

Р. А. АЛЕКСАНДРЯН, Р. Э. МКРТЧЯН

О ПОСТРОЕНИИ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ ПРОИЗВОЛЬНОГО САМОСОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА И ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ИХ СТРУКТУРЫ

1°. Введение. Пусть A — самосопряженный оператор* с областью определения $D(A)$, действующий в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть далее E_λ — соответствующее спектральное семейство проекционных операторов, а $r(\lambda) = \|E_\lambda g\|^2$, где g — так называемый порождающий элемент. Обозначим через V оператор, существующий в силу основной спектральной теоремы и осуществляющий изометрическое отображение пространства H в пространство L^2_r так, что оператор A переходит в оператор умножения на независимую переменную.

В работе [1] показано, что полную систему собственных функционалов $T_\lambda(\varphi)$ оператора A можно строить по формуле

$$T_\lambda(\varphi) = \lim_{\tau \rightarrow +0} T_{\lambda+\tau}(\varphi), \quad T_\tau(\varphi) = \frac{(R_\tau \varphi, R_\tau g)}{\|R_\tau g\|^2},$$

где R_τ — резольвента оператора A . Однако в этой работе линейное многообразие тех элементов φ , для которых указанный выше предел существует, а также топология, относительно которой эти функционалы непрерывны, описываются в терминах изометрического оператора V .

Вместе с тем, при исследовании конкретных самосопряженных операторов, разумеется, оператор V , вообще говоря, нельзя предполагать известным.

В настоящей работе прежде всего указывается процедура построения полной системы собственных функционалов, которая не опирается на знание оператора V и описывается только в терминах резольвенты R_τ .

Затем исследуется характер непрерывности построенных нами функционалов $T_\lambda(\varphi)$ в терминах, аналогичных тем, которые использованы в работах Ю. М. Березанского [2, 3], Г. И. Каца [4, 5] и К. Морена [6, 7] при доказательстве возможности спектральных разложений произвольных самосопряженных операторов по обобщенным собственным элементам.

Кроме того, попутно доказывается новая формула обращения для интегралов типа Коши — Лебега — Стильтьеса.

* Для упрощения формулировок мы предполагаем, что спектр оператора A простой.

2°. В этом пункте мы докажем теорему, которая дает представление изометрического оператора V в терминах резольвенты R_ε рассматриваемого самосопряженного оператора A .

Теорема 1. Пусть спектр оператора A простой и непрерывный, и пусть g — его порождающий элемент, тогда для каждого $\varphi \in H$ и любого λ из некоторого множества Λ_φ полной ρ -меры

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} = V\varphi \in L_\varphi^2. \quad (1)$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\Phi(\lambda) = V\varphi$, тогда легко видеть [1], что

$$\frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} - V\varphi = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(t) d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Phi(\lambda) d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}},$$

потому имеет место неравенство

$$\left| \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} - V\varphi \right| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}.$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$, тогда легко видеть [8], что для каждого $\delta > 0$ можно указать такое $\tau_1(\delta) > 0$, чтобы для всех $\tau \leq \tau_1(\delta)$ имело место неравенство

$$\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} < \frac{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{|\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} + \varepsilon.$$

Введем в рассмотрение новую неотрицательную меру $\tilde{\rho}_\lambda(x)$ по формуле

$$\tilde{\rho}_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x |\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t), \quad (2)$$

тогда в силу теоремы Радона — Никодима легко заключить, что

$$\left| \frac{(R_{\lambda+i\tau}\varphi, R_{\lambda+i\tau}g)}{\|R_{\lambda+i\tau}g\|^2} - V\varphi \right| \leq \frac{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\tilde{\rho}_\lambda(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} + \varepsilon. \quad (3)$$

Интегрируя по частям числитель и знаменатель справа в соотношении (3), будем иметь

$$\left| \frac{(R_{\lambda+it} \varphi, R_{\lambda+it} g)}{\|R_{\lambda+it} g\|^2} - V \varphi \right| \leq$$

$$\frac{\frac{\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2} + 2 \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \tilde{\rho}_{\lambda}(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}}{\frac{\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2} + 2 \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \rho(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}} + \varepsilon.$$
(4)

Рассмотрим теперь отношение

$$\frac{\frac{\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2}}{\frac{\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)}{\delta^2 + \tau^2}} = \frac{\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta)}{\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)},$$
(5)

и убедимся, что оно стремится к нулю вместе с δ для всех λ из некоторого множества полной ρ -меры.

В самом деле, пусть $h(x) = \int_{-\infty}^x \Phi(t) d\rho(t)$, тогда, поскольку она

абсолютно непрерывна по мере ρ , множество ее точек Лебега Λ_{ρ} относительно системы Витали, состоящей из всевозможных замкнутых интервалов вещественной оси, имеет полную ρ -меру [9], т. е.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{[\rho(\lambda+\delta) - \rho(\lambda-\delta)]} \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} |\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t) = 0$$

для всех λ , принадлежащих множеству Λ_{ρ} полной ρ -меры. Заметив теперь, что в силу (2)

$$\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+\delta) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-\delta) = \int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} |\Phi(t) - \Phi(\lambda)| d\rho(t),$$

заключаем, что отношение справа в (5) действительно стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_{\rho}$.

Разбивая интегралы в числителе и знаменателе соотношения (4) на две части и вводя новые переменные интегрирования, получим для отношения этих интегралов следующее выражение:

$$\frac{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \tilde{\rho}_{\lambda}(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}}{\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\delta} \frac{(t-\lambda) \rho(t) dt}{[(t-\lambda)^2 + \tau^2]^2}} = \frac{\int_0^{\delta} \frac{t [\tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda+t) - \tilde{\rho}_{\lambda}(\lambda-t)] dt}{[t^2 + \tau^2]^2}}{\int_0^{\delta} \frac{t [\rho(\lambda+t) - \rho(\lambda-t)] dt}{[t^2 + \tau^2]^2}}.$$
(6)

Рассмотрим теперь отношение подынтегральных функций справа в соотношении (6), которое очевидно равно

$$\frac{\bar{\rho}_\lambda(\lambda+t) - \bar{\rho}_\lambda(\lambda-t)}{\rho(\lambda+t) - \rho(\lambda-t)}, \quad 0 \leq t \leq \delta$$

и по доказанному выше стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$, повтому, принимая во внимание неотрицательность подынтегрального выражения в знаменателе, легко убеждаемся, что отношение справа в (6) также стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$. Таким образом, при $\delta \rightarrow 0$, как отношение (5), так и (6) стремятся к нулю для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$, откуда легко заключить, в силу неотрицательности слагаемых в знаменателе, что отношение справа в (4) также стремится к нулю вместе с δ для всех $\lambda \in \Lambda_\tau$, независимо от выбора τ . Пусть $\delta_\lambda(\varepsilon) > 0$ такое, что отношение справа в (4) не превосходит ε для всех $\tau > 0$, и пусть $\tau_\lambda^*(\varepsilon) = \tau_\lambda(\delta_\lambda(\varepsilon))$, тогда легко видеть, что для каждого $\lambda \in \Lambda_\tau$ и любого $\tau < \tau_\lambda^*(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\left| \frac{(R_{\lambda+t\tau}\varphi, R_{\lambda+t\tau}g)}{\|R_{\lambda+t\tau}g\|^2} - V_\varphi \right| \leq 2\varepsilon,$$

т. е. предельное соотношение (1) доказано.

Очевидно, что полученный результат можно сформулировать также следующим образом: для каждого $\varphi \in H$

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} T_\tau(\varphi) = T_\lambda(\varphi) \quad (7)$$

существует всюду, кроме множества ρ -меры нуль, зависящего, однако, от элемента φ .

Легко понять, что из этого результата непосредственно не следует существование даже одного λ_0 , при котором упомянутый предел существует для плотного множества элементов из H . Вместе с тем, в плане построения полной системы собственных функционалов, необходимо доказать существование некоторого множества полной ρ -меры, на котором этот предел существует одновременно для всех φ из возможно широкой, во всяком случае всюду плотной, совокупности элементов из H . В работе [10] было указано, что если $\varphi \in \mathcal{Q}_A$, то предел (1) существует для всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$. Оказывается, что этот предел существует также для всех без исключения λ , когда φ принадлежит более широкой совокупности, чем $\mathcal{Q}_A$. Пусть M_A — совокупность элементов $\varphi \in H$ и таких, что для $V\varphi = \Phi(t)$ каждая точка $t \in (-\infty, +\infty)$ является точкой Лебега относительно упомянутой выше системы Витали.

Тогда из доказательства теоремы 1 легко усмотреть справедливость следующей ее модификации.

Теорема 1 bis. В условиях теоремы 1 для всех $\varphi \in M_A$ и всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+\tau} \varphi, R_{\lambda+\tau} g)}{\|R_{\lambda+\tau} g\|^2} = T_{\lambda}(\varphi) = \Phi(\lambda).$$

3°. Из рассмотрений предыдущего пункта легко следует, что для каждого счетного, всюду плотного в метрике H и инвариантного относительно A линейного многообразия $\Omega \subset D(A)$, существует зависящее от Ω множество Λ полной ρ -меры, такое, что предел (7) существует для всех $\lambda \in \Lambda$ и всех $\varphi \in \Omega$ и определяет на Ω функционал, удовлетворяющий соотношению

$$T_{\lambda}(A\varphi) = \lambda T_{\lambda}(\varphi), \quad \varphi \in \Omega. \quad (8)$$

Для того чтобы построенные по формуле (7) функционалы $T_{\lambda}(\varphi)$ были собственными функционалами оператора A , они должны быть непрерывными в некоторой разумной* топологии. Этот пункт посвящен построению таких функционалов и изучению их структуры, т. е. выяснению характера непрерывности этих функционалов.

Пусть G — неограниченный замкнутый оператор со всюду плотной областью определения D_G , обратный к которому G^{-1} определен на всей области значений оператора G , совпадающей со всем H . Для элементов $\varphi \in D_G$ введем новую норму по формуле: $\|\varphi\|_* = \|G\varphi\|$.

Легко проверить, что эта новая норма превратит линейное многообразие $D(G)$ в некоторое пространство Банаха E_G . В указанных условиях оператор G^{-1} оказывается ограниченным, поэтому сходимость в метрике пространства E_G сильнее, чем сходимость в H . Легко проверить также, что имеют место вложения $E_G \subset H \subset E_G^*$ и что H всюду плотно в E_G . Докажем теперь важное для дальнейшего вспомогательное утверждение

Лемма. Пусть A — произвольный оператор с простым спектром, ag — его порождающий элемент, и пусть оператор G^{-1} является оператором Гильберта — Шмидта, тогда существует зависящее от выбора G множество Λ полной ρ -меры такое, что для всех $\varphi \in D_G$ и $\lambda \in \Lambda$ имеет место неравенство

$$|T_{\lambda+\tau}(\varphi)| \leq K_{\lambda} \|\varphi\|_*. \quad (9)$$

Доказательство. Пусть $G^{-1} = US$ — полярное представление [11] оператора G^{-1} , тогда известно [11], что

$$G^{-1}\varphi = \sum_{i=1}^{r(s)} \mu_i a_i \omega_i, \quad a_i = (\varphi, \psi_i),$$

где ψ_i — ортонормированная и полная в $D(G)$ система собственных элементов оператора S , соответствующих собственным значениям μ_i , а $\omega_i = U\psi_i$.

В наших условиях очевидно, что $r(s) = \infty$

* Пространство H должно быть всюду плотным в соответствующем сопряженном пространстве.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^2 < +\infty,$$

а система $\{\psi_i\}$, а также система $\{\omega_i\}$ полны во всем H .

Пусть φ —произвольный элемент из $D(G)$ такой, что $\|\varphi\|_* = 1$, тогда очевидно $\varphi = G^{-1}\psi$, причем $\|\psi\| = 1$, поэтому

$$\sup_{\|\varphi\|_* = 1} |T_z(\varphi)| = \sup_{\|\psi\| = 1} |T_z(G^{-1}\psi)|,$$

откуда будем иметь

$$\sup_{\|\varphi\|_* = 1} |T_z(\varphi)| = \sup_{\{a_k\}} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k a_k \gamma_k(t) \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} \right|}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}, \quad (10)$$

где положено $\gamma_k(t) = V\omega_k$, а верхняя грань берется по всевозможным последовательностям таким, что $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = 1$. Оценивая числитель справа в соотношении (10) по неравенству Коши-Буняковского, будем иметь

$$\sup_{\|\varphi\|_* = 1} |T_z(\varphi)| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\sum_{(k)} \mu_k^2 |\gamma_k(t)|^2} d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}. \quad (11)$$

Заметим теперь, что ряд

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 |\gamma_k(t)|^2 \quad (12)$$

сходится почти везде по мере ρ и представляет собой функцию $F^2(t)$ из L_ρ . В самом деле, для ряда, полученного путем почленного интегрирования (12), имеем

$$\sum_{(k)} \mu_k^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |\gamma_k(t)|^2 d\rho(t) = \sum_{(k)} \mu_k^2 < +\infty,$$

поэтому, в силу известной теоремы Лебега об интегрировании монотонных последовательностей функций [12], будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F^2(t) d\rho(t) = \sum_{(k)} \mu_k^2 < +\infty,$$

тогда, поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho(t) = 1$, то $F(t)$ также принадлежит L_ρ . Таким образом, неравенство (11) мы можем переписать в виде

$$\sup_{\|\varphi\|_\sigma=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(t) d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}}, \quad (13)$$

где $F(t)$, как было доказано выше, суммируема по мере ρ . Изменяя, если это потребуется, функцию $F(t)$ на множестве ρ -меры нуль и пользуясь теоремой 1, мы заключаем, что существует множество Λ_F полной ρ -меры такое, что предел правой части (13) при $\tau \rightarrow +0$ конечен и равен $F(\lambda)$ для всех $\lambda \in \Lambda_F$.

Таким образом, с одной стороны, при каждом $\lambda \in \Lambda_F$ существует такое $\tau_0(\lambda) > 0$, что

$$\sup_{\|\varphi\|_\sigma=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq F(\lambda) + 1, \quad 0 < \tau \leq \tau_0(\lambda),$$

с другой стороны

$$\sup_{\|\varphi\|_\sigma=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq \frac{1}{\tau_0^2} \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |F(t)| d\rho(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}} = \bar{F}(\lambda), \quad \tau_0(\lambda) \leq \tau \leq 1,$$

поэтому справедливо неравенство

$$\sup_{\|\varphi\|_\sigma=1} |T_{\lambda+i\tau}(\varphi)| \leq K_\lambda, \quad 0 < \tau \leq 1,$$

где $K_\lambda = \max \{1 + F(\lambda); \bar{F}(\lambda)\}$.

Полезно заметить, что функционалы T_z , будучи ограниченными в H при каждом не вещественном z , по теореме Рисса представимы в виде $T_z(\varphi) = (\varphi, h_z)$, где $h_z \in H$, однако, как легко убедиться, нормы h_z для $\lambda \in S_i^*(A)$ могут быть ограничены при $\tau \rightarrow 0$ только в том случае, когда точка λ принадлежит точечному спектру оператора A , т. е. в случае, когда λ есть точка разрыва E_λ . Однако, как это следует из доказанной выше леммы, если рассматривать функционалы $T_{\lambda+i\tau}$ как элементы из E_σ^* , то их нормы оказываются ограниченными константой K_λ , не зависящей от τ для всех $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ за исключением, быть может, некоторого множества нулевой ρ -меры, независимо от характера спектра.

Теперь уже мы в состоянии построить полную систему собственных функционалов рассматриваемого оператора A путем продолжения построенных выше функционалов T_λ , определенных на многообразии Ω , состоящем лишь из некоторого счетного множества элементов.

В самом деле, если полагать, что совокупность Ω состоит из элементов, принадлежащих $D(G)$, то из доказанной выше леммы непосредственно следует, что упомянутые функционалы $T_\lambda(\varphi)$ для каждого $\lambda \in \Lambda$ ограничены в топологии пространства E_G и поэтому они однозначно продолжимы по непрерывности на замыкание Ω в пространстве E_G , которое будет совпадать со всем пространством E_G .

Полученные после такого продолжения функционалы, которые очевидно также будут принадлежать E_G^* , мы будем продолжать обозначать через $T_\lambda(\varphi)$.

Пусть теперь для некоторого $\varphi_0 \in E_G$ известно, что $T_\lambda(\varphi_0) = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и докажем, что φ_0 — нулевой элемент. В самом деле, пусть u_k — последовательность из Ω , стремящаяся к φ_0 в метрике E_G , а, следовательно, и в метрике H .

Тогда очевидно $u_k \rightarrow \varphi_0$ в метрике L^2_φ , поэтому существует подпоследовательность u_{k_n} такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = \varphi_0$ почти всюду по мере ρ . С другой стороны, по определению $T_\lambda(\varphi_0)$ будем иметь

$$T_\lambda(\varphi_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_\lambda(u_{k_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{k_n} = \varphi_0,$$

откуда $\varphi_0 = 0$ почти всюду по мере ρ и, следовательно, $\varphi_0 = \theta$. Таким образом, построенная совокупность функционалов $\{T_\lambda \in E_G^*, \lambda \in \Lambda\}$ образует полную систему. Также просто убедиться в справедливости разложения

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(f) \overline{T_\lambda(\varphi)} d\rho(\lambda), \quad f, \varphi \in E_G. \quad (14)$$

В самом деле, для всех $f, \varphi \in H$ по основной спектральной теореме имеем

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda) \overline{\Phi(\lambda)} d\rho(\lambda), \quad F(\lambda) = Vf, \quad \Phi(\lambda) = V\varphi,$$

с другой стороны, как это было только что доказано, для всех $\varphi \in E_G$ $V\varphi$ совпадает с $T_\lambda(\varphi)$ почти всюду по мере ρ .

Предположим теперь, что многообразие $D(G) \cap D(A)$ всюду плотно в пространстве H и инвариантно относительно оператора A , тогда легко видеть, что соотношение (8) будет иметь место для всех $\varphi \in D(G) \cap D(A)$. Таким образом, нами доказана справедливость следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть A — произвольный самосопряженный оператор с простым спектром, тогда, при сделанных выше предположениях относительно оператора A , построенные выше функционалы $T_\lambda(\varphi)$ непрерывны в топологии пространства E_G , образуют полную систему собственных функционалов оператора A , и имеет место следующая формула разложения:

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\lambda}(f) \overline{T_{\lambda}(\varphi)} d\rho(\lambda),$$

справедливая для всех f и φ из $D(G)$.

Замечание. В том случае, когда спектр оператора A , действующего в сепарабельном гильбертовом пространстве H , не является простым, пространство H , как известно, может быть представлено в виде ортогональной суммы таких, инвариантных относительно A , подпространств H_k , в каждом из которых его спектр простой.

Пусть g_k — порождающий элемент, соответствующий подпространству H_k , тогда, поступая так же как и в случае простого спектра и отправляясь от формул

$$\lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{(R_{\lambda+i\tau}, R_{\lambda+i\tau} g_k)}{\|R_{\lambda+i\tau} g_k\|^2} = T_{\lambda}^{(k)}(\varphi) \quad (k=1, 2, 3, \dots),$$

мы можем построить полную систему собственных функционалов $T_{\lambda}^{(k)}(\varphi)$ ($k=1, 2, 3, \dots$) для случая общих операторов с произвольным спектром, причем так, чтобы все эти функционалы были непрерывны в топологии пространства E_G и имела место формула разложения

$$(f, \varphi) = \sum_{(k)} \int_{-\infty}^{+\infty} T_{\lambda}^{(k)}(f) \overline{T_{\lambda}^{(k)}(\varphi)} d\rho_k(\lambda),$$

где $\rho_k(\lambda) = \|E_{\lambda} g_k\|^2$.

4°. В этом пункте мы покажем, что из доказанной выше теоремы 1 вытекает новая формула обращения, представляющая собой обобщение известной формулы обращения для интегралов типа Коши.

Пусть $\rho(t)$ — фиксированная неубывающая функция с ограниченным изменением на всей вещественной оси, и пусть B_{ρ} — класс функций $F(z)$, регулярных вне вещественной оси (а также во всех точках постоянства функции $\rho(t)$) и представимых интегралом типа Коши — Лебега — Стильтьеса, т. е. в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) d\rho(t)}{t-z},$$

где функция $f(t)$ вещественна и суммируема на всей оси по мере ρ .

Оказывается, что значения функции $F(z)$ восстанавливают значения плотности $f(t)$ с помощью следующей формулы обращения:

$$f(\lambda) = \lim_{\tau \rightarrow +0} \frac{F(\lambda + i\tau) - F(\lambda - i\tau)}{G(\lambda + i\tau) - G(\lambda - i\tau)}, \quad (15)$$

которая справедлива почти для всех λ по мере ρ и где

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(t)}{t-z}.$$

В самом деле, легко видеть, что

$$\frac{F(\lambda + i\tau) - F(\lambda - i\tau)}{G(\lambda + i\tau) - G(\lambda - i\tau)} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2} d\varphi(t)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi(t)}{(t-\lambda)^2 + \tau^2}},$$

и поэтому, в силу теоремы 1, это отношение стремится к $f(\lambda)$ почти всюду по мере ρ .

В частном случае, когда $\rho(t) \equiv t$ при $|t| < 1$ и постоянна вне этого интервала (так однако, чтобы быть непрерывной на концах), $G(\lambda + i\tau) - G(\lambda - i\tau) \equiv 1$, и формула (15) превращается в известную формулу обращения интеграла типа Коши.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 6.XII.1967

Ռ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ռ. Ջ. ՄԿՐՏԻՉՅԱՆ

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԻՆՔՆԱՀԱՄԱԼՈՒԾ ՕՊԵՐԱՏՈՐԻ ՍԵՓԱԿԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼՆԵՐԻ
ԼՐԻՎ ՍԻՍՏԵՄԻ ԿԱՌՈՒՑՄԱՆ ԵՎ ՆՐԱՆՅ ՍՏՐՈՒԿՏՈՒՐԱՅԻ
ՀԵՏԱԶՈՏՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում ապացուցված է, որ (1) բանաձևը տալիս է (բոլոր $\varphi \in H$ համար) A կամայական, պարզ և անընդհատ սպեկտրով ինքնահամալուծ օպերատորի համապատասխանող V իզոմետրիկ օպերատորի ներկայացումը: ապացուցված է նաև (9) անհավասարությունը, որտեղից բխում է T_λ սեփական ֆունկցիոնալների անընդհատությունը $\|\cdot\|$ նորմայով:

Ստացված է նաև նոր շրջման բանաձև (15) Կոշու-Լեբեգի-Ստիլտյեսի տիպի ինտեգրալների համար:

R. A. ALEXANDRIAN, R. Z. MKRTICHIAN

ON THE CONSTRUCTION OF COMPLETE SYSTEM OF EIGENFUNCTIONALS OF ARBITRARY SELF-ADJOINT OPERATOR AND ITS STRUCTURE INVESTIGATION

S u m m a r y

It is proved that the formula (1) gives (for all $\varphi \in H$) the representation of the isometric operator V associated with the arbitrary self-adjoint operator A with simple and continuous spectrum. The inequality (9) which implies the continuity of eigenfunctionals in respect to the norm $\|\cdot\|$ is established.

Besides, the new inversion formula for integrals of Cauchy—Lebesgue—Stiltjes type is derived.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Р. А. Александрян. О спектральном разложении произвольных самосопряженных операторов по собственным функционалам, ДАН СССР, 162, 1, 1965, 11—14.
2. Ю. М. Березанский. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, УМЖ, 11, 1, 1959, 16—24.
3. Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Изд. "Наукова думка", Киев, 1965.
4. Г. И. Кац. О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, ДАН СССР, 119, 1, 1958, 19—22.
5. Г. И. Кац. Спектральные разложения самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства, УМЖ, 13, 4, 1961, 13—33.
6. К. Maurin. Math. Scand, 9, 1961, 359—371.
7. К. Морен. Методы гильбертова пространства, Изд. "Мир", Москва, 1965.
8. Р. А. Александрян, Р. З. Мкртчян. Некоторые критерии, характеризующие спектр самосопряженного оператора в абстрактном гильбертовом пространстве, Изв. АН АрмССР, "Математика", 1, 1, 1966, 25—34.
9. Г. Е. Шилов, Б. А. Гуревич. Интеграл, мера и производная, Изд. "Наука", Москва, 1967.
10. Р. А. Александрян. Об одном способе построения полной системы собственных функционалов самосопряженных операторов с лебеговским спектром, ДАН АрмССР, 11, 5, 1965, 257—263.
11. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, Изд. "Наука". 1965.
12. С. Сакс. Теория интеграла, Изд. иностранной литературы, Москва, 1949, стр. 48.