Р. Л. ШАХБАГЯН

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В последнее время появился ряд работ (см. [1], [2]), посвященных построению алгебры, так называемых, псевдодифференциальных операторов, рассматриваемых в евклидовом пространстве R^n . Эта алгебра содержит в себе как дифференциальные операторы с частными производными, так и сингулярные интегральные операторы.

Далее, в цикле работ М. И. Вишика и Г. И. Эскина (см. [3], там же приведены дальнейшие ссылки) развита теория псевдодифференциальных операторов на компактных многообразиях с краем.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости и гладкости некоторых классов псевдодифференциальных операторов в полупространстве.

В § 1 приводятся основные сведения и определения, относящиеся к рассматриваемому классу псевдодифференциальных операторов, а также вводятся классы функциональных пространств, естественно связанных с рассматриваемыми операторами.

В § 2 выделяется некоторый класс псевдодифференциальных операторов, обладающих свойством гладкости в полупространстве.

Третий параграф посвящен построению регуляризатора однородной краевой задачи в полупространстве для псевдодифференциальных операторов, порожденных эллиптическими символами.

§ 1. Определения и обозначения. Функциональные пространства

1°. В пространстве $R_x^n \times \{R_\xi^n/0\}$ рассмотрим функцию $a(x, \xi)$ ($x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$), удовлетворяющую следующим условиям:

1) $a(x, \xi)$ — положительно определенная функция относительно ξ , при всех $x \in R^n$, степени α (α — вещественное число), т. е.

$$a(x, t\xi) = t^\alpha a(x, \xi), \quad t > 0, \quad x \in R^n, \quad (1.1)$$

$a(x, \xi) \in C^\infty(R_x^n)$ при всех $\xi \in R_\xi^n/0$;

2) существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} a(x, \xi) = a(\infty, \xi)$, причем $a'(x, \xi) = a(x, \xi) - a(\infty, \xi)$ принадлежит пространству S_x функций, убывающих при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|x|$ равномерно относительно ξ^* .

* Подробнее определение пространства S см., например, [5].

Класс символов $a(x, \xi)$, удовлетворяющих условиям 1), 2), обозначим через O_2 .

Через $\bar{u}(\xi)$ (или иногда $Fu(\xi)$) будем обозначать преобразование Фурье функции $u(x)$

$$\bar{u}(\xi) = Fu(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-i(x, \xi)} u(x) dx,$$

где $(x, \xi) = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$.

Требование однородности (1.1) несущественно, его можно заменить более общим условием, налагаемым на рост символа $a(x, \xi)$ при $|\xi| \rightarrow \infty$, именно

$$|a(x, \xi)| \leq C (1 + |\xi|)^\alpha, \quad x \in R^n, \quad (1.1')$$

где C — постоянная.

Как известно [1], псевдодифференциальным оператором, определенном во всем пространстве и канонически построенном по символу $a(x, \xi)$, называется оператор

$$Au = F_{\xi \rightarrow x}^{-1} a(x, \xi) F_{x \rightarrow \xi} u = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} \zeta(\xi) a(x, \xi) \bar{u}(\xi) d\xi, \quad (1.2)$$

где $\zeta(\xi)$ — бесконечно гладкая функция, равная нулю в некоторой окрестности $\xi = 0$ и равная единице вне несколько более широкой окрестности нуля. Функция $\zeta(\xi)$ введена с целью погасить возможную особенность в нуле символа $a(x, \xi)$. При $\alpha > 0$ можно считать в (1.2) $\zeta(\xi) \equiv 1$. Число α называется степенью оператора A . Найдем преобразование Фурье оператора A :

$$\bar{A}u(\xi) = \zeta(\xi) a(\infty, \xi) \bar{u}(\xi) + (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \zeta(\eta) \bar{a}'(\xi - \eta, \eta) \bar{u}(\eta) d\eta, \quad (1.2')$$

где $\bar{a}'(\tau, \eta) = F_{x \rightarrow \tau} a'(x, \eta)$.

В [1] установлено, что оператор A , рассматриваемый на пространстве $H_s(R^n)$ (s — любое вещественное число), является гладким оператором, то есть A ограниченным образом действует из пространства H_s в $H_{s-\alpha}$, причем истинный порядок оператора A $\text{ord } A = \alpha$.

2°. Введем в рассмотрение ряд функциональных пространств. Под $\bar{R}_+^n$ ($\bar{R}_-^n$) будем понимать замкнутое подпространство пространства R^n точек $\{x; x_n \geq 0\}$ ($\{x; x_n \leq 0\}$)*, а R_+^n (R_-^n) — соответствующее открытое полупространство.

Для произвольного вещественного s через $\bar{H}_s^+ = \bar{H}_s^+(R_+^n)$ обозначим подпространство пространства H_s , состоящее из функций, носи-

* Мы следуем обозначениям, введенным в [4].

тели которых сосредоточены в $\bar{R}_+^n$, то есть тождественно равных нулю в R_-^n . Пространство $\dot{H}_s^- = \dot{H}_s^-(R_-^n)$ определяется аналогично. Образ Фурье пространства $\dot{H}_s^+$ обозначается через $\bar{H}_s^+$.

Через θ^+ обозначим оператор умножения на функцию Хевисайда

$$\theta(x_n) = \begin{cases} 1, & \text{при } x_n > 0, \\ 0, & \text{при } x_n < 0 \end{cases} \text{ а через}$$

Π^+ — преобразование Фурье оператора умножения на $\theta(x_n)$:

$$\Pi^+ \bar{f}(\xi', \xi_n) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{f}(\xi', \eta_n)}{\xi_n + i0 - \eta_n} d\eta_n, \quad (1.3)$$

где $\xi' = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})$, а интеграл в правой части (1.3) понимается в смысле главного значения по Коши.

Можно доказать (см. [4]), что оператор Π^+ , задаваемый формулой (1.3), действует ограниченным образом в пространстве $\bar{H}_s$ при $|\delta| < \frac{1}{2}$, причем $\Pi^+ \bar{H}_s = \bar{H}_s^+$.

Нам понадобится пространство $H_s(R_+^n)$ функций, являющихся сужениями функций из $H_s(R^n)$. Как хорошо известно [6], в пространстве $H_s(R_+^n)$ можно ввести норму по формуле

$$\|f\|_{H_s(R_+^n)} = \|f\|_s^+ = \|\Pi^+ (\xi_- - i)^s \bar{f}(\xi)\|_0, \quad (1.4)$$

где $\xi_- = \xi_n - i|\xi'|$, $|\xi'| = \left(\sum_{i=1}^{n-1} \xi_i^2\right)^{1/2}$, $\bar{f} \in H_s(R^n)$ — произвольное l — продолжение функции $f(x)$, определенной на R_+^n ; $\|\cdot\|_0$ — норма в $H_0(R^n) = L_2(R^n)$.

Введем в рассмотрение оператор проектирования P^+ , определяемый как сужение функции $f(x) \in H_s(R^n)$ на R_+^n ; по определению $P^+ H_s(R^n) = H_s(R_+^n)$.

Наконец, нам понадобится шкала пространств H_s^+ ($s \geq 1/2$), состоящих из функций $f_+(x) \in H_0^+$ таких, что $f_+(x) \in H_s(R_+^n)$ на R_+^n . При $s < \frac{1}{2}$, по определению, $H_s^+ = \dot{H}_s^+$. Норму в пространстве H_s^+ ($s > 0$)

введем по формуле (1.4), в качестве lf можно взять, например, $f_+ \in H_s^+$. При $s < 0$ с помощью формулы (1.4) можно также задать норму в пространстве H_s^+ , расширив область определения оператора Π^+ (см. [4]).

3°. Определение псевдодифференциального оператора в R_+^n . Псевдодифференциальным оператором в пространстве R_+^n назовем оператор вида

* Подробнее об операторе Π^+ см. [4].

$$P^+ Au_+ = (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} \zeta(\xi) a(x, \xi) \tilde{u}_+(\xi) d\xi, \quad (1.5)$$

где $u_+ \in S$.

§ 2. Гладкие псевдодифференциальные операторы в R^n

1°. Введем в рассмотрение класс символов, обеспечивающих гладкость порожденных ими операторов, то есть сформулируем условия на символы $a(x, \xi)$, при которых $P^+ Au_+$ принадлежит $H_{s-a}(R^n_+)$, если $u_+ \in H^+_s$.

Пусть символ $a(x, \xi) \in O_a$ удовлетворяет следующему условию гладкости (см. [4]):

с) При каждом $x \in R^n$ имеет место представление

$$\xi^s_- a(x, \xi) = a_-(x, \xi) + R(x, \xi), \quad (2.1)$$

где $a_-(x, \xi) \in O_{a+s}$ допускает аналитическое продолжение по ξ_n в полуплоскость $\text{Im } \xi_n < 0$ при каждом x и ξ' . (Класс функций $a_-(x, \xi)$, удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим через O_{a+s}^- ; аналогично можно определить класс O_a^+ , заменив $\text{Im } \xi_n < 0$ на $\text{Im } \xi_n > 0$).

При любом $p > 0$ имеет место оценка

$$|D_x^p (a_-(x, \xi))| \leq C_p (1 + |\xi|)^{a+s}; \quad (2.2)$$

функция $R(x, \xi)$ удовлетворяет условию 2) п° 1, § 1 и для нее справедлива оценка

$$|D_x^p R(x, \xi)| \leq C_p \frac{(1 + |\xi'|)^{s+a+1}}{1 + |\xi'| + |\xi_n|} \quad (2.3)$$

при любом $p > 0$.

В случае, если символ $a(x, \xi)$ имеет неинтегрируемую особенность, регуляризации интеграла (1.5) можно добиться, взяв

$$\zeta(\xi) = \frac{\xi_n^M}{(\xi_n - i)^M},$$

где $M > 0$ — целое, достаточно большое число.

Тогда легко убедиться, что символ оператора $A a_1(x, \xi) = \zeta(\xi) a(x, \xi)$ также удовлетворяет условиям типа (2.1)–(2.3).

Теорема 1 (о гладкости). Пусть символ $a(x, \xi) \in O_a$ оператора A , заданного формулой (1.5), удовлетворяет условию с). Тогда при любом s имеет место оценка

$$\|P^+ Au_+\|_{H^+_s} \leq C \|u_+\|_s^+ \quad (2.4)$$

для любой функции $u_+ \in H^+_s$; C — постоянная, не зависящая от u_+ .

Доказательство. Перепишем (1.5) в следующем виде:

$$P^+ Au_+ = (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} a_1(\infty, \xi) \tilde{u}_+(\xi) d\xi +$$

$$+ (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} a_1'(x, \xi) \bar{u}_+(\xi) d\xi, \quad (1.5')$$

где $a_1(\infty, \xi) = \zeta(\xi) a(\infty, \xi)$, $a_1'(x, \xi) = a_1(x, \xi) - a_1(\infty, \xi)$.

Справедливость оценки (2.4) для оператора с постоянным символом $a_1(\infty, \xi)$ установлена в [4].

Таким образом, теорема будет доказана, если мы получим оценку (2.4) для оператора

$$P^+ A_1 u_+ = (2\pi)^{-n/2} P^+ \int_{R^n} e^{i(x, \xi)} a_1'(x, \xi) \bar{u}_+(\xi) d\xi. \quad (2.5)$$

Пусть $u_+ \in H_r^+$, а lu — произвольное l — продолжение функции u_+ на все пространство такое, что $\|lu\|_s \leq C_1 \|u_+\|_s^+$, где постоянная C_1 не зависит от u_+ .

Преобразование Фурье оператора A_1 , согласно (1.2'), имеет вид

$$\bar{A}_1 \bar{lu}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \tilde{a}_1(\xi - \eta, \eta) \bar{lu}(\eta) d\eta. \quad (2.6)$$

Оценим

$$\begin{aligned} \|P^+ A_1 u_+\|_{s-\alpha}^+ &= \|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-\alpha} \bar{A}_1 \bar{u}_+\|_0 \leq \\ &\leq \|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-\alpha} \bar{A}_1 \bar{lu}\|_0 + \|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-\alpha} \bar{A}_1 \bar{u}_-\|_0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Первое слагаемое правой части неравенства (2.7) оценивается элементарно

$$\|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-\alpha} \bar{A}_1 \bar{lu}\|_0 \leq \|(\xi_- - i)^{s-\alpha} \bar{A}_1 \bar{lu}\|_0 \leq C_2 \|lu\|_s \leq C_3 \|u_+\|_s^+. \quad (2.8)$$

При выводе оценки (2.8) мы воспользовались ограниченностью оператора Π^+ в пространстве $H_0(R^n)$ и гладкостью оператора A_1 во всем пространстве.

Заметим далее, что функции $\tilde{f}_-(\xi', \xi_n) \in O_s^-$ входят в ядро оператора Π^+ , то есть $\Pi^+ \tilde{f}_-(\xi', \xi_n) = 0$. Используя разложение (2.1) и учитывая сделанное замечание, оценим второе слагаемое правой части (2.7). Имеем

$$\|\Pi^+(\xi_- - i)^{s-\alpha} \bar{A}_1 u_-(\xi)\|_0 \leq C_4 \left\| \Pi^+ \int_{R^n} (\xi_- - i)^{s-\alpha} \tilde{R}'(\xi - \eta, \eta) \bar{u}_-(\eta) d\eta \right\|_0, \quad (2.9)$$

где $\tilde{R}'(\tau, \eta) = F_{x \rightarrow \tau} R'(x, \eta)$, $R'(x, \eta) = R(x, \eta) - R(\infty, \eta)$, и $\tilde{R}'(\tau, \eta)$ удовлетворяет неравенству

$$|(1 + |\tau|^2)^p \tilde{R}'(\tau, \eta)| \leq C_p \frac{(1 + |\eta'|)^{s+\alpha+1}}{1 + |\eta'| + |\eta_n|},$$

$p \geq 0$ — произвольное число.

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 |(\xi_- - i)^{s-\alpha} \tilde{R}'(\xi_-, \eta) \bar{u}_-(\eta)| &= \frac{|\xi_- - i|^{s-\alpha} |\eta_- - i|^{s-\alpha} |\tilde{R}'(\xi_-, \eta)| |\bar{u}_-(\eta)|}{|\eta_- - i|^{s-\alpha}} \ll \\
 &\ll C_p \frac{|\xi_- - i|^{s-\alpha}}{|\eta_- - i|^{s-\alpha}} \cdot \frac{(1 + |\eta'|)^{s+1} |\bar{u}_-(\eta)|}{(1 + |\xi_- - \eta|^2)^p (1 + |\eta'| + |\eta_n|)}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 &\left| (\xi_- - i)^{s-\alpha} \int_{R^n} \tilde{R}'(\xi_-, \eta) \bar{u}_-(\eta) d\eta \right| \ll \\
 &< C_p \int_{R^n} \frac{1}{(1 + |\xi_- - \eta|^2)^{\frac{n+1}{2}}} (1 + |\eta'|)^s |\bar{u}_-(\eta)| d\eta, \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

где положено $p = \frac{n+1}{2} + \frac{|s-\alpha|}{2}$. Подставляя (2.11) в (2.9) и используя ограниченность оператора Π^+ в $H_0(R^n)$, получим

$$\begin{aligned}
 \|\Pi^+ (\xi_- - i)^{s-\alpha} \tilde{A}_1 \bar{u}_-(\xi)\|_0 &\ll C_5 \|(1 + |\eta'|^2)^{s/2} u_-(\eta')\|_0 \ll \\
 &\ll C_6 \|(1 + |\eta'|^2)^{s/2} \bar{u}_-\|_0 \ll C_7 \|u\|_s \ll C_8 \|u_+\|_s^+. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

При выводе неравенства (2.10) мы воспользовались тем фактом, что свертка пространств $L_1(R^n)$ и $H_0(R^n)$ принадлежит $H_0(R^n)$, то есть, если $a(x) \in L_1(R^n)$, $b(x) \in H_0(R^n)$, то

$$\|a(x) * b(x)\|_0 \ll \|a(x)\|_{L_1(R^n)} \|b(x)\|_0.$$

Из неравенств (2.8) и (2.12) вытекает оценка (2.4). Теорема доказана.

§ 3. Построение регуляризатора

1°. Целью настоящего параграфа является доказательство существования регуляризатора однородной краевой задачи в полупространстве для псевдодифференциальных операторов, порожденных классом, так называемых, эллиптических символов.

Определение. Символ $a(x, \xi)$ называется эллиптическим, если

$$a(x, \xi) \neq 0, \quad x \in R^n, \quad \xi \neq 0 \quad (3.1)$$

(ξ вещественно).

Пусть символ $a(x, \xi) \in O_{\alpha}^*$ имеет при $\xi' \neq 0$ первые производные по ξ , ограниченные при $|\xi| = 1, x \in R^n$. Класс таких символов обозначим через O_{α}^+ . Пусть далее $a(x, \xi)$ удовлетворяет условию эллиптичности (3.1). Тогда, как доказано в [4], справедливо представление

$$a(x, \xi', \xi_n) = a_+(x, \xi', \xi_n) a_-(x, \xi', \xi_n)^*, \quad (3.2)$$

где $a_+(x, \xi', \xi_n) \in O_{\alpha}^{1+}$ и $a_+(x, \xi', \xi_n) \neq 0$

* Факторизация (3.2) имеет место на самом деле при более слабых предположениях.

при $x \in R^n$, $\xi \neq 0$, $\text{Im } \xi_n > 0$,

$$a_-(x, \xi', \xi_n) \in O_{\xi_n}^{l-\alpha} \text{ и } a_-(x, \xi', \xi_n) \neq 0$$

при $x \in R^n$, $\xi \neq 0$, $\text{Im } \xi_n \leq 0$, α — индекс факторизации. Предполагается, что α — целое неотрицательное число.

Предположим далее, что функция $a_+(x, \xi)$ удовлетворяет условию гладкости с) (условие с) для нее заведомо выполняется, если предположить, что $a_+(x, \xi)$ продолжается по ξ_n в полуплоскость $\text{Im } \xi_n \leq 0$ вне полукруга $|\xi_n| \leq l|\xi'|$, где $l > 0$ не зависит от ξ' и ξ_n , причем такое продолжение дает однозначную аналитическую функцию в окрестности бесконечно удаленной точки). В силу эллиптичности символа $a(x, \xi)$ легко убедиться в том, что оператор, канонически построенный по символу $a_+^{-1}(x, \xi)$, также гладкий). Это обстоятельство будет нами использовано при построении регуляризатора.

2°. В полупространстве R_+^n рассмотрим уравнение вида

$$P^+ A u_+ = f_+(x), \quad (3.3)$$

где A — псевдодифференциальный оператор, канонически построенный по символу $a(x, \xi)$. Пусть $a(x, \xi)$ удовлетворяет условиям, сформулированным в предыдущем пункте.

Решение $u_+(x)$ уравнения (3.3) ищется в пространстве $\dot{H}_x^+ \cap H_s^+$, где α — индекс факторизации символа $a(x, \xi)$:

$$u_+(x) \in \dot{H}_x^+ \cap H_s^+; \quad (3.4)$$

$f_+(x)$ предполагается принадлежащей пространству $H_{s-\alpha}(R_+^n)$.

Введем в рассмотрение оператор

$$R f_+ = A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} l f, \quad (3.5)$$

где A_+^{-1} и A_-^{-1} — операторы, канонически построенные по символам $a_+^{-1}(x, \xi)$ и $a_-^{-1}(x, \xi)$ соответственно*; $l f$ — продолжение функции $f_+(x) \in H_{s-\alpha}(R_+^n)$ на все пространство; через $\circ$ обозначена операция композиции.

Мы докажем, что оператор R , задаваемый формулой (3.5), является левым и правым регуляризатором задачи (3.3), (3.4). Иными словами, нам необходимо установить, что оператор R ограниченным образом действует из пространства $H_{s-\alpha}(R_+^n)$ в пространство $\dot{H}_x^+ \cap H_s^+$, то есть

$$\|R f_+\|_s^+ \leq C \|f_+\|_{s-\alpha}^+, \quad (3.6)$$

где C — постоянная, не зависящая от f_+ . Далее следует убедиться в существовании псевдодифференциальных операторов T_1 и T_2 таких, что

* В случае, если порядок однородности функции a_+^{-1} или a_-^{-1} отрицательный, необходима регуляризация, которой, как и выше, можно достичь домножением соответствующего символа на функцию $\zeta(\xi)$.

$$R \circ P^+ A u_+ = (E + P^+ T_1) u_+, \quad (3.7)$$

$$P^+ A \circ R f_+ = (E + P^+ T_2) f_+, \quad (3.8)$$

где T_1 и T_2 — операторы порядка не выше -1 , точнее

$$\|P^+ T_1 u_+\|_s^+ \leq C_1 \|u_+\|_{s-1}^+, \quad (3.9)$$

$$\|P^+ T_2 f_+\|_{s-\alpha}^+ \leq C_2 \|f_+\|_{s-\alpha-1}^+, \quad (3.10)$$

константы C_1 и C_2 , участвующие в оценках (3.9), (3.10), не зависят от u_+ и f_+ соответственно.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, касающееся композиции псевдодифференциальных операторов.

Теорема о композиции. Пусть A и B — псевдодифференциальные операторы, символы которых $a(x, \xi)$ и $b(x, \xi)$ принадлежат, соответственно, классам O_α^1 и O_β^1 .

Тогда справедливо представление

$$A \circ B u = C u + T u, \quad (3.11)$$

где C — оператор, канонически построенный по произведению $a(x, \xi) \times b(x, \xi)$ символов, а T — оператор порядка $\leq \alpha + \beta - 1$, то есть

$$\|T u\|_{s-(\alpha+\beta-1)} \leq \text{const} \|u\|_s, \quad (3.12)$$

для любого вещественного s^* .

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в [1].

Из теоремы о композиции и свойстве гладкости операторов A_+^{-1} и A_-^{-1} в полупространстве очевидным образом следует ограниченность оператора $R: H_{s-\alpha}(R_+) \rightarrow \dot{H}_s^+ \cap H_s^+$, то есть оценка (3.6).

Обратимся к доказательству представлений (3.7) и (3.8). Имеем согласно (3.5), (3.2) и (3.11)

$$\begin{aligned} R \circ P^+ A u_+ &= A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} \circ P^+ A u_+ = \\ &= A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} \circ A u_+ = A_+^{-1} \circ (\theta^+ A_+ + \theta^+ T_1) u_+ = \\ &= u_+ + \theta^+ T_2 u_+ + A_+^{-1} \circ \theta^+ T_1 u_+ = (E + \theta^+ T_3) u_+, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где положено $T_3 = T_2 + A_+^{-1} \circ \theta^+ T_1$.

При выводе (3.13) мы воспользовались следующим свойством оператора P^+ , а именно тем, что $P^+ A_- \theta^+ u_+ = P^+ A_- u_+$ для любого оператора A_- , символ которого $a_-(x, \xi)$ принадлежит классу O_α^- .

Применим теперь оператор R к A справа. Имеем

$$\begin{aligned} P^+ A \circ R f_+ &= P^+ A \circ A_+^{-1} \circ \theta^+ A_-^{-1} f_+ = P^+ A_- \circ \theta^+ A_-^{-1} f_+ + \\ &+ P^+ T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1} f_+ = P^+ A_- \circ A_-^{-1} f_+ + P^+ T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1} f_+ = \\ &= f_+ + P^+ T_5 f_+ + P^+ T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1} f_+ = (E + P^+ T_6) f_+, \end{aligned} \quad (3.14)$$

где $T_6 = T_5 + T_4 \circ \theta^+ A_-^{-1}$.

* Теорема остается справедливой при более общих предположениях.

Таким образом, мы получили следующие представления:

$$R \circ P^+ A u_+ = (E + \theta^+ T_3) u_+ \quad (3.7')$$

и

$$P^+ A \circ R f_+ = (E + P^+ T_6) f_+. \quad (3.8')$$

Установим теперь, что T_3 и T_6 являются гладкими в полупространстве R_+^n операторами порядка -1 , то есть, что они удовлетворяют оценкам (3.9), (3.10). Отсюда уже будет следовать, что оператор R является регуляризатором задачи (3.3), (3.4).

3°. Для доказательства гладкости оператора T_3 установим, что этим свойством обладает оператор T_1 . Справедлива

Лемма. Оператор T_1 — гладкий в полупространстве R_+^n и имеет порядок, равный $\kappa - 1$, то есть для любого вещественного s справедлива оценка

$$\|T_1 u_+\|_{S^{-(\kappa-1)}}^+ \leq C \|u_+\|_S^+, \quad (3.15)$$

где C — постоянная, не зависящая от u_+ .

Доказательство. Пусть $a_-^{-1}(x, \xi) = a'_-(x, \xi) + a_-^{-1}(\infty, \xi)$, где $a'_-(x, \xi) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \infty$ в смысле топологии S равномерно относительно ξ .

Преобразование Фурье оператора T_1 имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{T}_1 u_+(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} [\tilde{a}'_-(\xi - \eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi - \eta, \tau)] \tilde{a}'(\eta - \tau, \tau) \tilde{u}_+(\tau) d\tau d\tau + \\ &+ (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} [a_-^{-1}(\infty, \xi) - a_-^{-1}(\infty, \eta)] \tilde{a}'(\xi - \eta, \eta) \tilde{u}_+(\eta) d\eta = \\ &\equiv \tilde{T}_1^{(1)} u_+(\xi) + \tilde{T}_1^{(2)} u_+(\xi). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Докажем неравенство (3.15) для оператора $T_1^{(1)}$ (для $T_1^{(2)}$ оценка проводится аналогично и несколько проще). Заметим далее, что, поскольку $a(x, \xi) \in O_{\sigma}^1$, имеет место оценка

$$|\tilde{a}'_-(\xi - \eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi - \eta, \tau)| \leq \text{const} \frac{(1 + |\eta|)^{\kappa - \sigma - 1} + (1 + |\tau|)^{\kappa - \sigma - 1}}{(1 + |\xi - \eta|)^{\rho}} |\eta - \tau|, \quad (3.17)$$

где ρ достаточно велико.

Согласно свойству с) гладкости символа $a(x, \xi)$ имеем представление (§ 2, (2.1)–(2.3))

$$\tilde{a}'(\eta - \tau, \tau) = \tilde{a}_-(\eta - \tau, \tau) + \tilde{R}(\eta - \tau, \tau), \quad (3.18)$$

причем

$$|\tilde{a}_-(\eta - \tau, \tau)| \leq C_p \frac{(1 + |\tau|)^{\sigma}}{(1 + |\eta - \tau|)^{\rho}}, \quad (3.19)$$

$$|\tilde{R}(\eta - \tau, \tau)| \leq C_p \frac{\tau^{-\sigma} (1 + |\tau'|)^{\sigma + \sigma + 1}}{(1 + |\eta - \tau|)^{\rho} (1 + |\tau'| + |\tau_n|)}, \quad (3.20)$$

где ρ — любое достаточно большое число.

Теперь нетрудно убедиться, пользуясь оценками (3.17), (3.19), (3.20), в справедливости неравенств

$$\int_{R^n} |\tilde{a}'_-(\xi-\eta, \eta) - \tilde{a}'_-(\xi-\eta, \tau)| |\bar{a}'_-(\eta-\tau, \tau)| d\eta \leq \text{const} \frac{(1+|\tau|)^{x-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{p_1}}, \quad (3.21)$$

$$\int_{R^n} |\bar{a}'_-(\xi-\eta, \eta) - \bar{a}'_-(\xi-\eta, \tau)| |\bar{R}(\eta-\tau, \tau)| d\eta \leq \text{const} \frac{(1+|\tau|)^{x-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{p_1}}, \quad (3.22)$$

где p_1 достаточно велико.

Из неравенств (3.21) и (3.22) получаем следующую оценку:

$$\int_{R^n} |\tilde{a}'_-(\xi-\eta, \eta) - \bar{a}'_-(\xi-\eta, \tau)| |\bar{a}'_-(\eta-\tau, \tau)| d\eta \leq C_{p_1} \frac{(1+|\tau|)^{x-1}}{(1+|\xi-\tau|)^{p_1}}. \quad (3.23)$$

Повторяя теперь буквально те же рассуждения, что и в соответствующем месте доказательства теоремы 1, убеждаемся в гладкости оператора $T_1^{(1)}$, как оператора, действующего из пространства H_+^x в пространство $H_{x-(x-1)}(R_+^n)$.

Лемма доказана.

Аналогично доказывается гладкость остальных операторов, входящих в представления операторов T_3 и T_6 .

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Оператор R , задаваемый формулой (3.5), является левым и правым регуляризатором задачи (3.3)–(3.4).*

Вычислительный центр АН АрмССР

и Ереванского государственного

университета

Поступило 25.III.1968

Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ

ՊՍԵՎԴԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԿԱՆ ՕՊԵՐԱՏՈՐՆԵՐ ԿԻՍԱՏԱՐԱՄՈՒՅՑՈՒՆՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքը նվիրված է կիսատարածությունում պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների որոշակի դասերի ուսումնասիրությանը:

Առանձնացվում է ողորք (որոշակի ֆունկցիոնալ տարածություններում) օպերատորների մի դաս:

Տրվում է էլիպտիկ պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների համար կիսատարածությունում համասեռ եզրային խնդրի լուծումը:

R. L. SHAHBAĞIAN

PSEUDODIFFERENTIAL OPERATORS IN THE HALFSACE

S u m m a r y

The paper is devoted to investigation of some classes of pseudodifferential operators in a halfspace. A certain class of operators, which

posses a smoothness properties in some functional spaces and are naturally related with the operators under consideration, is introduced.

The regularisator of homogenous boundary problem in the half-space for pseudodifferential operators, generated by elliptic symbols, is constructed.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *J. Kohn and L. Nirenberg.* An algebra of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, № 1—2, 1965, 269—305.
2. *L. Hörmander.* Pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 18, № 3, 1965, 501—517.
3. *М. И. Вишик и Г. И. Эскин.* Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения, *УМН*, 22, вып. 1, 1967, 15—76.
4. *М. И. Вишик и Г. И. Эскин.* Уравнения в свертках в ограниченной области, *УМН*, 20, вып. 3, 1965, 89—152.
5. *Л. Шварц.* Математические методы для физических наук, Изд. „Мир“, М., 1965.
6. *J. Peetre.* Another approach to elliptic boundary problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 14, № 4, 1961, 711—731.