\partial l_k}\, \dot{l}_k(t) = \varphi_i,\ i = 1, \cdots, n \tag{2}$$

для игрока P, и

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\partial z_i}{\partial m_k}\, \dot{m}_k(t) = \psi_i,\ i = 1, \cdots, n \tag{3}$$

для игрока E.

Здесь l и m—координаты игроков P и E на поверхности S, $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ — компоненты скорости игрока P, а $\psi_1, \cdots, \psi_n$ — компоненты скорости игрока E (находящиеся под управлением игроков).

Игра имеет предписанную заранее продолжительность T, информация полная, целью игрока P является минимизация расстояния (по поверхности) между ним и игроком E к моменту окончания игры. Игрок E преследует противоположную цель. Как обычно, под стратегией игрока $P(E)$ будет пониматься любая функция $\varphi(l, s, t)$ $(\psi(l, s, t))$, удовлетворяющая условию

$$\sum_{l=1}^{n} \varphi_l^2(l,\ s,\ t) = u^2 \left(\sum_{l=1}^{n} \psi_l^2(l,\ s,\ t) = v^2 \right) \tag{4}$$

и такая, что любая ситуация (φ, ψ) и начальные условия l_0, s_0 однозначно определяют траектории игроков в игре. Полученную таким образом игру преследования мы будем обозначать через $\Gamma(l_0, s_0, T)$. Прежде чем перейти к непосредственному изложению результатов нам понадобятся некоторые определения и теорема. Доказательство теоремы приводить здесь не будем, поскольку оно изложено в [1].

Определение 1. Множество точек $C_P^T(l)$, в которые может попасть игрок P в момент времени T, используя свои всевозможные стратегии, из точки l, называется множеством достижимости преследователя P (понятие множества достижимости впервые использовалось в дифференциальных играх в [2]).

Аналогичным образом определяется множество достижимости преследуемого E, $C_E^T(m)$.

Множество достижимости мы будем предполагать замкнутым.

Для любой пары точек $l,\ m \in S$ определим функцию $\hat{\rho}_T(l,\ m)$ следующим образом:

$$\hat{\rho}_T(l,\ m) = \max_{\eta \in C_E^T(l)} \min_{\xi \in C_P^T(m)} \rho(\xi, \eta), \tag{5}$$

где $\rho(l,\ m)$ — расстояние между точками $l,\ m$ по поверхности.

Определение 2. Пусть

$$\hat{\rho}_T(l,\ m) = \rho(\xi, \eta).$$

Любая траектория $l^*(t)$, соединяющая точки l и ξ так, что $l^*(0) = e$ и $l^*(T) = \xi$, называется условно оптимальной траекторией преследователя P. Любая траектория $m^*(t)$, соединяющая точки m и η так, что $m^*(0) = 0$ и $m^*(T) = \eta$, называется условно оптимальной траекторией преследуемого E.

Определение 3. Точка M называется центром преследования в игре $\Gamma(l,\ s,\ T)$, если

$$\hat{\rho}_T(l,\ s) = \rho(\xi, M). \tag{6}$$

Центр преследования называется инвариантным, если он один и тот же во всех играх преследования

$$\Gamma(l^*(t),\ m^*(t),\ T - t),$$

где $l^*(t)$, $m^*(t)$ — любая пара условно оптимальных траекторий, выходящих из точек $l, m \in S$.

Теорема. *Пусть в игре $\Gamma(l,\ m,\ T)$ существует единственный инвариантный центр преследования M, и пусть $\hat{\rho}_T(l,\ m) > 0$, тогда условно оптимальные траектории игры являются оптимальными и значение игры равно $\hat{\rho}_T(l,\ m)$.*

Определим „регулярный кусок" $\bar{S}$ поверхности S следующим образом. Область $\bar{S}$ на поверхности S называется регулярным куском поверхности S, если

1. Через любые две точки $z_1\ z_2 \in \bar{S}$ можно провести кратчайшую линию.

2. Любые две различные кратчайшие, лежащие в $\bar{S}$, пересекаются в $\bar{S}$ самое большее в одной точке.

3. Никакая точка $z \in \overline{S}$ не может быть концом кратчайшей (то есть отрезок кратчайшей, соединяющий две любые точки на поверхности продолжим в обе стороны)*.

Игру $\Gamma(l, m, T)$ мы будем называть регулярной, если объединение $C_P^T(l) \cup C_E^T(m)$ областей достижимости игроков содержится в некотором регулярном куске поверхности $\overline{S}$.

Лемма 1. *Пусть l и m—начальные местоположения игроков P и E. Рассмотрим отрезок кратчайшей, соединяющей точки l и m. Продолжим его на расстояние vT от точки m**. Пусть M_1—точка, расположенная на этом отрезке на расстоянии vT от точки m. Тогда в регулярной игре точка M_1 является центром преследования, и всякий центр преследования может быть получен таким образом.*

Доказательство. Заметим, что, ввиду предположенной регулярности игры и условия 3 на „регулярный кусок" поверхности, отрезок кратчайшей $[l, m]$ продолжим на расстояние vT, следовательно, указанная в лемме точка M_1 действительно существует. Предположим теперь, что центр преследования M отличен от точки M_1, тогда, поскольку $M \in C_E^T(m)$

$$\rho(m, M) \leqslant \rho(m, M_1) = vT, \tag{7}$$

кроме того

$$l(l, m) \leqslant \rho(l, m) + \rho(m, M), \tag{8}$$

$$\rho(l, M) \leqslant \rho(l, m) + \rho(m, M_1) = \rho(l, M_1) \tag{9}$$

(так как M_1 находится на кратчайшей, соединяющей точки l и m). Однако

$$\min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M) = \rho(l, M) - uT$$

и

$$\min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M_1) = \rho(l, M_1) - uT. \tag{10}$$

Следовательно, из (9) получаем

$$\min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M) < \min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, M_1) \leqslant \max_{\eta \in C_E^T(m)} \min_{\xi \in C_P^T(l)} \rho(\xi, \eta),$$

а это противоречит тому, что точка M является центром преследования. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Центр преследования в игре $\Gamma(l, m, T)$ единственен (при условии регулярности игры).*

Доказательство немедленно следует из того, что игра регулярна, и леммы 1, так как согласно лемме 1 центр преследования распо-

---

* Условиям 1—3 удовлетворяют регулярные (в обычном смысле), геодезически выпуклые поверхности (см., например, [5]).

** Продолжение понимается в том смысле, что новый, „продолженный", отрезок является отрезком кратчайшей, проходящим через l и m.

ложен на кратчайшей, соединяющей точки l и m на расстоянии vT от точки m. Если бы существовало два центра преследования, то кратчайшие, соединяющие их с точкой l совпадали бы на отрезке $[l, m]$, однако это противоречит условию 2 регулярности.

Лемма 3. *Центр преследования в игре* $\Gamma(l, m, T)$ *инвариантен (при условии регулярности игры).*

Доказательство. Пусть $l^*(t)$, $m^*(t)$ — условно-оптимальные траектории в игре $\Gamma(l, s, T)$. Из леммы 1 имеем, что они предписывают движение игроков P и E по кратчайшей, проходящей через точки l и m. Используя повторно лемму 1, получаем, что центр преследования в играх $\Gamma(l^*(t), m^*(t), T-t)$ при всех $0 \leqslant t < T$ совпадает с точкой M_1, которая представляет собой центр преследования в игре $\Gamma(l, m, T)$.

Теорема об инвариантном центре преследования и леммы 1, 2, 3 дают возможность сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Регулярная игра* $\Gamma(l, m, T)$ *(если* $\hat{\rho}_T(l, m) > 0$*) имеет ситуацию равновесия в чистых стратегиях, при этом оптимальная стратегия игрока* P *заключается в каждый момент времени в выборе направления отрезка кратчайшей, соединяющей его местоположение и местоположение игрока* E *в этот момент времени. Значение игры равно* $\hat{\rho}_T(l, m)$.

Пример. Простое преследование на сфере.

Рассмотрим преследование на куске трехмерной сферы, который обладает описанным выше свойством регулярности. Кратчайшие, соединяющие две любые точки сферы, представляют собой отрезки окружности большого круга. Кинематические уравнения в полярных координатах записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -r \sin l_1 \sin l_2 \varphi_2 + r \cos l_1 \cos l_2 \varphi_1, \\ \dot{x}_2 &= r \sin l_1 \cos l_2 \varphi_2 + r \cos l_1 \sin l_2 \varphi_2, \\ \dot{x}_3 &= -r \sin l_1 \varphi_2 \end{aligned} \tag{11}$$

для игрока P и

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -r \sin m_1 \sin m_2 \psi_2 + r \cos m_1 \cos m_2 \psi_1, \\ \dot{y}_2 &= r \sin m_1 \cos m_2 \psi_2 + r \cos m_1 \sin m_2 \psi_1, \\ \dot{y}_3 &= -r \sin m_1 \psi_2 \end{aligned} \tag{12}$$

— для игрока E.

Условие постоянства величины скорости (простое движение) накладывает на управляющие переменные φ_1, φ_2 и ψ_1, ψ_2 игроков P и E следующие ограничения:

$$r^2(\varphi_1^2 + \sin^2 l_1 \varphi_2^2) = u^2, \tag{13}$$

$$\psi_1^2 + \sin^2 m_1 \psi_2^2 = v^2. \tag{14}$$

Поскольку функция значения игры теперь зависит только от координат l, m и T, то переменные l, m, T оказываются позиционными и вместо уравнений движения (2), (3) оказывается достаточным рассмотреть уравнения движения

$$\dot{l}_1 = \varphi_1(l,\ m,\ T),$$
$$\dot{l}_2 = \varphi_2\ (l,\ m,\ T) \qquad (15)$$

для P и

$$\dot{m}_1 = \psi_1\ (l,\ m,\ T),$$
$$\dot{m}_2 = \psi_2\ (l,\ m,\ T) \qquad (16)$$

— для E, описывающие изменение координат на поверхности (теперь уже позиционных переменных) в процессе игры. При этом, конечно, условия (13) и (14) на управляющие переменные сохраняются.

Можно сделать еще одно упрощение, рассматривать игру Γ (l, m, T) в редуцированном пространстве. Для этого перенесем игрока P в точку на сфере с координатами (0, 0). Тогда координаты m_1, m_2 будут обозначать относительное местоположение игрока E относительно P. Кинематические уравнения (15) — (16) перепишутся в редуцированном пространстве в виде

$$\dot{m}_1 = \psi_1 + \varphi_1,$$
$$\dot{m}_2 = \psi_2 + \varphi_2, \qquad (17)$$

где управляющие переменные подчиняются ограничениям

$$\varphi_1^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2, \qquad (18)$$

$$\psi_1^2 + \sin^2\ m_1\psi_2^2 = v^2. \qquad (19)$$

Длина кратчайшей, соединяющей точки P и E, равна rm_1. Значение игры $V(m,\ T)$, которое определяется с использованием последней теоремы, равно

$$\hat{\rho}_T(l,\ m) = V\,(m,\ T) = rm_1 + vT - uT. \qquad (*)$$

Разумеется, что решение игры справедливо только на „регулярных" кусках сферы. Покажем, что полученная функция значения игры удовлетворяет уравнению Айзекса — Беллмана (см. [3], [4]) (заметим, что непосредственное интегрирование уравнения Айзекса — Беллмана представляет значительные трудности).

Первая форма уравнения Айзекса — Беллмана записывается в виде

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \min_{\varphi}\ \max_{\psi}\ \left[\frac{\partial V}{\partial m_1}\ (\psi_1 + \varphi_1) + \frac{\partial V}{\partial m_2}\ (\psi_2 + \varphi_2)\right], \qquad (20)$$

где минимакс берется при условиях

$$\varphi_1^2 = \left(\frac{u}{r}\right)^2,\quad \psi_1^2 + \sin^2 m_1\psi_2^2 = v^2 \qquad (21)$$

при начальном условии

$$V(m, 0) = rm_1. \tag{22}$$

Находя φ^* и ψ^*, доставляющие минимакс в (20) и подставляя их вместо φ и ψ в (20), получаем вторую форму основного уравнения

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \frac{\left(\frac{v}{r}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial m_1}\right)^2 + \left(\frac{v}{r}\right)\frac{1}{\sin m_1}\left(\frac{\partial V}{\partial m_2}\right)^2}{\sqrt{\left(\frac{v}{r}\right)^2\left(\frac{\partial V}{\partial m_1}\right)^2 + \frac{v}{r\sin m_1}\left(\frac{\partial V}{\partial m_2}\right)^2}} - \frac{u}{r}\frac{\partial V}{\partial m_1} \tag{23}$$

при начальном условии

$$V(m, 0) = rm_1.$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что функция (*) удовлетворяет уравнению (21) и начальному условию.

Подкоренное выражение в (21) обращается в нуль при $m_1 = \pi$, то есть при $m_1 = \pi$ мы получаем сингулярную поверхность. Этот случай соответствует начальным местоположениям игроков в двух диаметрально противоположных точках окружности большого круга, что в нашем случае означает нарушение условия регулярности.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило 7.XII.1967.

Լ. Ա. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՀԵՏԱՊՆԴՄԱՆ ԻՆՎԱՐԻԱՆՏ ԿԵՆՏՐՈՆԸ ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ԽԱՂԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ներկա հոդվածում ապացուցվում է հետապնդման ինվարիանտ կենտրոնի գոյությունը n—1-չափանի ռեգուլյար մակերևույթների վրա դիտարկվող հետապնդման խաղերում։

Այդպիսինի գոյությունից բխում է խաղի արժեքի ֆունկցիայի և երկու խաղացողների օպտիմալ ստրատեգիայի գոյությունը։

Հավելվածում տրվում է սֆերայի վրա հետապնդման խնդրի լրիվ լուծումը։

L. A. PETROSIAN

INVARIANT CENTER OF PERSUIT IN A CLASS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL GAMES

S u m m a r y

In this paper we prove the existence of an invariant center of persuit on n—1-dimentional regular surfaces. The existence of such a center implies the existence of the value function and of optimal pure

strategies for both players. In addition the complete solution of spherical pursuit is given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Петросян.* Об одном инварианте в дифференциальных играх преследования, Вестник ЛГУ, № 1, 1968.
2. *Н. Н. Красовский, Ю. М. Репин, В. Е. Третьяков.* О некоторых игровых ситуациях в теории управляемых систем, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, № 4, 1965.
3. *Р. Айзекс.* Дифференциальные игры, Изд. „Мир", 1967.
4. *Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко.* Математическая теория оптимальных процессов, ФМ, М., 1961.
5. *В. Бляшке.* Введение в дифференциальную геометрию, ТТЛ, М., 1967.