

Л. Ш. АГАБАБЯН, А. Б. НЕРСЕСЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В в е д е н и е

Задача Коши для гиперболического уравнения с данными на линии параболического вырождения изучалась лишь в случае уравнения второго порядка. Результаты, полученные в этом направлении, мы охарактеризуем на примере простейшей задачи Коши на плоскости

$$-u_{yy} + \Delta^2(y) u_{xx} = au_x + bu_y + cu + f, \quad (0.1)$$

$$(y > 0)$$

$$u(x, +0) = 0, \quad u_y(x, +0) = 0, \quad (0.2)$$

где

$$\inf u(x, y) > 0; \quad \Delta(y) > 0 \quad (y > 0); \quad \Delta(+0) = 0; \quad \Delta'(y) \geq 0,$$

а коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$ и $f(x, y)$ — достаточно гладкие функции. Первый общий результат, принадлежащий Проттеру [1] гласит, что задача (0.1) — (0.2) корректна в классическом смысле, если при $y \rightarrow +0^*$

$$a^*(y) = \max_x |a(x, y)| = \frac{\Delta(y)}{y} o(1). \quad (0.3)$$

Затем, при $\Delta(y) = y^\alpha$ ($\alpha > 1$), были получены более точные критерии корректности, и, в частности, замечено, что повышенная гладкость параметров задачи по переменному x позволяет накладывать меньше ограничений на скорость убывания коэффициента $a(x, y)$ (см. библиографию в [2]).

Известно, что задача (0.1) — (0.2) сводится к системе интегральных уравнений. Метод решения этой системы, предложенный в работе [3], позволил уточнить и обобщить все известные ранее критерии (см. [2]).

В частности, из результатов работы [2] следует, что задача (0.1) — (0.2) корректна в классическом смысле, если при некотором $p > 0$

$$\int_0^y t^{p+2} \Delta(t)^r \exp \left\{ \int_t^y \frac{a^*(\tau)}{\Delta(\tau)} d\tau \right\} dt < +\infty \quad (0.4)$$

и все параметры задачи дифференцируемы по x достаточное число

* Следует отметить, что доказательство критерия (0.3) в работе [1] проходит лишь в случае степенного убывания функции $\Delta(y)$.

раз. Таким образом, оказывается, что задача (0.1) — (0.2) корректна, если при $y \rightarrow +0$, $a^*(y) = O(\Delta'(y))^*$.

В случае вырождающихся гиперболических уравнений порядка выше второго, насколько нам известно, аналогичные вопросы не рассматривались. В предлагаемой работе методом работы [3] исследуется корректность задачи Коши для вырождающегося гиперболического уравнения третьего порядка с данными на линии вырождения. В частности, оказывается, что в случае модельного уравнения

$$-u_{yyy} + \Delta^2(y) u_{xx} = a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + g(x, y) u + f(x, y), \quad (0.5)$$

где

$$\Delta(y) > 0 \quad (y > 0), \quad \Delta(+0) = 0, \quad \Delta'(y) > 0$$

соответствующая задача корректна, если

$$\left. \begin{aligned} |a(x, y)| &\leq \text{const } \Delta(y) \Delta'(y) \\ |b(x, y)| &\leq \text{const } \Delta'(y) \\ |d(x, y)| &\leq \text{const } \frac{\Delta'(y)}{y} \end{aligned} \right\} \quad (0.6)$$

и все параметры достаточно гладки по x .

Предлагаемый метод позволяет исследовать задачу Коши для более общих уравнений и даже для довольно широкого класса вырождающихся гиперболических систем произвольного порядка (см. § 5).

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим гиперболический дифференциальный оператор третьего порядка

$$L[u] = u_{yyy} + (\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) u_{xy} + (\Delta_1 \Delta_2 + \Delta_1 \Delta_3 + \Delta_2 \Delta_3) u_{xx} + \Delta_1 \Delta_2 \Delta_3 u_{xxx} \quad (y > 0), \quad (1.1)$$

где

$$\Delta_i = \Delta_i(y), \quad \Delta_i(+0) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.2)$$

Изучается задача Коши с данными на линии вырождения

$$L[u] = au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu + f, \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = \mu_1(x), \quad u_y(x, 0) = \mu_2(x), \quad u_{yy}(x, 0) = \mu_3(x) \quad (0 \leq x \leq 1; y > 0). \quad (1.4)$$

Характеристики определяются из равенств

$$dx = -\Delta_i dy \quad (i = 1, 2, 3). \quad (1.5)$$

Не нарушая общности, можно считать, что одна из характеристик параллельна оси y . Пусть, например, $\Delta_3(y) = 0$. Решение ищется в открытом характеристическом треугольнике D , ограниченном соответствующими характеристиками из семейства

$$\xi = x - \int_y^0 \Delta_i(t) dt \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.6)$$

и отрезком оси x .

* В многомерном случае наиболее общие результаты получены О. А. Олейник [4] (см. также [5] и [6]).

Основным результатом настоящей работы является теорема существования и единственности решения задачи (1.3) — (1.4), подробно доказанная для случая, когда

$$\Delta_1(y) = -\Delta_2(y) = \Delta(y). \quad (1.7)$$

Теорема 1. Пусть в D функция $f(x, y)$ дифференцируема по x $2p+4$ раза, функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $e(x, y)$, $g(x, y)$ дифференцируемы по x $2p+2$ раза, функции $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ дифференцируемы $2p+5$ раз, $\Delta(y)$ дважды дифференцируема в $\bar{D}$ по y и $\Delta'(y) > 0$.

Пусть, кроме того

$$|a(x, y)| \leq a_0 \Delta(y) \Delta'(y), \quad (1.8)$$

$$|b(x, y)| \leq b_0 \Delta'(y), \quad (1.9)$$

$$|d(x, y)| \leq d_0 \frac{\Delta'(y)}{y}, \quad (1.10)$$

где $a_0, b_0, d_0 = \text{const}$, а функции $c(x, y)$, $e(x, y)$ и $g(x, y)$ интегрируемы по y в промежутке $0 < y < y_0$. Тогда, если

$$p > [2a_0 + 2b_0 + 2d_0] + 2, \quad (1.11)$$

то существует единственное решение задачи (1.3) — (1.4), обладающее непрерывными в $\bar{D}$ производными $\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-i} \partial y^i}$ ($i = 0, 1, 2, 3$; $i \leq k \leq p+3$).

Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям f_i , μ_{1i} , μ_{2i} , μ_{3i} соответствуют решения u_i ($i = 1, 2$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия

$$\sum_{k=0}^{2p+4} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 - f_2) \right| + \sum_{i=1}^3 \sum_{k=0}^{2p+5} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\mu_{1i} - \mu_{12}) \right| < \delta \quad (1.12)$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^3 \sum_{k=i}^{p+3} \max_{\bar{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^{k-i} \partial y^i} (u_1 - u_2) \right| < \varepsilon. \quad (1.13)$$

§ 2. Сведение к системе интегральных уравнений

Прежде всего заметим, что, без ограничения общности, можно считать условия (1.4) однородными. Действительно, если

$$u(x, +0) = u_y(x, +0) = u_{yy}(x, +0) = 0 \quad (2.1)$$

и $u(x, y)$ есть решение задачи (1.3) — (1.4), то функция

$$\tilde{u}(x, y) = u(x, y) - \mu_1(x) - y\mu_2(x) - \frac{1}{2}y^2\mu_3(x)$$

является решением задачи (1.3) — (2.1) с измененной правой частью.

Обозначая правую часть уравнения (1.3) через $F \equiv F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$, перепишем его в трех эквивалентных формах

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\Delta_1^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial u}{\partial y} &= F + \Delta_2' u_{xy}, \\ \sqrt{1+\Delta_2^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \sqrt{1+\Delta_1^2} \frac{\partial u}{\partial s_1} &= F + \Delta_2 \Delta_1' u_{xx} + 2\Delta_1' u_{xy} + \Delta_1'' u_x, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1+\Delta_1^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta_2^2} \frac{\partial u}{\partial s_2} &= F + (\Delta_1 \Delta_2)' u_{xx} + (2\Delta_2' + \Delta_1'') u_{xy} + \Delta_2'' u_x. \end{aligned}$$

Здесь использованы очевидные соотношения

$$\sqrt{1+\Delta_i^2} \frac{\partial u}{\partial s_i} = \frac{\partial u}{\partial y} + \Delta_i \frac{\partial u}{\partial x} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (2.2)$$

а через s_1, s_2 обозначены составляющие с осью y острый угол направления характеристик (1.5).

Как было замечено выше основные результаты относятся к случаю (1.7). Принимая это во внимание, будем иметь

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial u}{\partial y} &= \int_{l_1} \{F - \Delta' u_{xy}\} dy, \\ \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial u}{\partial s_1} &= \int_{l_2} \{F - \Delta \Delta' u_{xx} + 2\Delta' u_{xy} + \Delta'' u_x\} dy, \\ \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial u}{\partial s_2} &= \int_{l_3} \{F - (\Delta^2)' u_{xx} - \Delta' u_{xy} - \Delta'' u_x\} dy. \end{aligned}$$

Используя формулы (2.2), получим

$$\begin{aligned} -\Delta^2 u_{xx} + u_{yy} &= \int_{l_2} \{[a - (\Delta^2)'] u_{xx} + bu_{xy} + du_x + cu_{yy} + \\ &\quad + eu_y + gu + f\} dy, \\ \Delta u_{xy} + u_{yy} &= \int_{l_3} \{au_{xx} + (b + \Delta') u_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu + f\} dy, \\ -\Delta u_{xy} + u_{yy} &= \int_{l_1} \{au_{xx} + (b - \Delta') u_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + gu + f\} dy. \end{aligned}$$

После очевидных преобразований, обозначая

$$u_{xx} = V_1, u_{xy} = V_2, u_{yy} = V_3, \quad (2.3)$$

придем к системе

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 V_1 &= \int_{l_1} \{a V_1 + (b - \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + \\ &\quad + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f\} dy_1 + \int_{l_2} \{a V_1 + (b + \Delta') V_2 + c V_3 + \end{aligned}$$

$$+ d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1 - 2 \int_{l_1} \{ [a -$$

$$(2.4)$$

$$-(\Delta^2)'] V_1 + b V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1,$$

$$2\Delta V_2 = \int_{l_1} \{ a V_1 + (b + \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt +$$

$$+ g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1 - \int_{l_1} \{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt +$$

$$+ e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1, \quad (2.5)$$

$$2V_3 = \int_{l_1} \{ a V_1 + (b + \Delta') V_2 + c V_3 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt +$$

$$+ g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1 + \int_{l_1} \{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + c V_3 +$$

$$+ d \int_0^{y_1} V_2 dt + e \int_0^{y_1} V_3 dt + g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt + f \} dy_1. \quad (2.6)$$

Таким образом, если существует непрерывно дифференцируемое в D решение $u(x, y)$ задачи (1.3) — (2.1), то оно восстанавливается из некоторого решения системы (2.4), (2.5), (2.6) по формуле

$$u(x, y) = \int_0^y V_3(x, t) (y - t) dt. \quad (2.7)$$

Система (2.4), (2.5), (2.6), вообще говоря, не эквивалентна задаче (1.3) — (2.1). Действительно, пусть все коэффициенты правой части уравнения (1.3), кроме a , равны нулю, а коэффициент a зависит только от y . Тогда легко видеть, что одним из решений системы (2.4), (2.5), (2.6) будет

$$V_1 = 1, \quad V_2 = 1, \quad V_3 = \int_0^y a(t) dt,$$

хотя функция

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^y a(t) (y - t)^2 dt$$

при $a \neq 0$ не является решением уравнения (1.3).

Нужное решение выделяет следующая

Лемма 1. Пусть система (2.4), (2.5), (2.6) имеет непрерывно дифференцируемое в $\bar{D}$ решение $\{V_1, V_2, V_3\}$, причем

$$V_1(x, 0) = 0, \quad V_2(x, 0) = 0,$$

а V_3 дважды дифференцируема по x . Если, кроме того

$$\int_0^y |V_3(x, y)]_x dy < +\infty,$$

$$\int_0^y |V_2(x, y)]_x dy < +\infty,$$

$$\int_0^y |V_3(x, y)]_{xx} dy < +\infty,$$

то функция $u(x, y)$, восстанавливаемая по формуле (2.7), является решением задачи (1.3)–(2.1).

Доказательство. Из системы (2.4), (2.5), (2.6) имеем

$$\sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} (V_3 + \Delta V_2) - \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_1} (V_3 - \Delta V_2) = 2\Delta' V_2,$$

с другой стороны, согласно (2.2), это выражение записывается в виде

$$2(\Delta V_2)_y - 2\Delta V_{3x},$$

откуда $V_{2y} = V_{3x}$.

Интегрируя это тождество и имея в виду, что $V_2(x, 0) = 0$, получим

$$V_2 = \int_0^y V_{3x} dy.$$

Таким образом, функция

$$u^* = \int_0^y V_3(y-t) dt$$

дифференцируема по x и y и $u^*(x, y)_{xy} = V_2$. Аналогично, из системы (2.4), (2.5), (2.6) получим

$$V_1 = \int_0^y V_{2x} dy = \int_0^y \int_0^y V_{3xx}(y-t) dt,$$

то есть функция $u^*(x, y)$ дважды дифференцируема по x и $u^*_{xx} = V_1$. Так как, очевидно

$$u^*_{yy} = V_3(x, y)$$

то, согласно (2.2),

$$\sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial y} u^*(x, y) = u^*_{yy} - \Delta u^*_{xy} = V_3 - \Delta V_2,$$

откуда, согласно (2.4), (2.5) и (2.6), получим

$$\sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_1} \sqrt{1+\Delta^2} \frac{\partial}{\partial s_2} \frac{\partial}{\partial y} u^*(x, y) = t - \Delta' u_{xy}^*,$$

где

$$F = F(x, y, u^*, u_x^*, u_y^*, u_{xx}^*, u_{xy}^*, u_{yy}^*).$$

Лемма доказана, так как, очевидно

$$u^*(x, 0) = u_y^*(x, 0) = u_{yy}^*(x, 0) = 0,$$

а $u^*(x, y)$ удовлетворяет уравнению (3).

§ 3. Вспомогательные предложения

В этом параграфе будут сделаны некоторые замечания, используемые в дальнейшем.

Пусть $\varphi(x, y)$ — произвольная непрерывная в D функция двух переменных. Обозначим

$$\varphi^*(y) = \max_x |\varphi(x, y)|. \quad (3.1)$$

Этим обозначением мы будем регулярно пользоваться.

1°. Для простоты дальнейшего изложения будем считать, что коэффициенты $c(x, y)$, $e(x, y)$ и $g(x, y)$ равны нулю. Этим система (2.4), (2.5), (2.6) сведется к системе двух уравнений, для которой и будет доказано существование и единственность решения. Коэффициенты c, e и g не играют роли в вопросах существования и единственности решения системы (2.4), (2.5), (2.6). Действительно, из (2.6) имеем

$$2V_3 = \int_{l_1+l_2} c V_3 dy + \int_{l_1+l_2} \left\{ e \int_0^{y_1} V_3 dt \right\} dy_1 + \int_{l_1+l_2} \left\{ g \int_0^{y_1} V_3 (y_1 - t) dt \right\} dy_1 + F_1. \quad (3.2)$$

Отсюда, пользуясь обозначением (3.1), получим

$$2V_3^* \leq 2 \int_0^y [c^*(s) + \int_s^y e^*(t) dt + \int_s^y g^*(t)(t-s) dt] V_3^*(s) ds + F_1, \quad (3.3)$$

откуда видно, что для разрешимости (3.2) относительно V_3 достаточно, чтобы функции $c^*(y)$, $e^*(y)$, $g^*(y)$, F_1 были интегрируемы. Относительно условий, налагаемых на функцию F_1 , или, что то же самое, на коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$, $d(x, y)$ и $f(x, y)$, было сказано в теореме 1.

Таким образом, при сделанных предположениях, из существования и единственности решения системы

$$2\Delta^2 V_1 = \int_{l_1} \{a V_1 + (b - \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f\} dy_1 + \int_{l_2} \{a V_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + (b + \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1 - 2 \int_{l_n}^{\infty} \{ [a - (\Delta^2)'] V_1 + b V_2 + \\
& + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1,
\end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned}
2\Delta V_2 = & \int_{l_n}^{\infty} \{ a V_1 + (b + \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1 - \\
& - \int_{l_n}^{\infty} \{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt + f dy_1,
\end{aligned} \quad (3.5)$$

удовлетворяющего условиям леммы 1, автоматически следует существование и единственность решения задачи (1.3) — (2.1).

2°. Приведем некоторые простые соображения (см. [3]), играющие в дальнейшем важную роль.

Пусть дано уравнение

$$u(y) = \int_0^y K(t) u(t) dt + f(y) \quad (0 < y \leq y_0), \quad (3.6)$$

где функции K и f непрерывны при $y > 0$ и

$$\int_0^{y_0} K(t) dt = +\infty. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) не всегда имеет решение (например, при $f \equiv 1$ и $K(y) > 0$). С другой стороны, если $K(y) \geq 0$, то функция

$$u_0(y) = \exp \left\{ - \int_0^y K(t) dt \right\} \quad (3.8)$$

является, очевидно, непрерывным, ненулевым решением однородного уравнения. Если функция $f(y)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{y_0} \frac{K(t) f(t)}{u_0(t)} dt < +\infty, \quad (3.9)$$

то единственным непрерывным решением уравнения (3.6) будет функция

$$u(y) = f(y) + u_0(y) \int_0^y \frac{K(t) f(t)}{u_0(t)} dt = u_0(y) \int_0^y \frac{f'(t)}{u_0(t)} dt, \quad (3.10)$$

причем правая часть этой формулы соответствует дифференцируемой функции f . Это решение удовлетворяет условию

$$\int_0^y \frac{u(t)}{u_0(t)} dt < +\infty. \quad (3.11)$$

Формула (3.10), соответствующим образом преобразованная, будет в дальнейшем неоднократно применена.

3°. Следующее замечание касается схемы последовательных приближений.

Для решения системы (3.4), (3.5) будем строить следующие приближения:

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 V_1^n = & \int_{I_2} 2(\Delta^2)' V_1^n dy + \int_{I_2-I_1} \Delta' V_2^{n-1} dy + \int_{I_1-I_2} \left\{ a V_1^{n-1} + \right. \\ & + b V_2^{n-1} + d \int_0^{y_1} V_2^{n-1} dt + f \Big\} dy_1 + \int_{I_2-I_2} \left\{ a V_1^{n-1} + b V_2^{n-1} + d \int_0^{y_1} V_2^{n-1} \times \right. \\ & \left. \left. \times dt + f \right\} dy_1, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} 2\Delta V_2^n = & 2 \int_{I_2} \Delta' V_2^n dy + \int_{I_2-I_1} \left\{ a V_1^{n-1} + (b-\Delta') V_2^{n-1} + d \int_0^{y_1} V_2^{n-1} dt + \right. \\ & \left. + f \right\} dy_1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\left. \begin{aligned} V_1^0 &= V_2^0 = 0, \\ V_1^1 &= \int_{I_1-I_2} f(x, y) dy + \int_{I_2-I_1} f(x, y) dy \\ V_2^1 &= \int_{I_2-I_1} f(x, y) dy \end{aligned} \right\}. \quad (3.14)$$

Обозначая

$$V_1^n - V_1^{n-1} = \varepsilon_n, \quad V_2^n - V_2^{n-1} = \lambda_n,$$

из (3.12) и (3.13) получим

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 \varepsilon_n = & \int_{I_2} 2(\Delta^2)' \varepsilon_n dy + \int_{I_2-I_1} \Delta' \lambda_{n-1} dy + \int_{I_1-I_2} \left\{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + \right. \\ & + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \Big\} dy_1 + \int_{I_2-I_2} \left\{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \right\} dy_1, \\ 2\Delta \lambda_n = & 2 \int_{I_2} \Delta' \lambda_n dy + \int_{I_2-I_1} a \varepsilon_{n-1} + (b-\Delta') \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \Big\} dy_1. \end{aligned}$$

При непосредственной оценке ε_n и λ_n получаются расходящиеся интегралы. Для преодоления этой трудности поступим следующим образом: из (3.4) и (3.5), используя (3.10) и делая очевидные преобразования, формально получим

$$\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2} \int_{l_2}^{\frac{1}{\Delta}} \left\{ \int_{l_2-l_1} [\Delta' \lambda_n + a \varepsilon_n + b \lambda_n + d \int_0^{y_1} \lambda_n dt]_x dy_1 \right\} dy, \quad (3.15)$$

$$\lambda_n = \int_{l_1} \left\{ \int_{l_1} [a \varepsilon_{n-1} + (b - \Delta') \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt]_x dy_1 \right\} dy, \quad (3.16)$$

где*

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \int_{D_1} f_x(x, y) dx dy - \int_{D_1} f_x(x, y) dx dy \\ \lambda_1 &= \int_{D_1} f_x(x, y) dx dy + \int_{D_1} f_x(x, y) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

Из формул (3.15), (3.16) и (3.17) видно, что ε_1 и λ_1 имеют при $y \rightarrow 0$ порядок малости $\Delta(y) \cdot y^2$ (чего не достаточно для сходимости). Но если функция $f(x, y)$ имеет достаточное число производных по x , то можно ожидать, что на некотором шагу порядок малости ε_n и λ_n будет уже достаточным для сходимости рядов $\Sigma \varepsilon_n$ и $\Sigma \lambda_n$. Точная оценка ε_n и λ_n , а также условия, налагаемые на a, b, d и f , будут даны в следующем параграфе.

§ 4. Последовательные приближения

Для решения системы (3.4), (3.5) применим схему (3.12) — (3.14). Обозначим

$$V_1^n - V_1^{n-1} = \varepsilon_n; \quad V_2^n - V_2^{n-1} = \lambda_n. \quad (4.1)$$

Наложим на коэффициенты a, b и d следующие ограничения

$$\left. \begin{aligned} a^*(y) &\leq a_0 \Delta(y) \Delta'(y) \\ b^*(y) &\leq b_0 \Delta'(y) \\ d^*(y) &\leq d_0 \frac{\Delta'(y)}{y} \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

(a_0, b_0, d_0 — постоянные, $y > 0$, $\Delta'(y) > 0$).

1°. Теорема существования. Из системы (3.12) — (3.14) имеем

$$\begin{aligned} 2\Delta^2 \varepsilon_n &= \int_{l_2} 2(\Delta^2)' \varepsilon_n dy + \int_{l_2-l_1} \Delta' \lambda_{n-1} dy + \int_{l_1-l_2} \{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + \\ &+ d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \} dy_1 + \int_{l_2-l_2} \{ a \varepsilon_{n-1} + b \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \} dy_1, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$2\Delta \lambda_n = 2 \int_{l_2} \Delta' \lambda_n dy + \int_{l_2-l_1} \{ a \varepsilon_{n-1} + (b - \Delta') \lambda_{n-1} + d \int_0^{y_1} \lambda_{n-1} dt \} dy_1. \quad (4.4)$$

* D_1 и D_2 — характеристические треугольники, ограниченные соответственно, кривыми l_1, l_3 и осью x и l_2, l_3 и осью x .

Принимая во внимание замечание п. 3° § 3, из (3.15), (3.16) и (3.17) получим

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{1x}| &= \left| \iint_{D_1} f_{xx}(x, y) dx dy - \iint_{D_1} f_{xx}(x, y) dx dy \right| \leq \\ &\leq 2M \int_0^y \Delta(s)(y-s) ds \leq M\Delta(y)y^2, \end{aligned}$$

$$|\lambda_{1x}| = \left| \iint_{D_1+D_2} f_{xx}(x, y) dx dy \right| \leq M\Delta(y)y^2,$$

$$\varepsilon_{p+1} \leq \text{const } \Delta^p(y) y^{2p+2}; \quad p = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.5)$$

$$\lambda_{p+1} \leq \text{const } \Delta^p(y) y^{2p+2}; \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (4.6)$$

при условии, что $f(x, y)$ дифференцируема по x $p+1$ раз, а коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ дифференцируемы по x p раз.

Далее, разрешая систему (4.3), (4.4) относительно ε_n и λ_n и подставляя оценки (4.2), будем иметь

$$\varepsilon_n^* \leq \int_0^y 2a_0 \frac{\Delta'}{\Delta} \varepsilon_{n-1}^* dt + \int_0^y (2b_0 + 2d_0 + 1) \frac{\Delta'}{\Delta^2} \lambda_{n-1}^* dt \quad (n=1, 2, 3, \dots), \quad (4.7)$$

$$\lambda_n^* \leq \int_0^y a_0 \Delta' \varepsilon_{n-1}^* dt + \int_0^y (b_0 + d_0 + 1) \frac{\Delta'}{\Delta} \lambda_{n-1}^* dt \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (4.8)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_0^*(y) &\leq R_1 \Delta^p(y) y^{2p+2} \\ \lambda_0^*(y) &\leq R_1 \Delta^p(y) y^{2p+2} \\ (R_1 - \text{постоянная}) \end{aligned} \right\}. \quad (4.9)$$

Покажем, что ε_n^* и λ_n^* удовлетворяют оценкам

$$\varepsilon_n^* \leq \frac{R_1 M_1^n}{n!} \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt, \quad (4.10)$$

$$\lambda_n^* \leq \frac{R_1 M_2^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt \quad (4.11)$$

(M_1 и M_2 — некоторые постоянные, $n = 0, 1, 2, \dots$).

Для $n = 0$ из (4.10) и (4.11) следует оценка (4.9). Применяя полную индукцию, из (4.7) и (4.8) получим

$$\varepsilon_{n+1}^* \leq \int_0^y 2a_0 \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left\{ \frac{R_1 M_1^n}{n!} \int_0^t \Delta^p(s) s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \left[\ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(s)} \right]^n ds \right\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times dt + \int_0^y (2b_0 + 2d_0 + 1) \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left\{ \frac{R_1 M_2^n}{n!} \Delta(t) \int_0^t \Delta^p(s) s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \times \right. \\ & \times \left[\ln \frac{\Delta(t)}{\Delta(s)} \right]^n ds \Big\} dt = \frac{R_1 [2M_1^n a_0 + M_2^n (2b_0 + 2d_0 + 1)]}{(n+1)!} \int_0^y \Delta^p(s) \times \\ & \times s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(s)} \right]^{n+1} ds. \end{aligned}$$

Аналогично, для λ_{n+1}^* имеем

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}^* & \leq \frac{R_1 [M_1^n a_0 + M_2^n (b_0 + d_0 + 1)]}{(n+1)!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(s) s^{2p+2} \frac{\Delta'(s)}{\Delta(s)} \times \\ & \times \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(s)} \right]^{n+1} ds. \end{aligned}$$

Для выполнения оценок (4.10) и (4.11) достаточно положить

$$M_1 = M_2 = R_2 = 2a_0 + 2b_0 + 2d_0 + 1. \quad (4.12)$$

Окончательно имеем

$$\varepsilon_n^* \leq \frac{R_1 R_2^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt, \quad (4.13)$$

$$\lambda_n^* \leq \frac{R_1 R_2^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^n dt. \quad (4.14)$$

Суммируя ε_n^* и λ_n^* , получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^* \leq R_1 \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^{R_1} dt, \quad (4.15)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n^* \leq R_1 \Delta(y) \int_0^y \Delta^p(t) t^{2p+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left[\ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right]^{R_2} dt. \quad (4.16)$$

Для сходимости интегралов в правой части этих неравенств достаточно условие $p \geq [R_2] + 1$ или

$$p \geq [2a_0 + 2b_0 + 2d_0] + 2. \quad (4.17)$$

При выполнении этого условия ряды (4.15), (4.16) сходятся к предельным функциям $V_1^*(y)$ и $V_2^*(y)$ равномерно, причем $V_1^*(0) = 0$, $V_2^*(0) = 0$. Кроме того, как легко видеть, решение $V_1(x, y)$, $V_2(x, y)$ системы (3.4), (3.5) удовлетворяет всем условиям леммы 1. Таким образом, доказана следующая

Теорема существования. Пусть функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $d(x, y)$, $e(x, y)$ и $g(x, y)$ дифференцируемы в $\bar{D}$ по x p раз,

функция $f(x, y)$ дифференцируема в $\bar{D}$ по x $p+1$ раз, а функции $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $\mu_3(x)$ дифференцируемы в $\bar{D}$ $p+3$ раза. Пусть, кроме того, имеют место условия (4.2) и (4.17). Тогда задача (1.3)–(1.4) имеет в $\bar{D}$ решение $u(x, y)$, которое дважды непрерывно дифференцируемо по x и трижды непрерывно дифференцируемо по y .

2°. Теорема единственности. В этом пункте будет показано, что условие дифференцируемости по x решения $V_1(x, y)$, $V_2(x, y)$ системы (3.4), (3.5) $q+1$ раз, а коэффициентов $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ — $p+q$ раз (число q будет уточнено ниже) влечет за собой единственность и устойчивость решения задачи (1.3)–(2.1).

Пусть $\{V_1^0(x, y), V_2^0(x, y)\}$ — решение следующей однородной системы, соответствующей системе (3.4), (3.5) (которое существует согласно теореме существования):

$$2\Delta^2 V_1 = \int_{I_2} 2(\Delta^2)' V_1 dy + \int_{I_2-I_1} \Delta' V_2 dy + \int_{I_1-I_2} \left\{ a V_1 + b V_2 + d \times \right. \\ \left. \times \int_0^{y_1} V_2 dt \right\} dy_1 + \int_{I_2-I_1} \left\{ a V_1 + b V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt \right\} dy_1, \quad (4.18)$$

$$2\Delta V_2 = 2 \int_{I_1} \Delta' V_2 dy + \int_{I_2-I_1} \left\{ a V_1 + (b - \Delta') V_2 + d \int_0^{y_1} V_2 dt \right\} dy_1. \quad (4.19)$$

Так как система (3.12), (3.13) удовлетворяется при $f(x, y) \equiv 0$ и $V_1^n = V_1^0$, $V_2^n = V_2^0$, то из (3.15) и (3.16) формально будем иметь

$$V_1^0 = \frac{1}{2} \int_{I_2} \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_{I_2-I_1} [\Delta' V_2^0 + a V_1^0 + b V_2^0 + d \int_0^{y_1} V_2^0 dt]_x dy_1 \right\} dy, \\ V_2^0 = \int_{I_2} \left\{ \int_{I_1} a V_1^0 + (b - \Delta') V_2^0 + d \int_0^{y_1} V_2^0 dt \right\}_x dy_1 \Bigg\} dy.$$

Предположим, что V_1^0 и V_2^0 дифференцируемы по x $q+1$ раз, а коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ — q раз. Тогда, составляя для V_1^0 и V_2^0 q -тую итерацию, получим оценки

$$V_1^{0*} \leq \text{const } \Delta^q(y) y^{2q+2},$$

$$V_2^{0*} \leq \text{const } \Delta^q(y) y^{2q+2}.$$

С другой стороны, обозначая

$$2\Delta^2 V_1^0 = \varepsilon, \quad 2\Delta V_2^0 = \lambda,$$

из системы (4.18), (4.19) получим

$$\varepsilon^* \leq \int_0^y \frac{\Delta'}{\Delta} (2a_0 + 2) \varepsilon^* dt + \int_0^y \frac{\Delta'}{\Delta} (2b_0 + 2d_0 + 1) \lambda^* dt,$$

$$\lambda^* \leq \int_0^y \frac{\Delta'}{\Delta} (b_0 + d_0 + 2) \lambda^* dt + \int_0^y a_0 \frac{\Delta'}{\Delta} \varepsilon^* dt.$$

Далее аналогично формулам (4.13), (4.14) получим

$$\varepsilon^* \leq \text{const} \frac{Q^n}{n!} \int_0^y \Delta^q(t) t^{2q+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left| \ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right|^n dt, \quad (4.20)$$

$$\lambda^* \leq \text{const} \frac{Q^n}{n!} \Delta(y) \int_0^y \Delta^q(t) t^{2q+2} \frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)} \left| \ln \frac{\Delta(y)}{\Delta(t)} \right|^n dt \quad (4.21)$$

$$(n = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

где

$$Q \leq 2a_0 + 2b_0 + 2d_0 + 3.$$

Пусть теперь

$$q \geq [2a_0 + 2b_0 + 2d_0] + 4. \quad (4.22)$$

Из (4.20), (4.21) видно, что n можно выбрать настолько большим, что ε^* и λ^* будут меньше любого наперед заданного положительного числа, то есть $\varepsilon^* = \lambda^* = 0$. Таким образом, при выполнении условия (4.22) решение задачи (1.3) — (2.1) единственно. Легко видеть, что оно будет устойчивым в следующем смысле: пусть функциям f_1 и f_2 соответствуют решения u_1 и u_2 . Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условия

$$\sum_{k=0}^{p+q+2} \max_D \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 - f_2) \right| < \delta$$

следует, что

$$\sum_{l=0}^3 \sum_{k=l}^{q+3} \max_D \left| \frac{\partial^k}{\partial x^{k-l} \partial y^l} (u_1 - u_2) \right| < \varepsilon.$$

Таким образом, справедлива следующая

Теорема единственности. Пусть решение системы (3.4), (3.5) дифференцируемо по x $q+1$ раз, коэффициенты $a(x, y)$, $b(x, y)$ и $d(x, y)$ дифференцируемы по x $p+q$ раз. Тогда, если имеет место условие (4.22), решение задачи (1.3) — (2.1) единственно.

Из теорем существования и единственности следует теорема 1.

§ 5. Некоторые уточнения и обобщения

1°. В случае

$$\Delta(y) = y^\alpha \quad (\alpha > 0) \quad (5.1)$$

теорему 1 можно усилить.

Действительно, в этом случае ряды (4.15) и (4.16) сходятся при $p(\alpha+2)+2 > R_2$ и, следовательно, если из оценки типа (4.2) вытекает

$$\left. \begin{aligned} |a(x, y)| &\leq A y^{2\alpha-1} \\ |b(x, y)| &\leq B y^{2\beta-1} \\ |d(x, y)| &\leq C y^{2\gamma-2} \end{aligned} \right\}, \quad (5.2)$$

где $A, B, C = \text{const}$, то из условия

$$p > \frac{2(A+B+C)}{\alpha+2} + \frac{\alpha-2}{\alpha+2} \quad (5.3)$$

следует справедливость теоремы 1.

Условие (5.3) гораздо менее ограничительно, чем (1.11). В частности, отсюда следует, что при $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ достаточно потребовать лишь ограниченности коэффициентов a, b и d .

2°. Теорему 1 можно обобщить на случай, когда $\Delta_3(y) \equiv 0$ и

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(y) &= C_1 \Delta(y)^\alpha \\ \Delta_2(y) &= C_2 \Delta(y)^\beta \quad (\alpha > \beta > 0) \end{aligned} \right\}, \quad (5.4)$$

где $\alpha, \beta, C_1, C_2 = \text{const}$. В этом случае, несущественно видоизменив выкладки §§ 2–4, получим, что если

$$\left. \begin{aligned} |a(x, y)| &\leq \text{const } \Delta(y)^{\alpha+\beta-1} \Delta'(y) \\ |b(x, y)| &\leq \text{const } \Delta(y)^{\beta-1} \Delta'(y) \end{aligned} \right\}, \quad (5.5)$$

то теорема 1 верна при соответствующем подборе числа $p > 0$.

Более того, анализ применяемых методов показывает, что характер результатов не изменится, если $\Delta_3 \equiv 0$, Δ_1 и Δ_2 достаточно гладкие функции по x и

$$0 < \text{const} \leq \frac{\ln |\Delta_1(x, y)|}{\ln |\Delta_2(x, y)|} \leq \text{const}. \quad (5.6)$$

3°. При применении методов настоящей работы к исследованию задачи Коши для вырождающихся гиперболических систем произвольного порядка пока еще не преодолены все трудности, имеющие, главным образом, аналитический характер. Однако в одном частном случае схема настоящей работы должна проходить. Именно, пусть рассматривается задача Коши:

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y} + \Delta_i(y) \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \sum_{0 \leq j < k < n-1} a_{jk}^*(x, y) \frac{\partial^k u}{\partial x^j \partial y^{k-j}} + f(x, y), \quad (5.7)$$

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial y^k} \right|_{y=0} = 0 \quad (k=0, 1, 2, 3, \dots, n-1), \quad (5.8)$$

причем функции Δ_i имеют вид

$$\Delta_i(y) = C_i \Delta(y), \quad (5.9)$$

где C_i — действительные постоянные, $C_i \neq C_j$ ($i \neq j$),

$$\Delta(y) > 0 (y > 0), \quad \Delta(+0) = 0, \quad \Delta'(y) > 0.$$

Применением методов §§ 2—4 можно, по-видимому, доказать следующий результат: пусть

$$|a_j^k(x, y)| \leq \text{const } y^{k-n+1} \frac{d}{dy} (\Delta(y)^j). \quad (5.10)$$

Тогда, если все параметры задачи (5.7), (5.8) достаточно гладки по x , то эта задача корректна в классическом смысле.

В частности, если $\Delta(y) = y^\alpha$, $0 < \alpha < \frac{1}{n-1}$, достаточно потребовать лишь ограниченности коэффициентов a_j^k .

В заключение заметим, что пока еще не ясно, какого типа ограничения должны подвергаться коэффициенты уравнения (5.7) (и, в частности, [1.1], когда Δ_1 , Δ_2 и Δ_3 произвольны) в общем случае, когда только $\Delta_i(y) \neq \Delta_j(y)$ ($i \neq j$, $y > 0$), а при $y = 0$ некоторые характеристические направления совпадают.

Институт математики и механики

АН Армянской ССР

Поступило 18.IX.1967

Ереванский государственный армянский
педагогический институт им. Х. Абовяна

Լ. Շ. ԱՂԱՐԱՔՅԱՆ, Ղ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ

ԵՐՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱԾՎՈՂ ՀԻՊԵՐԲՈԼԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԲԱՆ ՀԱՄԱՐ
ԿՈՇՈՒ ԽՆԴԻՒ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում հետազոտվում է հարթության վրա երրորդ կարգի հիպերբոլական հավասարման համար Կոշու խնդրի կոռեկտությունը, երբ տվյալները պարաբոլական գծի վրա են տրված: Մասնավորաբար

$$-U_{yy} + \Delta^3(y) U_{xy} = aU_{xx} + bU_{xy} + cU_{yy} + dU_x + eU_y + gU + f$$

հավասարման համար (որտեղ $\Delta(y) > 0$ ($y > 0$), $\Delta(+0) = 0$, $\Delta'(y) \geq 0$) ապացուցված է, որ Կոշու խնդիրը կոռեկտ է, եթե գործակիցները և ֆունկցիան բավականաչափ ողորդ են ըստ x -ի և

$$|a(x, y)| \leq \text{const } \Delta(y) \Delta'(y),$$

$$|b(x, y)| \leq \text{const } \Delta'(y),$$

$$|d(x, y)| \leq \text{const } \frac{\Delta'(y)}{y}.$$

L. Sh. AGABABIAN, A. B. NERSESIAN

THE CAUCHY PROBLEM FOR A HYPERBOLIC EQUATION
OF THIRD ORDER WITH DATA ON PARABOLIC LINE

S u m m a r y

In the present paper the character of correctness of Cauchy problem for hyperbolic differential equation of third order with initial values on the parabolic line is considered. In particular, it is proved that for an equation

$$-U_{yyy} + \Delta^2(y) U_{xy} = a(x, y) U_{xx} + b(x, y) U_{xy} + c(x, y) U_{yy} + d(x, y) U_x + e(x, y) U_y + g(x, y) U + f(x, y),$$

where

$$\Delta(y) > 0 \quad (y > 0), \quad \Delta(+0) = 0, \quad \Delta'(y) > 0$$

the corresponding problem is correct in classic sense, if

$$|a(x, y)| \leq \text{const } \Delta(y) \Delta'(y),$$

$$|b(x, y)| \leq \text{const } \Delta'(y),$$

$$|d(x, y)| \leq \text{const } \frac{\Delta'(y)}{y}$$

and all parameters are sufficiently smooth with respect to x .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M. H. Protter. The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on parabolic line, *Canad. J. Math.*, 6, 4, 1954, 542—553.
2. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, *ДАН СССР*, 166, № 6, 1966, 1288—1291.
3. А. Б. Нерсисян. О задаче Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, *Известия АН АрмССР, "Математика"*, 3, № 2, 1968.
4. О. А. Олейник. Задача Коши и краевая задача для гиперболических уравнений второго порядка, вырождающихся в области и на ее границе, *ДАН СССР*, 169, № 3, 1966.
5. М. М. Смирнов. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, "Наука", М., 1966.
6. С. М. Фатеева. Задача Коши и краевая задача для линейных и квазилинейных вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, *ДАН СССР*, 172 № 6, 1967, 1278—1281.