А. А. ТАЛАЛЯН

О СИСТЕМАХ ФУНКЦИЙ, РЯДЫ ПО КОТОРЫМ
 ПРЕДСТАВЛЯЮТ В МЕТРИКЕ $L_p [0, 1]$ ФУНКЦИИ
 ПРОСТРАНСТВА $L_q [0, 1]$, $1 \leq p \leq q$

В в е д е н и е

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система функций, принадлежащих пространству $L_p [0, 1]$, $1 \leq p < \infty$, и M — некоторый класс функций, входящих в $L_p [0, 1]$.

Определение 1. Система $\{\varphi_n(x)\}$ называется системой представления функций класса M в метрике $L_p [0, 1]$, если для любой функции $f(x) \in M$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1)$$

сходящийся к $f(x)$ в метрике $L_p [0, 1]$, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) - f(x) \right|^p dx = 0. \quad (2)$$

В том частном случае, когда $M \equiv L_p [0, 1]$ и для каждой функции $f(x)$ сходящийся к ней ряд (1) определяется единственным образом, система $\{\varphi_n(x)\}$ будет базисом пространства $L_p [0, 1]$.

В настоящей работе устанавливается, что некоторые основные свойства базисов пространства $L_p [0, 1]$, касающиеся представления произвольных измеримых функций рядами (см., напр., [1], теорему 1) и вопроса сходимости почти всюду разложений по базисам пространства L_p (см. [2], [3], [4]), имеют место также для любых систем $\{\varphi_n(x)\}$, являющихся системами представления функций класса $L_q [0, 1]$ в метрике $L_p [0, 1]$, где $1 \leq p \leq q < \infty$.

Доказательство этих теорем в общих чертах совпадает с доказательством соответствующих теорем о базисах, однако в некоторых местах необходимо применять методы, существенно отличающиеся от методов, примененных в случае базисов.

Для формулировки первой теоремы удобно привести следующее определение, введенное в [1].

Определение 2. Будем говорить, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ почти везде конечных измеримых функций на множестве G асимптотически сходит-

ся к функции $f(x)$ в метрике L_p , если для любого $\varepsilon > 0$ можно определить множество $E \subset G$ такое, что

$$\text{mes } E > \text{mes } G - \varepsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - f(x) \right|^p dx = 0. \quad (3)$$

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть p и q — любые числа, удовлетворяющие неравенству $1 \leq p \leq q < \infty$, и $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$.

Тогда для любой почти везде конечной на отрезке $[0, 1]$ измеримой функции $f(x)$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (4)$$

асимптотически сходящийся на этом отрезке к $f(x)$ в метрике L_p .

Вторая теорема, доказанная в настоящей работе, представляет обобщение и, в некотором смысле, усиление формулируемой ниже теоремы Ульянова и Олевского о расходимости рядов Фурье по полным ортогональным системам после перестановок.

Теорема (Ульянов—Олевский). Если $\{\varphi_n(x)\}$ — полная в $L_2[0, 1]$ ортонормированная система, то существует расходящийся почти всюду на отрезке $[0, 1]$ ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_{v_k}(x), \quad (5)$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < +\infty$ и $\{v_k\}$ — некоторая перестановка последовательности натуральных чисел.

Заметим, что в работе [2] П. Л. Ульянова аналогичная теорема была доказана для базисов пространства $L_2[0, 1]$.

В дальнейшем эта теорема была усилена и обобщена в разных направлениях. Именно, А. М. Олевский [3] показал, что в сформулированной выше теореме ряд (5) можно выбрать так, чтобы он был рядом Фурье непрерывной функции по системе $\{\varphi_{v_k}(x)\}$. Ф. Г. Арутюнян [4] распространил теорему Ульянова на базисы любого пространства $L_p[0, 1]$, $p > 1$. При доказательстве всех этих теорем фундаментальную роль играет установленный П. Л. Ульяновым факт о том, что ряд Фурье некоторой функции класса $L_2[0, 1]$ по некоторой системе $\{\gamma_{v_k}(x)\}$, полученной после определенной перестановки системы Хаара $\{\gamma_n(x)\}$, может неограниченно расходиться почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Используя приведенное в [3] усиление указанного свойства системы Хаара (см. [3], стр. 349) и несколько видоизменяя метод, примененный в работах [3] и [4], можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. Пусть p и q — числа, удовлетворяющие неравенству $1 \leq p \leq q < \infty$, и $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q [0, 1]$ в метрике пространства $L_p [0, 1]$.

Тогда существуют сходящийся в метрике $L_p [0, 1]$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (6)$$

и последовательность $\{v_k\}$, полученная путем некоторой перестановки последовательности натуральных чисел $\{n\}$, такие, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{v_k} \varphi_{v_k}(x) \quad (7)$$

расходится почти всюду на отрезке $[0, 1]$.

Нам представляется целесообразным обратить внимание на некоторые вопросы, возникающие в связи с теоремами 1 и 2.

1. Пусть $p > 1$ и $M \subset L_p [0, 1]$ — некоторый класс функций, для которого верна теорема 1, если заменить в ее формулировке класс $L_q [0, 1]$ классом M , иначе говоря, из того, что $\{\varphi_n(x)\}$ является системой представления функций класса M в метрике L_p , вытекает, что для любой конечной измеримой функции $f(x)$ существует сходящийся к ней асимптотически в метрике L_p ряд (4).

Множество всевозможных таких классов функций $M \subset L_p [0, 1]$ обозначим через A_p .

Естественно поставить вопрос о том, насколько узкими могут быть классы M , принадлежащие множеству A_p ? Может ли, например, такой класс M совпадать с классом дифференцируемых функций?

2. Обозначим через B_p множество всевозможных классов $M \subset L_p [0, 1]$, для каждого из которых верна теорема 2, если заменить в ее формулировке класс $L_q [0, 1]$ классом M .

Иначе говоря, $M \in B_p$, если для любой системы $\{\varphi_n(x)\}$, являющейся системой представления функций класса M в метрике L_p существуют сходящийся в метрике L_p ряд (6) и некоторая перестановка v_k последовательности натуральных чисел, обладающих тем свойством, что ряд (7) расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Возникает вопрос: насколько узким может быть класс M , принадлежащий множеству B_p ? Может ли, например, такой класс M совпадать с классом дифференцируемых функций?

3. Представляются интересными также вопросы о взаимоотношениях между множествами A_p и B_p для данного p , вопросы о взаимоотношениях между множествами A_p , а также — между множествами B_p в отдельности.

Можно ли, например, утверждать, что $A_p = B_p$?

Можно ли утверждать, что $A_p \subset A_q$, если $1 \leq q < p$? Ответы на вышеприведенные вопросы нам неизвестны. Теоремы 1 и 2 лишь частично отвечают на вопросы, поставленные в пунктах 1 и 2.

§ 1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1.1. Пусть X — сепарабельное F -пространство* с некоторой нормой $\|x\|_1$, $x \in X$, и X' — подмножество множества X , тоже являющееся сепарабельным F -пространством с некоторой нормой $\|x\|_2$, $x \in X'$, где $\|x\|_2$ сильнее, чем $\|x\|_1$ **.

Пусть далее последовательность $\{x_n\}$ отличных от нуля элементов пространства X обладает тем свойством, что для любого элемента $x \in X'$ существует ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n, \quad (1.1)$$

который сходится к x по норме пространства X , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k - x \right\|_1 = 0. \quad (1.2)$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, если $\|x\|_2 \leq \delta$, то найдется ряд (1.1), который сходится к x в смысле равенства (1.2) и, кроме того, удовлетворяет условию

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1 \leq \varepsilon. \quad (1.3)$$

Доказательство. Обозначим через $y = y(x)$ класс рядов (1.1), сходящихся по норме пространства X к одному и тому же элементу $x \in X$. Другими словами, y — класс рядов (1.1), удовлетворяющих (1.2) для данного $x \in X$.

Рассмотрим множество Y всех классов $y = y(x)$, где x — всевозможные элементы из X , для которых существуют сходящиеся к ним в метрике пространства X ряды (1.1)***. В множестве Y естественным образом можно ввести линейные операции и норму.

Если $y_1 = y(x_1)$ и $y_2 = y(x_2)$, то через $y_1 + y_2$ обозначается класс рядов, сходящихся по норме пространства X к элементу $x_1 + x_2$. Если $y = y(x)$ и c — действительное число, то через cy обозначается класс рядов (1.1), сходящихся к элементу cx . Отметим, что в полученном линейном пространстве нулевым элементом является класс тех рядов, которые по норме пространства X сходятся к нулю.

Каждому элементу $y \in Y$ приписывается норма

$$\|y\| = \inf_{\{c_k\}} \sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1, \quad (1.4)$$

где $\{c_k\}$ — последовательность коэффициентов ряда класса y .

* Определение F -пространства см. [5], стр. 81.

** Если $x_n \in X'$, $z \in X'$ и $\|x_n - z\|_2 \rightarrow 0$, то $\|x_n - z\|_1 \rightarrow 0$.

*** Множество таких элементов x содержит множество X' .

Нетрудно видеть, что линейное пространство Y с нормой (1.4) является F -пространством (см. [6], замечание 2).

Рассмотрим совокупность Z упорядоченных пар $(x, y(x))$, где x пробегает множество X' и $y(x)$ — класс рядов вида (1.1), сходящихся к элементу x по норме пространства X .

Легко видеть, что множество Z становится F -пространством, если определить линейные операции и норму соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, y(x_1)) + \beta(x_2, y(x_2)) &= (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y(x_1) + \beta y(x_2)) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2, y(\alpha x_1 + \beta x_2)), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\|(x, y(x))\| = \|x\|_2 + \|y(x)\|; \quad (1.6)$$

непрерывность линейных операций и свойство инвариантности метрики (1.6) непосредственно следуют из соответствующих свойств пространств X' и Y .

Проверим выполнение свойства полноты. Если последовательность элементов $(x'_n, y'_n) = (x'_n, y(x'_n))$, $n = 1, 2, \dots$ фундаментальна в смысле метрики (1.6), то

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|x'_n - x'_m\|_2 = 0, \quad (1.7)$$

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y'_n - y'_m\| = \lim_{n, m \rightarrow \infty} \|y(x'_n - x'_m)\| = 0. \quad (1.8)$$

Из полноты пространств X' и Y вытекает существование элементов $x \in X'$ и $y' \in Y$ таких, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x\|_2 = 0 \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \|y'_n - y'\| = 0. \quad (1.9)$$

Пусть $x' \in X$ — тот элемент, к которому сходятся ряды класса y' , т. е. $y' = y(x')$. Тогда из определения нормы (1.4) и из того, что $\|y'_n - y'\| = \|y(x'_n - x')\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, вытекает

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x'\|_1 = 0. \quad (1.10)$$

С другой стороны, из первого равенства (1.9) выводим, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x'_n - x''_1\|_2 = 0. \quad (1.11)$$

Следовательно, $x = x'$ и последовательность $\{(x'_n, y(x'_n))\}$ сходится в метрике пространства Z к элементу $(x, y(x)) \in Z$.

Рассмотрим отображение $A \{(x, y(x))\} = x$ F -пространства Z на F -пространство X' . Так как линейный оператор A непрерывен и взаимно однозначно отображает Z на X' , то обратный оператор A^{-1} , отображающий X' на Z , тоже непрерывен ([5], стр. 114). Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ можно определить $\delta > 0$ такое, что, если $\|x''_1\|_2 < \delta$, $x \in X'$, то

$$\|y(x)\| \leq \|y(x'')\| + \|x''_1\|_2 < \varepsilon. \quad (1.12)$$

Из (1.12) и (1.4) непосредственно вытекает существование сходящегося к x в метрике пространства X ряда (1.1), частные суммы которого удовлетворяют неравенству

$$\sup_n \left\| \sum_{k=1}^n c_k x_k \right\|_1 < \varepsilon. \quad (1.13)$$

Тем самым лемма 1.1. доказана.

Положим в формулировке этой леммы $X \equiv L_p [0, 1]$, $p \geq 1$
 $X' \equiv L_q [0, 1]$, $q \geq p$, тогда справедлива

Лемма 1.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — последовательность отличных от нуля функций пространства $L_p [0, 1]$, обладающих тем свойством, что для любой функции $f(x) \in L_q [0, 1]$, $1 \leq p \leq q$ существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1.14)$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L_p [0, 1]$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что, если $f(x) \in L_q [0, 1]$ и

$$\|f(x)\|^{L_q} = \left(\int_{\delta}^1 |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < \delta, \quad (1.15)$$

то существует сходящийся к $f(x)$ в метрике $L_p [0, 1]$ ряд (1.14), частные суммы которого удовлетворяют неравенствам

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \varepsilon; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.16)$$

При доказательстве теорем применяется следующая

Лемма 1.3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система отличных от нуля функций пространства $L_p [0, 1]$, являющаяся системой представления класса $L_p [0, 1]$ в метрике пространства $L_p [0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, и l — действительное число.

Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ можно определить $\delta > 0$ такое, что, если $[c, d] \subset [0, 1]$, $d - c < \delta$, то для любых $\eta > 0$ и натурального N существуют функция $\psi(x)$ и полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N, \quad (1.17)$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$1^\circ. \quad \psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E_1 \\ -1, & x \in E_2 \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_1 \cup E_2), \end{cases} \quad (1.18)$$

где множества E_1, E_2 состоят из конечного числа непересекающихся отрезков, лежащих на отрезке $[c, d]$ и

$$E_1 \cap E_2 = 0, \text{mes } E_1 = \text{mes } E_2 = \frac{1}{4} (d-c); \quad (1.19)$$

$$2^\circ. \quad \left\| \psi(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \eta; \quad (1.20)$$

$$3^\circ. \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \varepsilon, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (1.21)$$

Доказательство. Заметим, что, не ограничивая общности, можно считать $l > 0$. Согласно лемме 1.2 существует $\delta_1 > 0$ такое, что для любой функции $f(x) \in L_q[0, 1]$ из неравенства

$$\|f(x)\|^{L_q} < \delta_1 \quad (1.22)$$

вытекает существование сходящегося к $f(x)$ в метрике $L_p[0, 1]$ ряда $\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$, частные суммы которого удовлетворяют неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.23)$$

Пусть

$$0 < \delta < \left(\frac{\delta_1}{l}\right)^q, \quad [c, d] \subset [0, 1], \quad d-c < \delta. \quad (1.24)$$

Рассмотрим последовательность $\{\psi_n(x)\}$, где

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} l \cdot \zeta_n \left(\frac{x-c}{d-c}\right), & x \in [c, d] \\ 0, & x \notin [c, d] \end{cases} \quad (1.25)$$

и $\{\zeta_n(x)\}$ — система Радемахера.

Так как

$$\|\psi_n(x)\|^{L_q} = \frac{1}{2} (d-c)^{1/q} \cdot l < \delta_1, \quad n=1, 2, \dots, \quad (1.26)$$

то для каждой функции $\psi_n(x)$, $n=1, 2, \dots$ существует сходящийся к ней в метрике $L_p[0, 1]$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} \varphi_k(x), \quad (1.27)$$

частные суммы которого удовлетворяют неравенству

$$\left\| \sum_{k=1}^i a_k^{(n)} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{4}, \quad i=1, 2, \dots \quad (1.28)$$

Из (1.28) вытекает, что для каждого фиксированного значения k последовательность чисел $a_k^{(n)}$, $n=1, 2, \dots$ ограничена. Следовательно, существует возрастающая последовательность натуральных чисел

$$m_1 < m_2 < \dots < m_j < \dots \quad (1.29)$$

такая, что каждая последовательность $\{a_k^{(m_j)}\}$, $1 \leq k \leq N$ имеет некоторый конечный предел b_k

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_k^{(m_j)} = b_k, \quad 1 \leq k \leq N. \quad (1.30)$$

Рассмотрим последовательность рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j)} \varphi_k(x), \text{ где } c_k^{(j)} = a_k^{(m_{j-1})} - a_k^{(m_j)}, j = 1, 2, \dots \quad (1.31)$$

Так как

$$\lim_{j \rightarrow \infty} c_k^{(j)} = 0, 1 < k \leq N, \quad (1.32)$$

то число j_0 можно взять настолько большим, что

$$\left\| \sum_{k=1}^N c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \frac{\eta}{2}. \quad (1.33)$$

Положим

$$\psi_0(x) = \psi_{m_{j_0-1}}(x) - \psi_{m_{j_0}}(x). \quad (1.34)$$

Пользуясь тем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \quad (1.35)$$

сходится к $\psi_0(x)$ в метрике L_p , возьмем $m > N$ такое, чтобы

$$\left\| \sum_{k=1}^m c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) - \psi_0(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2}. \quad (1.36)$$

Теперь легко убедиться, что функция $\psi(x) \equiv \psi_0(x)$ и полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{k=N+1}^m c_k^{(j_0)} \varphi_k(x), c_k = c_k^{(j_0)}, N < k \leq m \quad (1.37)$$

удовлетворяют условиям 1°, 2° и 3° леммы 1.3.

Выполнение условия 1° непосредственно следует из (1.25), (1.34) и из определения функций Радемахера $\zeta_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$.

Условие 2° выполнено ввиду (1.33) и (1.36).

Так как, согласно (1.28)

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k^{(j_0)} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k^{(m_{j_0-1})} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=1}^n c_k^{(m_{j_0})} \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad (1.38)$$

то для полинома (1.37) выполнено также условие 3° и, следовательно, лемма 1.3 доказана.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Лемма 2.1. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, а $f(x)$ — функция, принимающая постоянные значения на каждом из непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq s$ и равная нулю вне множества $\Delta = \bigcup_{k=1}^s [a_k, b_k]$.

Тогда для любого натурального N и положительного числа $\varepsilon > 0$ можно определить ступенчатую функцию $g(x)$ и полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N,$$

удовлетворяющие условиям

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E \\ -f(x), & x \in E' \\ 0, & x \in [0, 1] - (E \cup E'), \end{cases} \quad (2.1)$$

где множества E, E' состоят из конечного числа отрезков $E \cup E' \subset \Delta$

$$E \cap E' = 0, \quad \text{mes } E = \frac{1}{4} \text{mes } \Delta, \quad \text{mes } E' = \frac{1}{4} \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.2)$$

$$\|g(x)\| \leq \max |f(x)|, \quad x \in [0, 1]^*, \quad (2.3)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - g(x) \right\|^{L_p} \leq \sigma, \quad (2.4)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \sigma + \|g(x)\|^{L_p}, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.5)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} = \left(\int_{c\Delta} \left| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \sigma, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.6)$$

Доказательство. Пусть число $\delta > 0$ выбрано так, что оно удовлетворяет условиям леммы 1.3 для каждого значения l функции $f(x)$ и для $\varepsilon = \frac{\sigma}{2}$.

Разделим множество Δ на конечное число непересекающихся интервалов $\Delta_i, 1 \leq i \leq \zeta$, где

$$\text{mes } \Delta_i < \delta, \quad 1 \leq i \leq \zeta. \quad (2.7)$$

Согласно лемме 1.3 для заданных $N = N_i, \eta = \frac{\varepsilon}{2\zeta}$ и отрезка $[c, d] = \Delta_i$ можно определить функцию $\psi_i(x)$ и полином

$$\sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad (2.8)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\psi_i(x) = \begin{cases} l_i, & x \in E_1^{(i)} \\ -l_i, & x \in E_2^{(i)} \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_1^{(i)} \cup E_2^{(i)}), \end{cases} \quad (2.9)$$

* Неравенство (2.3) вытекает из (2.1), но для дальнейшего удобно привести его отдельно.

где l_i — значение функции $f(x)$ на интервале Δ_i , а множества $E_1^{(i)}$ и $E_2^{(i)}$ состоят из конечного числа непересекающихся отрезков, лежащих на Δ_i и

$$E_1^{(i)} \cap E_2^{(i)} = 0, E_1^{(i)} \cup E_2^{(i)} \subset \Delta_i, \text{mes } E_1^{(i)} = \text{mes } E_2^{(i)} = \frac{1}{4} \text{mes } \Delta_i, \quad (2.10)$$

$$\left\| \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \psi_i(x) \right\|^{L_p} < \frac{\sigma}{2^i}, \quad 1 \leq i \leq \zeta, \quad (2.11)$$

$$\left\| \sum_{k=N_i+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad N_i + 1 \leq n \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq \zeta. \quad (2.12)$$

Выбирая для каждого Δ_i , $1 \leq i \leq \zeta$ функцию $\psi_i(x)$ и полином (2.8) очевидно, можно требовать, чтобы выполнялось также условие

$$N = N_1, \quad N_i = m_{i-1}, \quad 1 < i \leq \zeta. \quad (2.13)$$

Докажем, что функция

$$g(x) = \sum_{i=1}^{\zeta} \psi_i(x) \quad (2.14)$$

и полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{i=1}^{\zeta} \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad N_1 = N, \quad m = m. \quad (2.15)$$

удовлетворяют условиям леммы 2.1. В самом деле, полагая

$$E = \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_1^{(i)}, \quad E' = \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_2^{(i)} \quad (2.16)$$

и учитывая условия (2.9), (2.10), можно немедленно проверить, что условия (2.1), (2.2) и (2.3) леммы 2.1 для функции (2.14) выполнены. Далее, согласно (2.11), имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^j \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \sum_{i=1}^j \psi_i(x) \right\|^{L_p} \leq \sum_{i=1}^j \left\| \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \psi_i(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad j \leq \zeta. \quad (2.17)$$

Из (2.17), где положено $j = \zeta$, и из равенств (2.14) и (2.15) вытекает выполнение условия (2.4) леммы 2.1.

Пусть $N+1 \leq n \leq m$ и число j выбрано так, что

$$N_j + 1 \leq n \leq m_j, \quad 1 \leq j \leq \zeta. \quad (2.18)$$

Проверим выполнение условий (2.5) и (2.6).

В том случае, когда $j = 1$, выполнение этих условий следует из (2.12). Если же $2 \leq j \leq \zeta$, учитывая (2.17) и (2.12), будем иметь

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq$$

$$\leq \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \psi_l(x) \right\|^{L_p} + \sigma. \quad (2.19)$$

С другой стороны, так как $\psi_l(x) = 0$, $x \in c\Delta_l$, имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{l=1}^j \psi_l(x) \right\|^{L_p} \leq \left\| g(x) \right\|^{L_p}, \quad 1 \leq j \leq \zeta. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.20) следует (2.5).

Так как $c\Delta \subset c\Delta_l$ и, следовательно, $\psi_l(x) = 0$, $x \in c\Delta$, то из (2.11) следует, что

$$\left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) - \psi_l(x) \right\|^{L_p} < \frac{\sigma}{2^l}, \quad 1 \leq l \leq \zeta. \quad (2.21)$$

Учитывая (2.21) и (2.12), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} &= \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N_{j+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{j-1} \left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_{j+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено также условие (2.6), и лемма (2.1) доказана.

Лемма 2.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $\mathcal{C}_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, а $f(x)$ принимает постоянные значения на каждом из непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq s$ и равна нулю вне множества $\Delta = \bigcup_{k=1}^s [a_k, b_k]$.

Тогда для любых натуральных чисел R и N и положительного числа $\eta > 0$ существуют полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N \quad (2.22)$$

измеримое множество $F \subset \Delta$, удовлетворяющие условиям

$$\text{mes } F = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4}\right)^R \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.23)$$

$$\|H(x) - f(x)\|_F^{L_p} = \left(\int_F |f(x) - H(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \eta, \quad (2.24)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \eta, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.25)$$

где $c\Delta = [0, 1] - \Delta$.

$$\leq \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \psi_l(x) \right\|^{L_p} + \sigma. \quad (2.19)$$

С другой стороны, так как $\psi_l(x) = 0$, $x \in c\Delta_l$, имеет место неравенство

$$\left\| \sum_{l=1}^j \psi_l(x) \right\|^{L_p} < \left\| g(x) \right\|^{L_p}, \quad 1 \leq j \leq \zeta. \quad (2.20)$$

Из (2.19) и (2.20) следует (2.5).

Так как $c\Delta \subset c\Delta_l$ и, следовательно, $\psi_l(x) = 0$, $x \in c\Delta$, то из (2.11) следует, что

$$\left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) - \psi_l(x) \right\|^{L_p} < \frac{\sigma}{2\zeta}, \quad 1 \leq l \leq \zeta. \quad (2.21)$$

Учитывая (2.21) и (2.12), получим

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} &= \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \\ &\leq \sum_{l=1}^{j-1} \left\| \sum_{k=N_l+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma. \end{aligned}$$

Таким образом, выполнено также условие (2.6), и лемма (2.1) доказана.

Лемма 2.2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, а $f(x)$ принимает постоянные значения на каждом из непересекающихся отрезков $[a_k, b_k]$, $1 \leq k \leq s$ и равна нулю вне множества $\Delta = \bigcup_{k=1}^s [a_k, b_k]$.

Тогда для любых натуральных чисел R и N и положительного числа $\eta > 0$ существуют полином по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N \quad (2.22)$$

измеримое множество $F \subset \Delta$, удовлетворяющие условиям

$$\text{mes } F = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4}\right)^R \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.23)$$

$$\|H(x) - f(x)\|_F^{L_p} = \left(\int_F |f(x) - H(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \eta, \quad (2.24)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \eta, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.25)$$

где $c\Delta = [0, 1] - \Delta$.

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} = \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \eta + 2R \cdot M, \quad N < n \leq m, \quad (2.26)$$

где $M = \max |f(x)|$.

Эта лемма доказывается путем последовательного применения леммы 2.1. На первом шагу применим лемму 2.1 для функции $f(x)$, натурального N и положительного числа $\sigma = \frac{\eta}{2R}$.

Тогда мы можем определить ступенчатую функцию $g_1(x)$ и полином вида

$$\sum_{k=N+1}^{m_1} c_k \varphi_k(x), \quad (2.27)$$

удовлетворяющие условиям

$$g_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in c\Delta = [0, 1] - \Delta \\ f(x), & x \in E_1, \end{cases} \quad (2.28)$$

где E_1 состоит из конечного числа отрезков и

$$E_1 \subset \Delta, \quad \text{mes } E_1 = \frac{1}{4} \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.29)$$

$$|g_1(x)| \leq M, \quad x \in [0, 1], \quad (2.30)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} c_k \varphi_k(x) - g_1(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R}, \quad (2.31)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R} + \|g_1(x)\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R} + M, \quad N+1 \leq n \leq m_1, \quad (2.32)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R}, \quad N+1 \leq n \leq m_1. \quad (2.33)$$

Заметим также, что согласно (2.28) и (2.31) будем иметь

$$\left\| \sum_{k=N+1}^{m_1} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{E_1}^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R}. \quad (2.34)$$

Пусть определены ступенчатые функции $g_i(x)$, множества E_i , $1 \leq i \leq \zeta$, $\zeta < R$ и полиномы

$$\sum_{k=N_i+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad 1 \leq i \leq \zeta, \quad \zeta < R, \quad (2.35)$$

удовлетворяющие условиям

$$\bigcup_{i=1}^{\zeta} E_i \subset \Delta \quad \text{и} \quad \text{mes } \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_i = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4}\right)^{\zeta} \cdot \text{mes } \Delta, \quad (2.36)$$

где множество

$$\Delta_{\zeta} = \Delta - \bigcup_{i=1}^{\zeta} E_i \quad (2.37)$$

является соединением конечного числа отрезков;

$$g_l(x) = 0, \quad x \in c\Delta, \quad |g_l(x)| \leq 2^{l-1} \cdot M, \quad x \in [0, 1], \quad 1 \leq l \leq \zeta, \quad (2.38)$$

$$\sum_{l=1}^{\zeta} g_l(x) = f(x), \quad x \in \bigcup_{l=1}^{\zeta} E_l, \quad (2.39)$$

$$N = N_1, \quad m_l = N_{l+1}, \quad 1 \leq l \leq \zeta - 1, \quad (2.40)$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{\zeta} \sum_{k=N_{l+1}}^{m_l} c_k \varphi_k(x) - \sum_{l=1}^{\zeta} g_l(x) \right\|^{L_p} < \frac{\zeta \cdot \eta}{2R}, \quad \zeta < R. \quad (2.41)$$

Положим

$$f_{\zeta}(x) = f(x) - \sum_{l=1}^{\zeta} g_l(x). \quad (2.42)$$

Из (2.38) и (2.39) следует, что

$$f_{\zeta}(x) = 0, \quad x \in c\Delta_{\zeta}, \quad c\Delta_{\zeta} = [0, 1] - \Delta_{\zeta}, \quad (2.43)$$

$$|f_{\zeta}(x)| \leq 2^{\zeta} \cdot M. \quad (2.44)$$

Применим лемму 2.2, полагая в ее формулировке $f(x) = f_{\zeta}(x)$, $N = m_{\zeta}$,

$\sigma = \frac{\eta}{2R}$. Тогда определяются функция $g_{\zeta+1}(x)$, множество $E_{\zeta+1}$ и по-

лином

$$\sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^{m_{\zeta+1}} c_k \varphi_k(x), \quad N_{\zeta+1} \equiv m_{\zeta}, \quad m_{\zeta+1} > N_{\zeta+1} \quad (2.45)$$

такие, что

$$\max |g_{\zeta+1}(x)| \leq 2^{\zeta} \cdot M, \quad (2.46)$$

$$g_{\zeta+1}(x) = f_{\zeta}(x), \quad x \in E_{\zeta+1}, \quad g_{\zeta+1}(x) = 0, \quad x \in c\Delta_{\zeta}, \quad (2.47)$$

где множество $E_{\zeta+1}$ является соединением конечного числа отрезков и

$$E_{\zeta+1} \subset \Delta_{\zeta}, \quad \text{mes} E_{\zeta+1} = \frac{1}{4} \text{mes} \Delta_{\zeta}, \quad (2.48)$$

$$\left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^{m_{\zeta+1}} c_k \varphi_k(x) - g_{\zeta+1}(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R}, \quad (2.49)$$

$$\left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R} + \left\| g_{\zeta+1}(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\eta}{2R} + M \cdot 2^{\zeta}, \quad N_{\zeta+1} < n \leq m_{\zeta+1}, \quad (2.50)$$

$$\left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta_{\zeta}}^{L_p} < \frac{\eta}{2R}, \quad N_{\zeta+1} < n \leq m_{\zeta+1}. \quad (2.51)$$

Теперь заметим, что, в силу (2.36), (2.37) и (2.48)

$$\bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l \subset \Delta \quad \text{и} \quad \text{mes} \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l = \text{mes} \Delta - \left(\frac{3}{4}\right)^{\zeta} \text{mes} \Delta + \text{mes} E_{\zeta+1}, \quad (2.52)$$

где

$$\text{mes } E_{\zeta+1} = \frac{1}{4} \text{mes } \Delta_{\zeta} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{\zeta} \cdot \text{mes } \Delta. \quad (2.53)$$

Из (2.52) и (2.53) следует

$$\bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l \subset \Delta, \quad \text{mes } \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4} \right)^{\zeta+1} \cdot \text{mes } \Delta. \quad (2.54)$$

Далее, из (2.39), (2.42), (2.47) и (2.48) вытекает

$$\sum_{l=1}^{\zeta+1} g_l(x) = f(x), \quad x \in \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l. \quad (2.55)$$

Так как $f_{\zeta+1}(x) = f(x) - \sum_{l=1}^{\zeta+1} g_l(x)$ есть ступенчатая функция и множе-

ство $\Delta_{\zeta+1} = \Delta - \bigcup_{l=1}^{\zeta+1} E_l$ состоит из конечного числа отрезков, то описанное выше построение полиномов (2.45) и функций $g_{\zeta+1}(x)$ можно продолжить неограниченно.

Для всех значений $0 \leq \zeta \leq R-1$ будут выполнены условия (2.48)–(2.51) и (2.54), (2.55).

Положим

$$H(x) = \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) = \sum_{\zeta=1}^R \sum_{k=N_{\zeta+1}}^{m_{\zeta}} c_k \varphi_k(x), \quad N_1 = N, \quad m_{\zeta} = N_{\zeta+1}, \quad m_R = m \quad (2.56)$$

и

$$F = \bigcup_{\zeta=1}^R E_{\zeta}. \quad (2.57)$$

Легко видеть, что полином (2.56) и множество (2.57) удовлетворяют условиям (2.23)–(2.26) леммы 2.2.

В самом деле, (2.23) выполнено согласно (2.54), где положено $\zeta = R-1$.

Из (2.49) и (2.56) вытекает

$$\left\| H(x) - \sum_{\zeta=1}^R g_{\zeta}(x) \right\|^{L_p} \leq \sum_{\zeta=1}^R \left\| \sum_{k=N_{\zeta+1}}^{m_{\zeta}} c_k \varphi_k(x) - g_{\zeta}(x) \right\|^{L_p} < \eta \quad (2.58)$$

и, следовательно, на основании (2.55), где $\zeta = R-1$, и (2.57) получаем

$$\|H(x) - f(x)\|_p^{L_p} \leq \eta. \quad (2.59)$$

Остается проверить выполнение (2.25) и (2.26).

Пусть $N+1 \leq n \leq m$ и число i выбрано так (см. (2.56)), что

$$N_i < n \leq m_i, \quad 1 \leq i \leq R. \quad (2.60)$$

При $i=1$ в (2.60) выполнение (2.25) и (2.26) вытекает из (2.51) и (2.50), в которых положено $\zeta=0$ (см. также (2.32) и (2.33)).

Если же $i \geq 2$, имеем

$$\sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) = \sum_{\tau=1}^{i-1} \sum_{k=N_\tau+1}^{m_\tau} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=N_i+1}^n c_k \varphi_k(x), \quad N_i < n \leq m_i, \quad i \leq R. \quad (2.61)$$

Из (2.61) и (2.51), где $1 \leq i \leq R$, получаем

$$\sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \left\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \sum_{\tau=1}^{i-1} \left\| \sum_{k=N_\tau+1}^{m_\tau} c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_i+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{i}{R} \cdot \eta < \eta, \quad (2.62)$$

а из (2.50), где $1 < i \leq R$, вытекает

$$\sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \left\|^{L_p} < \sum_{\tau=1}^{i-1} \left\| \sum_{k=N_\tau+1}^{m_\tau} c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=N_i+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \frac{i}{R} \cdot \eta + M \cdot \sum_{\tau=1}^i 2^{\tau-1}. \quad (2.63)$$

Следовательно

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \eta + 2^{i-1} \cdot M \leq \eta + 2^R \cdot M, \quad N < n \leq m. \quad (2.64)$$

Таким образом, лемма 2.2 доказана.

На основании леммы 2.2 устанавливаются две леммы (см. леммы 2.3 и 2.4), которые непосредственно применяются при доказательстве теоремы 1.

Лемма 2.3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$ и $F(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, равная нулю вне некоторого измеримого множества E , $E \subset [0, 1]$.

Тогда для любого натурального N и положительного $\sigma > 0$ можно определить множества F_1, F_2 и полином вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N, \quad (2.65)$$

для которых выполнены условия

$$\text{а) } F_1 \subset E, \quad \text{mes } F_1 > \text{mes } E - \sigma,$$

$$\text{б) } F_2 \subset cE, \quad \text{mes } F_2 > \text{mes } cE - \sigma, \quad cE = [0, 1] - E,$$

$$\text{в) } \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - F(x) \right\|_{F_1}^{L_p} < \sigma,$$

$$\text{д) } \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} < \sigma, \quad N+1 \leq n \leq m.$$

Доказательство. Возьмем ступенчатую функцию $f(x)$, обладающую свойствами

$$f(x) = 0, \quad x \in c\Delta, \quad (2.66)$$

где Δ — соединение конечного числа отрезков

$$\text{mes } \Delta \cap E > \text{mes } E - \frac{\sigma}{2}, \quad (2.67)$$

$$\text{mes } c\Delta \cap cE > \text{mes } cE - \sigma, \quad (2.68)$$

$$|F(x) - f(x)| < \frac{\sigma}{2}, \quad x \in \Delta \cap E. \quad (2.69)$$

Далее возьмем натуральное число R такое, что

$$\left(\frac{3}{4}\right)^R < \frac{\sigma}{2}. \quad (2.70)$$

Применив лемму 2.2 для N , R и $\eta = \frac{\sigma}{2}$, определим полином (2.65) и множество F , которые, согласно (2.23), (2.24) и (2.25), будут удовлетворять условиям

$$F \subset \Delta, \quad \text{mes } F > \text{mes } \Delta - \frac{\sigma}{2}, \quad (2.71)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_F^{L_p} < \frac{\sigma}{2}, \quad (2.72)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.73)$$

Положим

$$F_1 = F \cap E, \quad F_2 = c\Delta \cap cE. \quad (2.74)$$

Из (2.71) и (2.67) следует, что

$$\text{mes } F_1 > \text{mes } E - \sigma. \quad (2.75)$$

Следовательно, множества F_1 и F_2 , определенные равенствами (2.74) удовлетворяют условиям α) и β) (см. (2.68)).

Так как $F_1 \subset E$ и $F_2 \subset c\Delta \cap cE$, то из (2.72) и (2.69) следует

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - F(x) \right\|_{F_1}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} + \left\| f(x) - F(x) \right\|_{F_1}^{L_p} < \sigma. \quad (2.76)$$

Из (2.73) и из того, что $F_2 \subset c\Delta$, вытекает

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} < \frac{\sigma}{2}, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.77)$$

Таким образом, лемма 2.3 доказана.

Лемма 2.4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$.

Тогда для любого числа $0 < \varepsilon < 1$ можно определить число $\delta > 0$ такое, что, если $F(x)$ — измеримая функция, равная нулю вне измеримого множества $E \subset [0, 1]$ и такая, что

$$\|F(x)\|_{E_1}^{Lp} < \delta^*, \quad (2.78)$$

то для любого натурального N и положительного числа ε существуют множества E_1, E_2 и полином вида

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N, \quad (2.79)$$

удовлетворяющие условиям

$$A) \quad E_1 \subset E, \quad \text{mes } E_1 > \text{mes } E - \varepsilon,$$

$$B) \quad E_2 \subset cE, \quad \text{mes } E_2 > \text{mes } cE - \varepsilon,$$

$$C) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - F(x) \right\|_{E_1}^{Lp} < \varepsilon,$$

$$D) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{Lp} < \varepsilon, \quad N+1 \leq n \leq m,$$

$$E) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{E_2}^{Lp} < \sigma, \quad N+1 \leq n \leq m.$$

Доказательство. Возьмем натуральное R настолько большим, чтобы

$$\left(\frac{3}{4}\right)^R < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.80)$$

и после выбора R выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы для функции $F(x)$ из выполнения неравенства (2.78) вытекало существование такого измеримого множества E_0 , что

$$E_0 \subset E, \quad \text{mes } E_0 > \text{mes } E - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.81)$$

$$\max_{x \in E_0} |F(x)| = M < \frac{\varepsilon}{4 \cdot 2^R}. \quad (2.82)$$

Предположим, что $F(x)$ — измеримая функция, удовлетворяющая неравенству (2.78), и E_0 — выбранное в зависимости от этой функции множество, удовлетворяющее (2.81) и (2.82).

Снова, как и при доказательстве леммы 2.3, возьмем ступенчатую функцию $f(x)$, обладающую свойствами

$$f(x) = 0, \quad x \in c\Delta, \quad (2.83)$$

где Δ — соединение конечного числа отрезков,

$$\text{mes } \Delta \cap E_0 > \text{mes } E_0 - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.84)$$

$$\text{mes } c\Delta \cap cE > \text{mes } cE - \varepsilon, \quad (2.85)$$

* Нужно отметить, что в формулировке этой леммы число δ зависит только от ε и после его выбора $N, \sigma, F(x)$ и множество E произвольны (при выполнении (2.78)).

$$|f(x) - F(x)| < \frac{\sigma}{2}, \quad x \in \Delta \cap E_0, \quad (2.86)$$

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in E_0. \quad (2.87)$$

Применив лемму 2.2 для N , R и $\tau_1 = \min \left\{ \frac{\sigma}{2}, \frac{\varepsilon}{2} \right\}$, определим полином (2.79) и измеримое множество F , удовлетворяющие условиям

$$F \subset \Delta, \quad \text{mes } F = \text{mes } \Delta - \left(\frac{3}{4} \right)^R \cdot \text{mes } \Delta > \text{mes } \Delta - \frac{\varepsilon}{4}, \quad (2.88)$$

$$\left\| f(x) - \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) \right\|_F^{L_p} < \frac{\sigma}{2}, \quad (2.89)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{c\Delta}^{L_p} \leq \frac{\sigma}{2}, \quad N+1 \leq n \leq m, \quad (2.90)$$

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{\varepsilon}{2} + M \cdot 2^R < \varepsilon, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (2.91)$$

Положим

$$E_1 = F \cap E_0, \quad E_2 = c\Delta \cap cE. \quad (2.92)$$

Из (2.88), (2.84) и (2.81) следует

$$E_1 \subset E, \quad \text{mes } E_1 > \text{mes } E - \varepsilon, \quad (2.93)$$

а, в силу (2.85)

$$E_2 \subset cE, \quad \text{mes } E_2 > \text{mes } cE - \varepsilon. \quad (2.94)$$

Таким образом, множества E_1 , E_2 , определенные равенствами (2.92) удовлетворяют условиям *A*) и *B*) леммы 2.4.

Так как $E_1 \subset \Delta \cap E_0$ и $E_1 \subset F$ (см. (2.88) и (2.92)), то из (2.86) и (2.89) следует выполнение условия *C*).

Выполнение *D*) следует из (2.91).

Точно так же выполнение условия *E*) следует из (2.90) и из того что $E_2 \subset c\Delta$. Итак, лемма 2.4 доказана.

Теперь обратимся к доказательству теоремы 1. Пусть $\{\varepsilon_k\}$ — последовательность положительных чисел, где

$$0 < \varepsilon_k < 1, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < +\infty, \quad (2.95)$$

а $\{\delta_k\}$ — такая сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел, что каждое число δ_k , $k = 1, 2, \dots$ выбрано в зависимости от ε_k согласно лемме 2.4, т. е., если в формулировке этой леммы положить $\varepsilon = \varepsilon_k$, то $\delta = \delta_k$ удовлетворяет требованиям леммы 2.4. Пусть далее $f(x)$ — почти везде конечная измеримая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$.

Применяя лемму 2.3, определим полином

$$\sum_{k=1}^{m_1} c_k \varphi_k(x)$$

и множество A_1 такие, что

$$A_1 \subset [0, 1], \text{mes } A_1 > 1 - \varepsilon_1, \quad (2.96)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_1} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_1}^{Lp} < \delta_2. \quad (2.97)$$

Предположим, что определен полином

$$\sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) \equiv \sum_{l=1}^j \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x), \quad 0 = n_0 < n_1 < \dots < n_j \quad (2.98)$$

и множество A_j такие, что

$$A_j \subset [0, 1], \text{mes } A_j > 1 - \varepsilon_j, \quad (2.99)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_j}^{Lp} < \delta_{j+1}. \quad (2.100)$$

Применив лемму 2.4 для функции

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x), & x \in A_j \\ 0, & x \in cA_j \end{cases} \quad (2.101)$$

и для чисел $\varepsilon = \varepsilon_{j+1}$, $\delta = \delta_{j+1}$, $N = n_j$, $\sigma = \frac{\delta_{j+2}}{4}$, мы определим полином

$$\sum_{k=n_j+1}^{m_j} c_k \varphi_k(x), \quad n_j > m_j \quad (2.102)$$

и множество E_j , удовлетворяющие условиям

$$E_j \subset A_j, \text{mes } E_j > \text{mes } A_j - \varepsilon_{j+1}, \quad (2.103)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{E_j}^{Lp} = \left\| \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) + \sum_{k=n_j+1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{E_j}^{Lp} \leq \frac{\delta_{j+2}}{4}, \quad (2.104)$$

$$\left\| \sum_{k=n_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{E_j}^{Lp} \leq \left\| \sum_{k=n_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{Lp} < \varepsilon_{j+1}, \quad n_j + 1 \leq n \leq m_j. \quad (2.105)$$

Заметим, что (2.103), (2.104) и (2.105) следуют, соответственно, из условий A), C) и D) леммы 2.4. Вследствие этого, как видно из дальнейших рассуждений, при доказательстве теоремы 1 можно применять только указанные условия леммы.

После определения полинома (2.102) применяем лемму 2.3, полагая

$$F(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x), & x \in cE_j \\ 0, & x \in E_j, \end{cases} \quad (2.106)$$

$$N = m_j, \sigma = \min \left\{ \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \frac{\delta_{j+2}}{4} \right\}. \quad (2.107)$$

Определяются полином

$$\sum_{k=m_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x), \quad n_{j+1} > m_j + 1 > n_j \quad (2.108)$$

и множества F_1 и F_2 , для которых

$$F_1 \subset cE_j, \text{mes } F_1 > \text{mes } cE_j - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \quad (2.109)$$

$$F_2 \subset E_j, \text{mes } F_2 > \text{mes } E_j - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \quad (2.110)$$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} < \frac{\delta_{j+2}}{4}, \quad (2.111)$$

$$\left\| \sum_{k=m_j+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \min \left\{ \frac{\varepsilon_{j+1}}{2}, \frac{\delta_{j+2}}{4} \right\}, \quad m_j < n \leq n_{j+1}. \quad (2.112)$$

Положим

$$A_{j+1} = F_1 \cup F_2, \quad (2.113)$$

тогда

$$\text{mes } A_{j+1} > 1 - \varepsilon_{j+1}. \quad (2.114)$$

Так как

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_{j+1}}^{L_p} \leq \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} + \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_2}^{L_p},$$

где, согласно (2.104), (2.110) и (2.112), имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_2}^{L_p} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_2}^{L_p} + \left\| \sum_{k=m_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{m_j} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{F_1}^{L_p} + \left\| \sum_{k=m_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) \right\|_{F_2}^{L_p} \leq \frac{\delta_{j+2}}{4} + \frac{\delta_{j+2}}{4}, \end{aligned}$$

то, учитывая также (2.111), получаем

$$\left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_{j+1}}^{L_p} \leq \delta_{j+2}. \quad (2.115)$$

Обозначая, для удобства, $B_j \doteq F_2$ и учитывая (2.105), (2.110) и (2.112), легко видеть, что

$$\left\| \sum_{k=n_{j+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{B_j}^{L_p} \leq \varepsilon_{j+1} + \frac{\varepsilon_{j+1}}{2} < 2\varepsilon_{j+1}, \quad n_j + 1 \leq n \leq n_{j+1}, \quad (2.116)$$

где, в силу (2.110), (2.103) и (2.99),

$$B_j \subset A_j, \text{mes } B_j > 1 - \varepsilon_j - \varepsilon_{j-1} - \frac{\varepsilon_{j+1}}{2} = 1 - \varepsilon_j + 2\varepsilon_{j+1}. \quad (2.117)$$

Из (2.114) и (2.115) следует, что приведенное выше построение полиномов

$$\sum_{k=n_j+1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) \quad (2.118)$$

и множеств A_{j+1} и B_j можно продолжить неограниченно. Тем самым определяются ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (2.119)$$

возрастающая последовательность целых чисел $\{n_j\}$ и множества A_{j+1} , B_j , $j=1, 2, \dots$, удовлетворяющие условиям (2.114), (2.115), (2.116) и (2.117) для всех $j=1, 2, \dots$.

Теперь легко доказать, что ряд (2.119) сходится к $f(x)$ асимптотически в метрике $L_p[0, 1]$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и j_0 выбрано так, что

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} (\varepsilon_j + 2\varepsilon_{j+1}) < \varepsilon. \quad (2.120)$$

Положим

$$E = \sum_{j=j_0}^{\infty} B_j. \quad (2.121)$$

Из (2.117) и (2.120) следует

$$E \subset B_j \subset A_j, \quad j > j_0; \quad \text{mes } E > 1 - \varepsilon. \quad (2.122)$$

Если n — натуральное число, удовлетворяющее неравенству

$$n_{j+1} < n \leq n_{j+2}, \quad j > j_0, \quad (2.123)$$

из (2.115) и (2.116), где вместо j взято $j+1$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_E^{L_p} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_E^{L_p} + \left\| \sum_{k=n_{j+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_E^{L_p} \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^{n_{j+1}} c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_{A_{j+1}}^{L_p} + \left\| \sum_{k=n_{j+1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|_{B_{j+1}}^{L_p} < \delta_{j+2} + 2\varepsilon_{j+1}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{j \rightarrow \infty} \delta_j = 0$, $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) - f(x) \right\|_E^{L_p} = 0. \quad (2.124)$$

Таким образом, теорема 1 доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 2

При доказательстве теоремы непосредственно применяются лемма 2.1 и некоторые результаты работ [2], [3] и [4] о сходимости рядов по системе Хаара.

Напомним, что функции системы Хаара определяются следующим образом:

$$\gamma_0^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in [0, 1], \\ \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\frac{2k-2}{2^{m+1}}, \frac{2k-1}{2^{m+1}} \right) \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \left(\frac{2k-1}{2^{m+1}}, \frac{2k}{2^{m+1}} \right) \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases}$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, и для всякого фиксированного m индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, 2^m$. Через $\{\gamma_n(x)\}$, $n = 1, 2, \dots$ обозначаем систему Хаара, упорядоченную в алфавитном порядке индексов m и k .

Приведем также определение некоторого класса ортогональных систем, представляющих естественное обобщение системы Хаара, которые были рассмотрены в работах [3], [4].

Определяется система множеств $E_0^{(0)}, E_m^{+(k)}, \bar{E}_m^{-(k)}$, $m = 1, 2, \dots$; $1 \leq k \leq 2^m$ следующим образом*.

Положим

$$E_0^{(0)} = [0, 1]. \quad (3.1)$$

Разделим множество $E_0^{(0)}$ на два множества $\bar{E}_0^{(1)}, E_0^{+(1)}$, где

$$E_0^{+(1)} \cap \bar{E}_0^{(1)} = 0, \text{mes } E_0^{+(1)} = \text{mes } \bar{E}_0^{(1)} = \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Если уже определены множества

$$E_0^{(0)}, \bar{E}_0^{(1)}, E_0^{+(1)}, \dots, \bar{E}_{m-1}^{-(1)}, E_{m-1}^{+(1)}, \dots, \bar{E}_{m-1}^{-(2^m-1)}, E_{m-1}^{+(2^m-1)}, \quad (3.3)$$

то множества

$$\bar{E}_m^{-(2k-1)}, E_m^{+(2k-1)}, \bar{E}_m^{-(2k)}, E_m^{+(2k)}, \quad 1 \leq k \leq 2^{m-1} \quad (3.4)$$

определяются следующим образом:

$$\bar{E}_m^{-(2k-1)} \cup E_m^{+(2k-1)} = \bar{E}_m^{-(k)}; \bar{E}_m^{-(2k-1)} \cap E_m^{+(2k-1)} = 0, \text{mes } \bar{E}_m^{-(2k-1)} = \text{mes } \bar{E}_m^{-(k)}, \quad (3.5)$$

$$\bar{E}_m^{-(2k)} \cup E_m^{+(2k)} = \bar{E}_m^{-(k)}, \bar{E}_m^{-(2k)} \cap E_m^{+(2k)} = 0, \text{mes } \bar{E}_m^{-(2k)} = \text{mes } \bar{E}_m^{-(k)}. \quad (3.6)$$

Положим

$$\psi_0^{(0)}(x) = 1, \text{ при } x \in E_0^{(0)}, \quad (3.7)$$

* Приводятся определение, данное в [4].

$$\psi_m^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \bar{E}_m^{(k)} \\ -\sqrt{2^m}, & \text{при } x \in \bar{E}_m^{(k)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad (3.8)$$

где $m = 0, 1, 2, \dots$, и для всякого фиксированного m индекс k пробегает значения $1, 2, \dots, 2^m$. Через $\{\psi_n(x)\}$ обозначаем систему $\{\psi_0^{(0)}(x), \psi_m^{(k)}(x)\}$, упорядоченную в алфавитном порядке индексов m и k . Полученные вышеуказанным образом ортонормированные системы $\{\psi_n(x)\}$ называются обобщенными системами Хаара.

В работе [3] была доказана

Лемма 3.1. Существует ограниченная на $[0, 1]$ функция $\Phi(x)$, ряд Фурье которой по системе Хаара

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \gamma_n(x) \quad (3.9)$$

после некоторой перестановки членов неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$, т. е. для некоторой последовательности $\{\nu_k\}$, полученной путем перестановки последовательности натуральных чисел, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\nu_k} \gamma_{\nu_k}(x) \quad (3.10)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]$.

Из этой леммы немедленно вытекает

Лемма 3.2. *Существуют последовательность действительных чисел $\{b_n\}$ и последовательность $\{\nu_k\}$, полученная путем некоторой перестановки последовательности натуральных чисел, обладающие следующим свойством.*

Для любой обобщенной системы Хаара $\{\psi_n(x)\}$ частные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\nu_k} b_n \psi_n(x) \quad (3.11)$$

равномерно ограничены на $[0, 1]$, т. е.

$$\left| \sum_{k=1}^{\nu_k} b_k \psi_k(x) \right| \leq M, \quad x \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x) \quad (3.13)$$

неограниченно расходится почти всюду на $[0, 1]^*$.

Вывод леммы 3.2 из леммы 3.1 для одного специального класса систем $\{\psi_n(x)\}$ приведен в работе [3]. Справедливость леммы для про-

* Аналогичная лемма сформулирована в работе [4] (см. лемму 2), где, однако, и подчеркнуто то важное для применения леммы обстоятельство, что коэффициенты b_n и перестановка ν_k одни и те же для всех систем $\{\psi_n(x)\}$.

извольной обобщенной системы Хаара $\{\psi_n(x)\}$ можно доказать дословным повторением рассуждений, приведенных в [3], однако для полноты изложения сделаем одно замечание, которое вместе с леммой 3.1 дает лемму 3.2.

Замечание. Пусть задан полином по системе Хаара

$$\sum_{k=1}^m a_k \gamma_k(x), \quad (3.14)$$

и пусть

$$\sum_{k=1}^m a_k \psi_k(x) \quad (3.15)$$

является полиномом по обобщенной системе Хаара с теми же коэффициентами a_k .

Тогда существуют два разбиения отрезка $[0, 1]$ на непересекающиеся множества F_i , $1 \leq i \leq \nu$, E_i , $1 \leq i \leq \nu$ такие, что

$$1) \quad F_j \cap F_i = 0, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{\nu} F_i = [0, 1], \quad (3.16)$$

$$2) \quad E_j \cap E_i = 0, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{\nu} E_i = [0, 1], \quad (3.17)$$

$$3) \quad \text{mes } E_i = \text{mes } F_i, \quad 1 \leq i \leq \nu, \quad (3.18)$$

4) полиномы (3.14) (3.15) на множествах F_i и E_i , $1 \leq i \leq \nu$, соответственно, принимают одно и то же постоянное значение.

Указанное свойство полиномов (3.14) и (3.15) легко установить по индукции, рассматривая частные суммы этих полиномов и учитывая конструкцию систем $\{\psi_n(x)\}$.

Так как частные суммы ряда (3.9) равномерно ограничены на отрезке $[0, 1]$, то таким же свойством обладают и частные суммы ряда (3.11).

С другой стороны, свойствами 1), 4) обладают также частные суммы

$$\sum_{k=1}^n b_{\nu_k} \gamma_{\nu_k}(x) \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^n b_{\nu_k} \psi_{\nu_k}(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

следовательно, из неограниченной расходимости ряда (3.10) вытекает неограниченная расходимость почти всюду на $[0, 1]$ рядов (3.13).

Наряду с леммой 3.2 при доказательстве теоремы 2 применяется также следующая

Лемма 3.3. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — система представления класса $L_q[0, 1]$ в метрике пространства $L_p[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$, $E \subset [0, 1]$ — множество, состоящее из конечного числа интервалов и l — действительное число.

Тогда для произвольного натурального числа N и положительного числа η существуют полином

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x), \quad m > N \quad (3.19)$$

и функция $\psi(x)$, обладающие свойствами

$$1^\circ) \quad \psi(x) = \begin{cases} l, & x \in \overset{+}{E} \\ -l, & x \in \bar{E} \\ 0, & \text{при } x \in E, \end{cases}$$

где $\overset{+}{E}, \bar{E}$ — множества, состоящие из конечного числа интервалов

$$\overset{+}{E} \cap \bar{E} = 0, \quad \overset{+}{E} \cup \bar{E} = E, \quad \text{mes } \overset{+}{E} = \text{mes } \bar{E} = \frac{1}{2} \cdot \text{mes } E, \quad (3.20)$$

$$2^\circ) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|^{L_p} < \eta, \quad (3.21)$$

$$3^\circ) \quad \left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \eta + 2 \left\| \psi(x) \right\|^{L_p}, \quad N+1 \leq n \leq m. \quad (3.22)$$

Доказательство. Пусть натуральное R таково, что

$$\left(\frac{1}{2^R} \cdot \text{mes } E \right)^{1/p} \cdot l < \frac{\eta}{2}. \quad (3.23)$$

Пусть далее определены полиномы

$$\sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad N = m_0, \quad m_{i-1} < m_i, \quad 1 \leq i \leq j, \quad j < R \quad (3.24)$$

и функции

$$g_i(x) = \begin{cases} l, & x \in E_i \\ -l, & x \in E'_i \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_i \cup E'_i), \quad 1 \leq i \leq j, \quad j > R, \end{cases} \quad (3.25)$$

где множества E_i, E'_i состоят из конечного числа интервалов и обладают свойствами

$$E_i \cap E'_i = 0, \quad E_i \cup E'_i \subset E, \quad (E_r \cup E'_r) \cap (E_s \cup E'_s) = 0, \quad r \neq s, \quad (3.26)$$

$$\text{mes } E_i = \text{mes } E'_i, \quad 1 \leq i \leq j, \quad \text{mes } \bigcup_{i=1}^j (E_i \cup E'_i) = \text{mes } E - \frac{1}{2^j} \cdot \text{mes } E. \quad (3.27)$$

Положим

$$\Delta_j = E - \bigcup_{i=1}^j (E_i \cup E'_i) \quad (3.28)$$

и применим лемму 2.1, полагая в ее формулировке $N = m_j, \sigma = \frac{\eta}{2^R}$,

$$f(x) = \begin{cases} l, & x \in \Delta_j \\ 0, & x \in c\Delta_j. \end{cases} \quad (3.29)$$

Тогда, в силу условий (2.1), (2.2), (2.4) и (2.5) этой леммы, определяются полином

$$\sum_{k=m_{j+1}}^{m_{j+1}} c_k \varphi_k(x) \quad (3.30)$$

и функция $g_{j+1}(x)$ такие, что

$$g_{j+1}(x) = \begin{cases} l, & x \in E_{j+1} \\ -l, & x \in E'_{j+1} \\ 0, & x \in [0, 1] - (E_{j+1} \cup E'_{j+1}), \end{cases} \quad (3.31)$$

где множества E_{j+1} , E'_{j+1} состоят из конечного числа отрезков

$$E_{j+1} \cup E'_{j+1} \subset \Delta_j, \quad E_{j+1} \cap E'_{j+1} = 0, \quad \text{mes } E_{j+1} = \text{mes } E'_{j+1} = \frac{1}{4} \cdot \text{mes } \Delta_j, \quad (3.32)$$

$$\left\| \sum_{k=m_{j+1}}^{m_{j+1}+1} c_k \varphi_k(x) - g_{j+1}(x) \right\|^{L,p} < \frac{\eta}{2R}, \quad (3.33)$$

$$\left\| \sum_{k=m_{j+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L,p} \leq \frac{\eta}{2R} + \|g_{j+1}(x)\|^{L,p}, \quad m_j + 1 \leq n \leq m_{j+1}. \quad (3.34)$$

Из (3.27), (3.28) и (3.32) следует

$$(E_{j+1} \cup E'_{j+1}) \cap (E_i \cup E'_i) = 0, \quad 1 \leq i \leq j; \quad \text{mes } \bigcup_{i=1}^{j+1} (E_i \cup E'_i) = \text{mes } E - \frac{1}{2^{j+1}} \cdot \text{mes } E. \quad (3.35)$$

Сравнивая (3.25), (3.26) и (3.27) с (3.31), (3.32) и (3.35), мы заключаем, что для всех значений i , $1 \leq i \leq R$ можно построить полином (3.24) и функции (3.25), для которых условия (3.26), (3.27) выполнены для всех $1 \leq i \leq R$ и условия (3.33), (3.34) — для всех $0 \leq j \leq R-1$.

Множество

$$F = E - \bigcup_{i=1}^R (E_i \cup E'_i) \quad (3.36)$$

разделим на два непересекающихся множества F_1 , F_2 , каждое из которых является соединением конечного числа отрезков и

$$\text{mes } F_1 = \text{mes } F_2 = \frac{1}{2} \text{mes } F. \quad (3.37)$$

Положим

$$\bar{E} = F_1 \cup \left(\bigcup_{i=1}^R E_i \right), \quad \bar{E} = F_2 \cup \left(\bigcup_{i=1}^R E'_i \right), \quad (3.38)$$

$$\psi(x) = \begin{cases} l, & x \in \bar{E} \\ -l, & x \in \bar{E} \\ 0, & x \in cE = c(\bar{E} \cap \bar{E}), \end{cases} \quad (3.39)$$

$$\sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) = \sum_{i=1}^R \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x), \quad m_0 = N, \quad m_R = m \quad (3.40)$$

и докажем, что функция (3.39) и полином (3.40) удовлетворяют требованиям леммы.

Выполнение условия (3.20) леммы 3.3 для множеств (3.38) немедленно следует из определения множеств E_i , E'_i , $1 \leq i \leq R$ и F_1, F_2 .
Так как

$$\text{mes } F = \frac{1}{2^R} \cdot \text{mes } E \quad (3.41)$$

$$\psi(x) - \sum_{i=1}^R g_i(x) = \begin{cases} l, & x \in F_1 \\ -l, & x \in F_2 \\ 0, & x \in [0, 1] - (F_1 \cup F_2), \end{cases} \quad (3.42)$$

Из (3.23) следует

$$\left\| \psi(x) - \sum_{i=1}^R g_i(x) \right\|^{Lp} = \left(\int_F l^p dx \right)^{1/p} < \frac{\eta}{2}. \quad (3.43)$$

Заметим также, что

$$\left\| \sum_{i=1}^j g_i(x) \right\|^{Lp} \leq \left\| \psi(x) \right\|^{Lp}, \quad 1 \leq j \leq R, \quad \left| g_i(x) \right| \leq \left| \psi(x) \right|^{Lp}, \quad 1 \leq i \leq R, \quad (3.44)$$

Поскольку

$$\sum_{i=1}^j g_i(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \in \bigcup_{i=1}^j (E_i \cup E'_i) \\ 0 & \text{— в остальных точках.} \end{cases}$$

Из (3.33) и (3.40) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - \sum_{i=1}^R g_i(x) \right\|^{Lp} &\leq \sum_{i=1}^R \left\| \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - g_i(x) \right\|^{Lp} < \\ &< \frac{\eta}{2R} \cdot R = \frac{\eta}{2}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

и учитывая (3.43), получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^m c_k \varphi_k(x) - \psi(x) \right\|^{Lp} < \eta. \quad (3.46)$$

Остается проверить условие 3°. Пусть $N+1 < n < m$. Тогда для некоторого j

$$m_{j-1} + 1 < n < m_j. \quad (3.47)$$

Если $j=1$, выполнение неравенства (3.22) для полинома (3.40) вытекает из (3.34), где $j=0$, и (3.44).

Так как (см. (3.33))

$$\sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - \sum_{i=1}^{j-1} g_i(x) \left\|^{Lp} \leq \sum_{i=1}^{j-1} \left\| \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) - g_i(x) \right\|^{Lp} < \frac{\eta}{2}$$

и, следовательно

$$\left\| \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} c_k \varphi_k(x) \right\|^{Lp} \leq \frac{\eta}{2} + \left\| \sum_{i=1}^{j-1} g_i(x) \right\|^{Lp}, \quad j \geq 2, \quad (3.48)$$

то при $j > 2$, учитывая (3.47), (3.44) и (3.34), получаем

$$\left\| \sum_{k=N+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \left\| \sum_{l=1}^{j-1} \sum_{k=m_{l-1}+1}^{m_l} c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=m_{j-1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} \leq \leq \leq \eta + 2 \left\| \psi(x) \right\|^{L_p}.$$

Тем самым условие 3° также выполнено и лемма 3.3 доказана. Теперь приступим к доказательству теоремы 2.

Предположим, что определены ступенчатые функции

$$\psi_0^{(0)}(x) = 1, \quad x \in E_0^{(0)} = [0, 1], \quad (3.49)$$

$$\psi_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & x \in E_n^{+(k)} \\ -\sqrt{2^n}, & x \in E_n^{-(k)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad (3.50)$$

где $0 \leq n \leq m-1$, $1 \leq k \leq 2^n$, представляющие первые 2^m функций некоторой обобщенной системы Хаара, и полиномы по системе $\{\varphi_n(x)\}$ вида

$$\sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_{k\varphi_k}(x), \quad 0 = n_0, \quad n_{l-1} < n_l, \quad 1 \leq l \leq 2^m, \quad m \geq 0. \quad (3.51)$$

Легко видеть, что путем последовательного применения леммы 3.3, в формулировке которой полагается $E = E_{2^m-1}^{+(1)}$, $l = b_{2^m+1} \cdot \sqrt{2^m}$;

$$E = E_{m-1}^{-(1)}, \quad l = b_{2^m+2} \sqrt{2^m}; \dots; E = E_{m-1}^{+(2^m-1)}, \quad l = b_{2^m+1-1} \cdot \sqrt{2^m}; E = E_{m-1}^{-(2^m-1)}, \quad l = b_{2^m+1} \sqrt{2^m}; \quad \eta = \frac{1}{2^i}, \quad 2^m + 1 \leq i \leq 2^{m+1}, *$$

можно определить ступенчатые функции $\psi_i(x)$, $2^m + 1 < i < 2^{m+1}$ и полиномы

$$\sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_{k\varphi_k}(x), \quad 2^m + 1 < i < 2^{m+1}, \quad n_{l-1} < n_l, \quad (3.52)$$

которые удовлетворяют условиям

$$\psi_{2k-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & x \in E_m^{+(2k-1)} \\ -\sqrt{2^m}, & x \in E_m^{-(2k-1)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq 2^{m-1} \quad (3.53)$$

$$\psi_{2k}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^m}, & x \in E_m^{+(2k)} \\ -\sqrt{2^m}, & x \in E_m^{-(2k)} \\ 0 & \text{— в остальных точках,} \end{cases} \quad 1 \leq k \leq 2^{m-1} \quad (3.54)$$

* Здесь b_i ($2^m + 1 < i < 2^{m+1}$) — коэффициенты рядов (3.11) (см. лемму 3.2).

где

$$\bar{E}_m^{+(2k-1)} \cap \bar{E}_m^{-(2k-1)} = 0, \bar{E}_m^{+(2k-1)} \cup \bar{E}_m^{-(2k-1)} = \bar{E}_m^{(k)}, \text{mes } \bar{E}_m^{+(2k-1)} = \text{mes } \bar{E}_m^{-(2k-1)}, \quad (3.55)$$

$$\bar{E}_m^{+(2k)} \cap \bar{E}_m^{-(2k)} = 0, \bar{E}_m^{+(2k)} \cup \bar{E}_m^{-(2k)} = \bar{E}_m^{(k)}, \text{mes } \bar{E}_m^{+(2k)} = \text{mes } \bar{E}_m^{-(2k)}, \quad (3.56)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{l-1}-1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} \leq \frac{1}{2^l}, \quad 2^m + 1 \leq l \leq 2^{m+1}, \quad (3.57)$$

$$\left\| \sum_{k=n_{l-1}+1}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p} < \frac{1}{2^l} + 2 \|b_l \psi_l(x)\|^{L_p}, \quad n_{l-1} + 1 \leq n \leq n_l, \quad 2^m < l \leq 2^{m+1}. \quad (3.58)$$

Из (3.53), (3.54), (3.55) и (3.56) видно, что функции (3.50), (3.53) и (3.54) вместе составляют первые 2^{m+1} функций некоторой обобщенной системы Хаара.

Следовательно, существует обобщенная система Хаара $\{\psi_l(x)\}$ $1 < l < \infty$ и полиномы (3.52), для которых имеют место (3.57) и (3.58) при всех значениях $l = 1, 2, \dots$.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) \quad (3.59)$$

удовлетворяет требованиям теоремы 2.

Так как $\{\psi_l(x)\}$ — обобщенная система Хаара и частные суммы ортогонального ряда

$$\sum_{l=1}^j b_l \psi_l(x) \quad (3.60)$$

равномерно ограничены на $[0, 1]$ (см. лемму 3.2), то ряд (3.60) сходится в метрике $L_p[0, 1]$ для любого $p \geq 1$.

Легко видеть, что частные суммы

$$S_{n_j}(x) = \sum_{k=1}^{n_j} c_k \varphi_k(x) = \sum_{l=1}^j \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) \quad (3.61)$$

при $j \rightarrow \infty$ сходятся в метрике $L_p[0, 1]$. В самом деле

$$\left\| S_{n_j}(x) - S_{n_r}(x) \right\|^{L_p} \leq \left\| \sum_{l=r+1}^j b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} + \sum_{l=r+1}^j \left\| \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p}, \quad j > r,$$

и тогда, согласно (3.57)

$$\left\| S_{n_j}(x) - S_{n_r}(x) \right\|^{L_p} < \frac{1}{2^r} + \left\| \sum_{l=r+1}^j b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p}, \quad j > r. \quad (3.62)$$

Поскольку ряд (3.60) сходится в метрике $L_p[0, 1]$, то

$$\lim_{r, j \rightarrow \infty} \left\| \sum_{l=r+1}^j b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} = 0. \quad (3.63)$$

Следовательно (см. (3.62)), существует $f(x) \in L_p[0, 1]$, к которой сходится последовательность частных сумм (3.61) в метрике $L_p[0, 1]$.

Пусть

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad n_l < n \leq n_{j+1}, \quad j \geq 1. \quad (3.64)$$

Тогда

$$\|S_n(x) - f(x)\|^{L_p} \leq \|S_{n_j}(x) - f(x)\|^{L_p} + \left\| \sum_{k=n_{j+1}}^n c_k \varphi_k(x) \right\|^{L_p}. \quad (3.65)$$

Из (3.65) и (3.58), где положено $i=j+1$, имеем

$$\|S_n(x) - f(x)\|^{L_p} \leq \|S_{n_j}(x) - f(x)\|^{L_p} + \frac{1}{2^{j+1}} + 2 \|b_{j+1} \psi_{j+1}(x)\|^{L_p}.$$

Так как $j \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, учитывая (3.63), имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n(x) - f(x)\|^{L_p} = 0. \quad (3.66)$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 2 достаточно проверить расходимость ряда, стоящего в правой части (3.59), после некоторой перестановки его членов.

Из неравенства

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right| dx \leq \left\| \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right\|^{L_p} < \frac{1}{2^l}$$

вытекает, что ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x) - b_l \psi_l(x) \right)$$

почти всюду на $[0, 1]$ абсолютно сходится.

Поскольку ряд (3.60) почти всюду неограниченно расходится после некоторой перестановки членов (см. лемму 3.2), то после той же перестановки почти всюду неограниченно будет расходиться также ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=n_{l-1}+1}^{n_l} c_k \varphi_k(x).$$

Теорема 2 доказана.

Ա. Ա. ԹԱԼԱԼՅԱՆ

ՄԻՍՏԵՄԵՆԵՐ, ՈՐՈՆՑՈՎ ԳՐՎԱԾ ՇԱՐՔԵՐԸ $L_p[0, 1]$ ՄԵՏՐԻԿԱՑՈՎ
ՆԵՐԿԱՑԱՑՆՈՒՄ ԵՆ $L_q[0, 1]$, $1 \leq p \leq q$ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիցուք $1 \leq p \leq q < \infty$ և $\{\varphi_n(x)\}$ սխտեմը ալիպիսին է, որ կամայա-
կան $f(x) \in L_q[0, 1]$ ֆունկցիայի համար գոյություն ունի $L_p[0, 1]$ մետրի-
կայով այդ ֆունկցիային զուգամիտող $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ շարք:

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ այդպիսի սխտեմները օժտված են
 L_p տարածության բազիսների որոշ հիմնական հատկություններով:

A. A. TALALIAN

ON THE SYSTEMS OF FUNCTIONS, THE SERIES WITH
RESPECT OF WHICH REPRESENT IN $L_p[0, 1]$ METRIC
FUNCTIONS OF $L_q[0, 1]$, $1 \leq p < q$ SPACE

S u m m a r y

Let $1 \leq p \leq q < \infty$ and let the system $\{\varphi_n(x)\}$ possess the proper-
tie, that for an arbitrary function $f(x) \in L_q[0, 1]$ not necessary unic
series

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

exist, which converges to $f(x)$ in $L_p(0, 1)$ metric. The present paper
establishes, that such systems share certain fundamental properties of
basis in L_p .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Талалян. Представление измеримых функций рядами, УМН, 15, вып. 5, 1960, 77—141.
2. П. А. Ульянов. Расходящиеся ряды Фурье, УМН, 16, № 3, 1961, 61—142.
3. А. М. Олевский. Расходящиеся ряды Фурье, Известия АН СССР, серия матем., 27, 1963, 343—366.
4. Ф. Г. Арутюнян. О сходимости почти всюду рядов по базисам пространства $L_p[0, 1]$, ДАН АрмССР, XLI, № 5, 1965, 364—371.
5. К. Иосида. Функциональный анализ, Издательство „Мир“, М., 1967.
6. А. А. Талалян. О системах, ряды по которым представляют любые измеримые функции, Матем. сборник, 76, (118): 1, 1968, 39—51.