ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա III, №№ 4—5, 1968 Математика

И. О. ХАЧАТРЯН

О ВЗВЕШЕННО-РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ НА ДВУХ ЛУЧАХ

1°. Пусть на лучах E: $\arg z = \pm \frac{\pi}{\rho_1}$ определена вещественная измеримая функция $\varphi(t) \geqslant 1$ такая, что

$$t^n \varphi^{-1}(t) \to 0 \text{ при } |t| \to +\infty,\ t \in E,\ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

Обозначим через $C_\varphi(E)$ пространство непрерывных на E функций, удовлетворяющих условию

$$f(t)\varphi^{-1}(t) \to 0 \text{ при } |t| \to +\infty,\ t \in E.$$

Норма элемента f вводится следующим образом:

$$\|f\| = \sup_{t \in E} \left| \frac{f(t)}{\varphi(t)} \right|. \tag{2}$$

Из (1) следует, что полиномы входят в $C_\varphi(E)$.

Аналогично классической проблеме С. Н. Бернштейна [1] для случая вещественной оси в ряде работ ставился вопрос о нахождении необходимого и достаточного условия, накладываемого на функцию $\varphi(t)$, при котором полиномы составляют всюду плотное множество в пространстве $C_\varphi(E)$.

Отметим здесь работы А. Л. Шагиняна [2], М. М. Джрбашяна [3] и С. Н. Мергеляна [4], где задача о весовой полноте полиномов рассмотрена на произвольных кривых довольно общей природы. Приведем результаты этих авторов для того случая, когда аппроксимация совершается на двух лучах.

Из общего результата А. Л. Шагиняна о нормальных семействах аналитических функций следует

Теорема (*А. Л. Шагинян*). *Если полиномы составляют всюду плотное множество в* $C_\varphi(E)$, *то*

$$\int_E \frac{\ln \varphi(t)}{1 + |t|^{1+\rho_1}} |dt| = +\infty, \quad \int_E \frac{\ln \varphi(t)}{1 + |t|^{1+\rho_2}} |dt| = +\infty, \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2. \tag{3}$$

М. М. Джрбашяном [3] получены достаточные условия для полноты в общем случае, когда аппроксимация совершается на кривых в комплексной области. Из его результата, в частности, следует

Теорема (*М. М. Джрбашян*). *Если функция* $\varphi(t)$ *удовлетворяет условиям* (3) *и нормально возрастающая, то есть представляется в виде*

$$\varphi(t) = \varphi(|t|) = C \exp \int\limits_{1}^{|t|} \frac{\omega(u)\,du}{u},$$

где $\omega(u) \uparrow +\infty$ *при* $u \uparrow +\infty$, *то полиномы составляют всюду плот-ное множество в* $C_\varphi(E)$.

Приведенные теоремы, окончательно решая поставленную задач для нормально растущих весовых функций, одновременно показывают что очень важно, в какой зависимости находятся полнота и раство угла, на границе которого происходит аппроксимация.

Результат М. М. Джрбашяна получен методом интегральног преобразования Коши, которым позже пользовался также С. Н. Мер гелян [4] при решении проблемы С. Н. Бернштейна для оси.

В 1957 г. Б. Я. Левиным этот метод распространен на общи функциональные пространства Банаха, что позволило ему ввести но вые квазианалитические классы функций на оси и связать квазианали тичность с возможностью весовой аппроксимации.

В работе [4] С. Н. Мергеляна дано необходимое и достаточно условие полноты без каких-либо ограничений на вес $\varphi(t)$. Чтобы сфор мулировать этот результат введем следующие обозначения.

Обозначим через $\mathfrak{M}_\varphi$ множество полиномов $p(z)$, удовлетворяю щих условию

$$\left\| \frac{p(t)}{t+1} \right\| \leqslant 1,$$

а через $\psi(z)$

$$\psi(z) = \sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)|.$$

Теорема (*С. Н. Мергелян*). *Для полноты полиномов в* $C_\varphi(E$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\psi(z) \equiv +\infty, \quad z \bar{\in} E.$$

В настоящей работе приводится **интегральный** критерий полноты полиномов в $C_\varphi(E)$ для произвольной функции $\varphi(t)$ аналогично кри терию С. Н. Мергеляна для оси. Далее на основании этого критери по схеме рассмотрений Б. Я. Левина, приведенной в [5], дается ха рактеристика класса функций, допускающих аппроксимацию полинома ми в том случае, когда система полиномов не полна во всем $C_\varphi(E)$.

2°. Обозначим через D_1 угловую область $|\arg z| < \frac{\pi}{\rho_1}$, а чере D_2 — дополнительвую область с раствором $\frac{\pi}{\rho_2}$, $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 2$.

Теорема 1. *Для полноты системы полиномов в* $C_\varphi(E)$ *необ ходимо и достаточно, чтобы*

$$J(\psi, \rho_k, E) = \int\limits_E \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+\rho_k}} |dt| = +\infty, \quad k=1,2. \tag{4}$$

(В дальнейшем для определенности будем предполагать, что $\rho_1 > \rho_2$).

Доказательство. **Необходимость.** Пусть полиномы всюду плотны в $C_\varphi(E)$. Тогда, согласно общему критерию С. Н. Мергеляна, $\psi(z) \equiv +\infty$, $z \overline{\in} E$.

Имеем

$$\ln|p(z)| < \int_E \ln|p(t)| \frac{\partial G_k(t;\, z)}{\partial n} ds, \ z \in D_k, \ k = 1, 2, \tag{5}$$

где $G_k(t;\, z)$ — функция Грина области D_k.

Пусть теперь $p(z) \in \mathfrak{M}$, т. е. $|p(t)| \leqslant \psi(t)$. Из (5) имеем

$$\ln|p(z)| \leqslant \int_E \ln\psi(t) \frac{\partial G_k(t;\, z)}{\partial n} ds$$

для любого полинома $p \in \mathfrak{M}$, $z \in D_k$.

Беря верхнюю грань в некоторой точке $z_0 \in D_k$ в левой части последнего неравенства, получим

$$\int_E \ln\psi(t) \frac{\partial G_k(t;\, z_0)}{\partial n} ds = +\infty, \ z_0 \in D_k, \ k = 1, 2,$$

что эквивалентно расходимости интеграла (4).

Достаточность. Докажем, что, если полиномы не плотны в $C_\varphi(E)$ то $J(\psi, \rho_1, E) < +\infty$.

Пусть полиномы не плотны в $C_\varphi(E)$. Так как $\mathfrak{M}_\varphi = \mathfrak{M}_\psi$ [4], то полиномы не плотны также в $C_\psi(E)$. Тогда, согласно теореме Хана-Банаха, существует нетривиальный линейный непрерывный функционал, обращающийся в нуль на полиномах. Пусть V — произвольный функционал такой, что

$$V[t^n] = 0, \ n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Тогда для любого многочлена $p(t)$ можем утверждать, что

$$V\left[\frac{p(t) - p(z)}{t - z}\right] = 0, \quad z \in D_k \quad (k = 1, 2).$$

Обозначая через $F(z) = V\left[\dfrac{1}{t - z}\right]$, будем иметь $p(z) F(z) = V\left[\dfrac{p(t)}{t - z}\right]$.

Пусть теперь $p(z) \in \mathfrak{M}_\varphi$. Тогда

$$\left| V\left[\frac{p(t)}{t - z}\right]\right| \leqslant \|V\| \cdot \left\|\frac{p(t)}{t - z}\right\| = \left\|\frac{p(t)}{t + 1} \frac{t + 1}{t - z}\right\| \cdot \|V\| \leqslant$$

$$\leqslant \|V\| \cdot \left\|\frac{p(t)}{t + 1}\right\| \cdot \max_{t \in E} \left|\frac{t + 1}{t - z}\right| \leqslant C \frac{1 + |z|}{\delta(z)},$$

где C — константа, не зависящая от полинома $p \in \mathfrak{M}_\varphi$, а $\delta(z)$ — расстояние точки z до E.

Таким образом, для любого полинома $p(z) \in \mathfrak{M}_\varphi$ имеем

$$|p(z) F(z)| \leqslant \frac{C(1 + |z|)}{\delta(z)},$$

откуда следует, что

$$\psi(z)\cdot|F(z)|\leqslant\frac{C(1+|z|)}{\delta(z)}$$

или

$$|F(z)|\leqslant\frac{C(1+|z|)}{\delta(z)\psi(z)}.\qquad($$

Из общего вида линейного функционала в $C_\psi(E)$ имеем

$$F(z)=V\left[\frac{1}{t-z}\right]=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)},\qquad($$

где $\sigma(s)$ — функция от длины дуги s, отсчитываемой от некотор точки на E, имеющая ограниченную вариацию на E. Из (7) следуе что функция $F(z)$ голоморфна в областях D_1 и D_2.

Так как, по предположению, система полиномов не полна в C_ψ (E то $\psi(z)\not\equiv+\infty$ хотя бы в одной из областей D_k. Если $\psi(z_0)<+\infty$ $z_0\in D_k$, то, как следует из рассуждений С. Н. Мергеляна [4], $\psi(z)$ $<+\infty$ для всех $z\in D_k$. Следовательно, возможны следующие случа

а) $\psi(z)<+\infty,\ z\in D_1;\quad \psi(z)=+\infty,\ z\in D_2,$

б) $\psi(z)<+\infty,$

в) $\psi(z)=+\infty,\ z\in D_1;\quad \psi(z)<+\infty,\quad z\in D_2.$

Рассмотрим первый случай. Пусть

$$\psi(z)=+\infty,\ z\in D_2.\qquad(8$$

Из (8), как при доказательстве необходимости, получим, чт $J(\psi,\rho_2,E)=+\infty$.

Далее из (6) и (8) следует, что при $z\in D_2$

$$V\left[\frac{1}{t-z}\right]\equiv F(z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)}\equiv 0,\ z\in D_2.\qquad(9$$

Тождество (9) означает, что функционал V обращается в нуль н функциях вида

$$\sum_{k=0}^{p}a_{k,p}(t-z_k)^{-\alpha_k},\ z_k\in D_2$$

и на их замыкании ($a_{k,p}$ — постоянные числа, $\alpha_k\geqslant 0$ — целые числа) т. е.

$$V\left[\sum\frac{a_{k,p}}{(t-z_k)^{\alpha_k}}\right]=0,\ z_k\in D_2.\qquad(9')$$

Далее из (9) на основании известной теоремы И. И. Привалова заключаем, что функция

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{d\sigma(s)}{(t-z)\psi(t)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{e^{i\varphi(s)}\,d\sigma_1(s)}{(t-z)\psi(t)},\ z\in D_1\qquad(9'')$$

почти всюду на E имеет предельные значения изнутри области D_1, равные $\frac{\sigma_1'(s)}{\psi(t)}$, т. е. $F(t)=\frac{\sigma_1'(s)}{\psi(t)}$.

Обозначим через $w=\chi(z)$ функцию, конформно отображающую область D_1 на круг $|w|<1$. Обратную функцию обозначим через $z=\gamma(w)$.

Отобразим область D_1 на некоторую ограниченную область d_1 плоскости Z посредством функции $Z=(z-z_0)^{-1}$, $z_0 \in D_2$. Тогда функция $\chi(z)=\chi_1(Z)$ будет голоморфной в d_1 и непрерывной в замкнутой области $\bar{d}_1$. Следовательно, по известной аппроксимационной теореме, найдется такая последовательность многочленов $Q_n(Z)$, что

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(Z)=\chi_1(Z)$$

равномерно в замкнутой области $\bar{d}_1$. В частности, это равенство верно и на границе области d_1. Возвращаясь к переменной z, получим, что функцию $\chi(t)$, а также функцию $\chi^n(t)$ при любом натуральном n можно равномерно приблизить полиномами $R\left(\frac{1}{t-z_0}\right)$, $z_0 \in D_2$. Но из равномерной аппроксимации будет следовать аппроксимация с весом $\psi(t)$, следовательно, согласно (9′) будем иметь

$$V[\chi^n(t)]=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots$$

или

$$\int_E \chi^n(t)\,d\sigma_2(t)=0,\quad d\sigma_2(t)=\frac{d\sigma(s)}{\psi(t)},$$

$$\int_{|\zeta|=1} \zeta^n\,d\sigma_2(\gamma(\zeta))=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

откуда следует, что функция $\sigma_3(\vartheta)=\sigma_2(\gamma(e^{i\vartheta}))$ абсолютно непрерывна при $0\leqslant\vartheta\leqslant 2\pi$ и, следовательно

$$\int_0^{2\pi} \zeta^n\,\sigma_3'(\vartheta)\,d\vartheta=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Возвращаясь на плоскость z, будем иметь

$$\int_E \chi^n(t)\frac{\sigma'(s)}{\psi_1(t)}\,ds=0,\ n=0,\ 1,\ 2,\cdots.$$

Далее функция $F(\gamma(w))$ голоморфна в круге $|w|<1$, почти всюду на окружности $|w|=1$ имеет предельные значения $F(\gamma(e^{i\vartheta}))= =F(\gamma(\zeta))$.

Рассмотрим интеграл

$$\int_{|\zeta|=1} F(\gamma(\zeta))\,\gamma'(\zeta)\,\zeta^n\,d\zeta=\int_E F(t)\,\chi^n(t)\,dt=$$

$$= \int\limits_E \frac{\sigma_1'(s)}{\psi_1(t)} \gamma^n(t)\,dt = \int\limits_E \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)} \gamma_n(t)\,ds = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

Это означает, что функция $F(\gamma(w))\,\gamma'(w)$ принадлежит классу H_1 и, в частности, классу A в круге $|w|<1$. Следовательно

$$\int\limits_0^{2\pi} |\ln| F(\gamma(e^{i\vartheta}))\cdot\gamma'(e^{i\vartheta})||\,d\vartheta < +\infty.$$

Но легко видеть, что интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \ln|\gamma'(e^{i\vartheta})|\,d\vartheta$$

конечен, следовательно конечен также интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} |\ln| F(\gamma(e^{i\vartheta}))||\,d\vartheta.$$

Переходя к переменной t, получим

$$\int\limits_E \ln\left|\frac{\sigma_1'(s)}{\psi(t)}\right| \frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} > -\infty. \tag{10}$$

Но на основании известного неравенства

$$\int f\,d\mu \leqslant \ln\left[\int \exp f\,d\mu\right], \quad \int d\mu = 1$$

можем написать, что

$$\int\limits_E \ln|\sigma_1'(s)| \frac{c\,|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} \leqslant \ln\left[\int\limits_E |\sigma_1'(s)| \frac{c\,|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}}\right] =$$

$$= \ln\int\limits_E c\,\frac{|d\sigma_1(s)|}{1+|t|^{1+\rho_1}} < +\infty, \qquad \text{где} \int\limits_E \frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} = \frac{1}{c}. \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что

$$\int \ln\psi(t)\,\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_1}} < +\infty.$$

Таким образом, в случае а) имеем

$$J(\psi, \rho_1, E) < +\infty, \quad J(\psi, \rho_2, E) = +\infty.$$

Отсюда вытекает, что случай в) невозможен, так как в противном случае мы получили бы, что $J(\psi, \rho_1, E) = +\infty$, $J(\psi, \rho_2, E) < +\infty$, что противоречит предположению $\rho_2 \leqslant \rho_1$.

Перейдем теперь к рассмотрению случая б). Пусть $\psi(z) < +\infty$ для любого z. Тогда среди функционалов V, обращающихся в нуль на степенях t^n, $n = 0, 1, \cdots$, найдется такой, что соответствующая функция $F(z) \not\equiv 0$ ни в одной из областей D_k $(k=1, 2)$.

Обозначим через D'_k угловую область, лежащую строго внутри D_k, со сторонами E'_k, параллельными сторонам области D_k и равноудаленными от них.

Из представления (7) следует, что $F(z)$ ограничена в областях D'_k $(k=1, 2)$. Следовательно, согласно теореме Карлемана

$$\int_{E'_1} \frac{|\ln|F(t_1)||}{1+|t_1|^{1+\rho_1}}|dt_1|<+\infty, \int_{E'_2} \frac{|\ln|F(t_2)||}{1+|t_2|^{1+\rho_2}}|dt_2|<+\infty,$$

откуда, учитывая оценки (6), будем иметь

$$J(\psi, \rho_1, E'_1)<+\infty, \quad J(\psi, \rho_2, E'_2)<+\infty. \tag{12}$$

Из условия $\rho_1 \geqslant \rho_2$ и из (12) следует, что

$$J(\psi, \rho_1, E'_2)<+\infty. \tag{13}$$

Из (13) вытекает, что субгармоническая во всей плоскости функция $\ln \psi(z)$ имеет гармоническую мажоранту в той угловой области с границей E'_2, которая содержит множество E (эту область обозначим через D). Следовательно $J(\psi, \rho_1, E)<+\infty$, и доказательство теоремы 1 завершается.

Но мы докажем несколько больше, а именно, установим, что $J(\psi, \rho_2, E)<+\infty$.

С этой целью запишем неравенство

$$\ln|p(z)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E'_2} \ln|p(t_2)| \frac{\partial G(t_2; z)}{\partial n}|dt_2|, \quad z \in D,$$

где G — функция Грина области D. В частности, полагая $z=t$, $t \in E$, будем иметь

$$\ln|p(t)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E'_2} \ln|p(t_2)| \frac{\partial G(t_2, t)}{\partial n}|dt_2|, \quad t \in E,$$

откуда следует, что

$$\ln\psi(t) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{E'_2} \ln\psi(t_2) \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n}|dt_2|, \quad t \in E, \tag{14}$$

где, вследствие (13), интеграл в правой части сходится для любого $t \in E$.

Умножая обе части неравенства (14) на $(1+|t|^{1+\rho_2})^{-1}$ и интегрируя по множеству E, получим

$$J(\psi, \rho_2, E) \leqslant \int_E \left[\frac{1}{2\pi}\int_{E'_2} \ln\psi(t_2)\frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n}|dt_2|\right]\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{E'_2}\ln\psi(t_2)\left[\int_E \frac{\partial G(t_2; t)}{\partial n}\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}}\right]|dt_2|. \tag{15}$$

Но имеем оценку

$$\int_E \frac{\partial G(t_2;t)}{\partial n}\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}} = \int_{|t|<\frac{1}{2}|t_2|} \frac{\partial G(t_2;t)}{\partial n}\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}} +$$

$$+\int_{|t|>\frac{1}{2}|t_2|} \frac{\partial G(t_2;t)}{\partial n}\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}} < \frac{c_1}{1+|t_2|^{\rho_1+1}}\int_{|t|<\frac{1}{2}|t_2|}\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}} +$$

$$+\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}|t_2|\right)^{1+\rho_2}}\int_{|t|>\frac{1}{2}|t_2|}\frac{\partial G(t_2;t)}{\partial n}|dt| < \frac{c_1}{1+|t_2|^{1+\rho_1}}\int_E \frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}} +$$

$$+\frac{c_2}{c_3+|t_2|^{1+\rho_2}}\int_E \frac{\partial G(t_2;t)}{\partial n}|dt| < \frac{c_4}{1+|t_2|^{1+\rho_1}} + \frac{c_5}{c_3+|t_2|^{1+\rho_2}},$$

откуда, вследствие условия $\rho_1 \geqslant \rho_2$, получаем

$$\int \frac{\partial G(t_2;t)}{\partial n}\frac{|dt|}{1+|t|^{1+\rho_2}} < \frac{\text{const}}{1+|t_2|^{1+\rho_2}}. \qquad (16)$$

Из (16), (15) и второго из неравенств (12) следует, что

$$J(\psi, \rho_2, E) < +\infty.$$

Таким образом, мы доказали, что в случае б) сходятся оба интеграла

$$\int_E \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+\rho_k}}|dt|,\ k=1, 2.$$

3°. Предположим теперь, что полиномы не составляют плотного множества в $C_\varphi(E)$. Это означает, что в $C_\varphi(E)$ существуют непрерывные функции, которые нельзя приблизить полиномами с любой наперед заданной точностью. Выясним теперь следующий вопрос: какими должны быть те непрерывные функции из $C_\varphi(E)$, которые все же допускают приближение полиномами?

Множества функций, допускающих приближение полиномами в случае неполноты полиномов во всем $C_\varphi(E)$, различны в зависимости от поведения функции $\psi(z)$ в дополнительной области D_2, т. е. они различаются в зависимости от сходимости или расходимости интеграла $J(\psi, \rho_2, E)$. Поэтому эти случаи мы будем рассматривать отдельно.

Рассмотрим первый случай:

а) $\qquad J(\psi, \rho_1, E) < +\infty, \quad J(\psi, \rho_2, E) = +\infty.$

Пусть функция $f_0(t) \in C_\varphi(E)$ такова, что для любого $\varepsilon > 0$ существует полином $p(t)$ такой, что

$$\|f_0(t) - p(t)\| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что для приближающих полиномов имеем $\|p\| \leqslant \|f_0\| + 1 = c$ или

$$\frac{1}{c}p(z) \in \mathfrak{M},$$

следовательно

$$|p(z)| \leqslant c\psi(z) < +\infty, \quad z \in \bar{D}_1,$$

то есть эти полиномы составляют нормальное семейство в любой подобласти $D_1^{(R)}$: $|z| \leqslant R$, $z \in D_1$. Следовательно, из семейства $\{p(z)\}$ можно извлечь подпоследовательность $\{p_k(z)\}$, равномерно сходящуюся в D_1 к голоморфной функции. Но эта функция на E_φ ($t \in E_\varphi$, если $\varphi(t) \neq +\infty$) совпадает с $f_0(t)$. Это означает, что функция $f_0(t)$ аналитически продолжается в D_1. Продолженную таким образом функцию обозначим через $f_0(z)$:

$$f_0(z) = \lim p_k(z), \quad z \in D_1.$$

Имеем

$$|f_0(z)| \leqslant c\psi(z), \quad z \in D_1,$$

$$|f_0(t)| \leqslant c\psi(t), \quad t \in E_\varphi.$$

Из сходимости интеграла $J(\psi, \rho_1, E)$ и из неравенства

$$\ln \psi(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_E \ln \psi(t) \frac{\partial G(t; z)}{\partial n} ds, \quad z \in D_1$$

заключаем, что субгармоническая функция $\ln \psi(z)$ имеет гармоническую мажоранту в D_1 и

$$\ln \psi(x) = o(x^{\rho_1}), \quad x \to +\infty.$$

Следовательно, $\ln |f_0(z)|$ также имеет гармоническую мажоранту в D_1 и $\ln |f_0(x)| = o(x^{\rho_1})$ при $x \to +\infty$.

Таким образом, обозначая через $C_\varphi^*(E)$ множество функций $f(z)$ из $C_\varphi(E)$, голоморфных в D_1 и удовлетворяющих условиям:

I. $\ln |f(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в D_1,

II. $\ln |f(x)| = o(x^{\rho_1})$ при $x \to +\infty$,

можем утверждать следующее.

Теорема 2. *Пусть полиномы не составляют всюду плотного множества в $C_\varphi(E)$. Тогда функции из $C_\varphi(E)$, допускающие аппроксимацию полиномами, входят в множество $C_\varphi^*(E)$.*

Возникает вопрос: когда любая функция из $C_\varphi^*(E)$ допускает аппроксимацию полиномами? Ответ на этот вопрос дается нижеследующей теоремой.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество голоморфных в D_1 функций $f(z)$, непрерывных в $\bar{D}_1$ (за возможным исключением точки $z = \infty$), удовлетворяющих условиям I и II, и таких, что

$$\left\| \frac{f(t)}{t+1} \right\| \leqslant 1, \quad \lim_{|t| \to +\infty} \frac{f(t)}{(t+1)\varphi(t)} = 0, \quad t \in E,$$

а через $\psi_1(z) = \sup_{f \in \mathfrak{M}_1} |f(z)|$.

Теорема 3. *Пусть полиномы не составляют плотного множества в $C_\varphi(E)$. Тогда для того чтобы полиномы составляли всюду плотное множество в $C_\varphi^*(E)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\psi_1(z) \equiv \psi(z), \quad z \in D_1. \tag{17}$$

Доказательство. **Необходимость.** Пусть множество полиномов плотно в $C_\varphi^*(E)$, то есть для любой функции $f(t) \in C_\varphi^*(E)$ и для заданного $\varepsilon > 0$ существует такой полином $p_n(t)$, что

$$\left|\frac{f(t)-p_n(t)}{\varphi(t)}\right| < \varepsilon, \quad t \in E. \tag{18}$$

По условию теоремы имеем

$$\psi(z) \leqslant C_R, \quad z \in \overline{D}_1^{(R)}: |z| \leqslant R, \ z \in \overline{D}_1. \tag{19}$$

Функция

$$\theta(t) = \frac{\psi(t)}{|t+1|} \leqslant \varphi(t) \tag{20}$$

всюду конечна и ограничена на E_R. Наряду с нормой (2) введем новую норму

$$\|f\|_1 = \sup_{t \in E} \frac{|f(t)|}{\theta(t)}. \tag{20'}$$

Докажем, что, если $f(t) \in C_\varphi^*(E)$, то $\|f\| = \|f\|_1$.

Из (20) имеем

$$\|f\| \leqslant \|f\|_1. \tag{21}$$

Из определения $\theta(t)$ при $p \in \mathfrak{M}$ будем иметь

$$\sup_{t \in E} |p(t)(t+1)^{-1}\theta^{-1}(t)| \leqslant 1, \text{ т. е. } \|p(t)(t+1)^{-1}\|_1 \leqslant 1.$$

Неравенство $\|p(t)(t+1)^{-1}\| \leqslant c$ влечет неравенство $\|p(t)(t+1)^{-1}\|_1 \leqslant c$ т. е.

$$\|p(t)(t+1)^{-1}\| \geqslant \|p(t)(t+1)^{-1}\|_1$$

и, следовательно, для полиномов $q(t) = (t+1)p(t)$ получим

$$\|q(t)\| = \|q(t)\|_1. \tag{22}$$

Из условия (18) имеем $\|p_n - p_m\| \to 0$. Из (22) заключаем, что $\|p_n - p_m\|_1 \to 0$, т. е. последовательность $\{p_n\}$ сходится в себе по норме (2'), значит она сходится к некоторой функции $f_1(t)$:

$$\lim \|p_n - f_1\|_1 = 0. \tag{23}$$

Но функция $\theta(t)$ всюду конечна и полиномы не составляют плотного множества в $C_\theta(E)$. По теореме 2 заключаем, что $f_1(t) \in C_\theta^*(E)$. Из (21) и (23) следует, что

$$\lim \|p_n - f_1\| = 0. \tag{24}$$

Рассмотрим функцию $f_2(t) = f(t) - f_1(t)$. Из (18) и (24) следует, что $\|f_2\| = 0$. Докажем, что $f_2(t) \equiv 0$. Из $f \in C_\varphi^*$ и $f_1 \in C_\theta^* \subset C_\varphi^*$ и из неравенства $\ln(a+b) \leqslant \ln^+ a + \ln^+ b + \ln 2$ выводим, что $f_2 \in C_\varphi^*$. Предположим, что $f_2 \not\equiv 0$. Тогда существует точка $z_0 \in D_1$ такая, что $f_2(z_0) \neq 0$. С другой стороны, так как по предположению полиномы всюду плотны в C_φ^*, для произвольного N существует полином $p(t)$ такой, что $\|f_2(t)-p(t)\| \leqslant \frac{1}{N}$ и $|p(z_0)-f_2(z_0)| < \frac{1}{2}|f(z_0)|$. Но $\|f_2\|=0$, следовательно, $\|p(t)\| \leqslant \frac{1}{N}$ или

$$Q(t) = Np(t) \in \mathfrak{M}.$$

Имеем $|Q(z_0)| = N|p(z_0)| > \frac{1}{2}N|f_2(z_0)|$. Вследствие произвольности N отсюда заключаем, что $\psi(z_0) = +\infty$, что противоречит условию теоремы. Таким образом, $f_2(z) \equiv 0$ и $f_1(z) \equiv f(z)$ и, следовательно, $\lim \|f - p_n\|_1 = 0$.

Далее имеем $\|f\| = \lim\|p_n\|$, $\|f\|_1 = \lim\|p_n\|_1$. Из (22) заключаем, что $\|f\| = \|f\|_1$. Итак, из (18) следует

$$\frac{|f(t)-p_n(t)|}{\theta(t)} < \varepsilon, \quad t \in E.$$

Теперь докажем равенство (17). Возьмем произвольную точку $z_0 \in D_1$ и пусть $\delta > 0$ — произвольное число. Подберем функцию $f_\delta(z) \in \overset{*}{C_\varphi}(E)$ из множества $\mathfrak{M}_1$ такую, что

$$|f_\delta(z_0)| > \psi_1(z_0) - \delta.$$

Выберем полином $p_{\delta, n}(t) \in \mathfrak{M}$ так, чтобы

$$\|p_{\delta, n}(t) - f_\delta(t)\|_1 < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — наперед заданное число. Отсюда следует равномерная сходимость последовательности $\{p_{\delta, n}(t)\}$ к $f_\delta(t)$ на отрезке $[0, 2|z_0| e^{i\frac{\pi}{2\rho}}]$. Но $\{p_{\delta, n}(z)\}$ (или некоторая ее подпоследовательность) сходится в области $|z| < 2|z_0|$, $z \in D_1$. Легко видеть, что предельная функция должна совпасть с $f_\delta(z)$. Следовательно

$$\lim |p_{\delta, n}(z_0)| = |f_\delta(z_0)|,$$

откуда заключаем, что

$$\sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z_0)| \geqslant |f_\delta(z_0)| > \psi_1(z_0) - \delta,$$

значит $\psi(z_0) \geqslant \psi_1(z_0)$.

Обратное неравенство очевидно, т. е. имеем равенство (17).

Достаточность. Докажем, что при равенстве (17) в рассматриваемом случае, т. е. когда

$$\psi(z) < +\infty, \ z \in D_1; \ \psi(z) = +\infty, \ z \in D_2,$$

любой функционал V, обращающийся в нуль на полиномах, есть тождественный нуль в $\overset{*}{C_\varphi}(E)$.

Итак, пусть система не полна в $C_\varphi(E)$. Тогда она не полна также в $C_\psi(E)$. Пусть V—произвольный нетривиальный функционал, ортогональный всем степеням t^n $V[t^n]=0$, $n=0, 1, 2, \cdots$. Продолжим функционал V на пространство $C_\varphi(E)$.

Обозначая через

$$F(z) = V\left[\frac{1}{t-z}\right] \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{d\sigma(s)}{(t-z)\,\psi(t)} \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{e^{i\varphi(s)}\,d\sigma_1(s)}{t-z},$$

будем иметь $F(z)\equiv 0$, $z\in D_2$. В теореме 1 установлено, что тогда $\sigma_1(s)$ будет абсолютно непрерывной функцией и предельные значения $F(t)$ функции $F(z)$, $z\in D_1$ почти всюду на множестве E совпадают с $\sigma_1'(s)=\sigma'(s)\,\psi^{-1}(t)$, т. е. имеем

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_E\frac{F(t)\,dt}{t-z}.$$

Это означает, что функция $F(z)$ представима своим интегралом Коши в угловой области D_1 и, следовательно, в любой подобласти $D_1^{(R)}$: $|z|\leqslant R$, $z\in D_1$.

Пусть $f(z)$ — любая голоморфная в D_1 функция, непрерывная в $\overline{D}_1$ и удовлетворяющая условию

$$|f(z)|\leqslant c\,|z+1|\,\psi(z),\quad z\in\overline{D}_1. \tag{25}$$

Функция $f_1(z)=f(z)\cdot F(z)$ представима интегралом Коши в области $D_1^{(R)}$

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R}\frac{f_1(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{E_R}\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,\quad z\in D_1^{(R)}. \tag{26}$$

Имеем

$$|f_1(t)|=|f(t)|\,|F(t)|\leqslant c\,|t+1|\,\psi(t)\,\frac{|\sigma_1'(s)|}{\psi(t)}=c\,|t+1|\,|\sigma_1'(s)|, \tag{26'}$$

откуда следует абсолютная сходимость интеграла

$$\int\limits_E\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt \tag{27}$$

для любого $z\overline{\in}E$. Из (26), устремляя R к бесконечности, получим, что существует предел

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_R}\frac{f_1(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=g(z) \tag{28}$$

для любого $z\in D_1$.

Докажем, что предел в левой части равенства (28) существует для любого конечного z, т. е., что $g(z)$ — целая функция. Имеем для любого z, $|z|<R_0$ (R_0 — произвольно)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt=0,$$

где интеграл берется по границе области $|\arg z|<\dfrac{\pi}{2\rho_1}$, $R_0<R<|z|<R'$ или

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_{C_R\uparrow}\frac{f_1(t)}{t-z}\int\limits_{E^+_{RR'}}\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt+\int\limits_{C_{R'}\downarrow}\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt+\int\limits_{E^-_{RR'}}\frac{f_1(t)}{t-z}\,dt\right]=0.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ при достаточно больших R и R' имеем, вследствие абсолютной сходимости интеграла (27),

$$\left| \int\limits_{E^+_{RR'}} + \int\limits_{E^-_{RR'}} \right| < \varepsilon,$$

следовательно, для достаточно больших R и R' будем иметь

$$\left| \int\limits_{C_R \uparrow} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int\limits_{C_{R'} \uparrow} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \varepsilon, \ |z| < R_0,$$

т. е. существует предел

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = g(z)$$

для любого z, равномерно в любом конечном круге $|z| < R_0$, откуда следует, что $g(z)$ — целая функция.

Устремляя R к бесконечности, из (26) получим

$$f(z) \cdot F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E} \frac{f(t)\, F(t)}{t - z}\, dt + g(z), \ z \in D_1$$

или

$$V \left[\frac{f(t) - f(z)}{t - z} \right] = g(z), \ z \in D_1. \tag{29}$$

Далее при $z \in D_2$ имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_R} \frac{f_2(t)}{t - z} dt = 0$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_R} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E_R} \frac{f_1(t)}{t - z} dt, \ z \in D_2,$$

откуда, устремляя R к бесконечности, получим

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E} \frac{f_1(t)}{t - z} dt, \ z \in D_2. \tag{30}$$

Оценим теперь целую функцию $g(z)$. При $z \in D_1$ из (29), как при доказательстве оценки (6), имеем

$$|g(z)| \leqslant \left| V \left[\frac{f(t)}{t - z} \right] \right| + |f(z)| \cdot |F(z)| \leqslant \|V\| \cdot \frac{c_1 (1 + |z|)}{\delta(z)} + |f(z)| \cdot |F(z)|. \tag{31}$$

Из (6′), (25) и (31) следует оценка

$$|g(z)| \leqslant \frac{c_2 (|z| + 1)}{\delta(z)}, \ z \in D_1. \tag{32}$$

При $z \in D_2$ из (30) и (26') следует, что

$$|g(z)| \leqslant \frac{c_3}{\delta(z)}, \quad z \in D_2,$$

$$|g(x)| \to 0, \quad x \to -\infty. \tag{33}$$

Но легко видеть, что из условий (32) и (33) вытекает, что $g(z) \equiv 0$.

Таким образом, для любой голоморфной в D_1 и непрерывной в $\bar{D}_1$ функции, удовлетворяющей условию (25), имеем

$$V\left[\frac{f(t)-f(z)}{t-z}\right] = 0, \quad z \in D_1. \tag{34}$$

Пусть теперь $h(z)$ — произвольная непрерывная в $\bar{D}_1$ функция из $C_\varphi^*(E)$. Тогда из (17) будем иметь $|h(z)| < c\psi(z)$, следовательно, функция $\tilde{h}(z) = (z-z_0)\,h(z)$, $z_0 \in D_1$ удовлетворяет условию (25). Тогда из (34) получим

$$V\left[\frac{\tilde{h}(t)-\tilde{h}(z)}{t-z}\right] = 0, \quad z \in D_1.$$

Полагая здесь, в частности, $z = z_0$, будем иметь $V[h(t)] = 0$, т. е. функционал V равен нулю на всех непрерывных в $\bar{D}_1$ функциях $h(t) \in C_\varphi^*$, следовательно, и на всех функциях пространства C_φ^*.

Замечание 1. Доказанная теорема тесно примыкает к результатам А. Л. Шагиняна [2] и М. М. Джрбашяна [6] о взвешенно-средней аппроксимации по площади полиномами голоморфных в D_1 функций, когда весовая функция $\varphi(z) = \varphi(|z|)$, $z \in D_1$ частного вида (А. Л. Шагинян) и когда она нормально возрастающая. Именно в этих работах впервые было установлено, что для аппроксимации голоморфных в D_1 функций полиномами в области D_1 нет необходимости требовать расхождения интеграла $J(\varphi, \rho_1, E)$, а достаточно расхождение интеграла $J(\varphi, \rho_2, E)$.

Замечание 2. Если условие (17) не выполняется, то полиномы не могут составить плотного множества во всем C_φ^*. Однако в этом случае можем утверждать, что, если голоморфная функция $f(z)$ удовлетворяет условию $|f(z)| \leqslant c\psi(z)$, $z \in D_1$, то она может быть приближена полиномами (в доказательстве достаточности нами использовано только неравенство $|h(z)| \leqslant c\psi(z)$).

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая:

б) $$J(\psi, \rho_k, E) < +\infty, \quad k = 1, 2. \tag{35}$$

В этом случае имеем $\psi(z) < +\infty$ во всей плоскости и, как и в теореме 2, получим, что любая функция, допускающая аппроксимацию полиномами в $C_\varphi(E)$, должна на множестве E_φ совпасть со значениями некоторой целой функции (которую мы обозначим через $f_0(z)$) и

$$|f_0(z)| \leqslant c\psi(z).$$

Из (35) и из неравенств

$$\ln \psi(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_E \ln \psi(t) \frac{\partial G_k(t; z)}{\partial n} ds, \ z \in D_k, \ k = 1, 2, \tag{36}$$

где G_k — функция Грина области D_k $(k = 1, 2)$, следует, что субгармоническая функция $\ln \psi(z)$ имеет гармоническую мажоранту в каждой из областей D_k $(k=1, 2)$ и

$$\psi(z) < A(\varepsilon) \exp(\varepsilon |z|^{\rho_k}), \ z \in D_k.$$

Нетрудно убедиться в том, что в рассматриваемом случае

$$J(\psi, \rho_2, E_k') < +\infty, \ k=1, 2,$$

где E_k' — параллельно E и лежит в D_k. Тогда, написав аналогичные (36) неравенства по множествам E_k', заключаем, что $A(\varepsilon) \leqslant A < +\infty$ и, следовательно, асимптотически

$$\psi(z) \leqslant A \exp(\varepsilon |z_k|^{\rho_k}), \ z \in D_k, \ k=1, 2$$

в замкнутом угле $\overline{D}_k$ $(k=1, 2)$. Отсюда следует, что функция $f_0(z)$— целая, порядка ρ_1 и минимального типа и такая, что $\ln |f_0(z)|$ имеет гармоническую мажоранту в каждой из областей D_k $(k=1, 2)$ и асимптотически

$$\ln |f_0(z)| \leqslant A \exp\{\varepsilon |z|^{\rho_2}\}, \ z \in D_2.$$

Таким образом, обозначая через $C_\varphi^*(E)$ множество целых функций $f \in C_\varphi(E)$, обладающих перечисленными свойствами, можем утверждать следующее.

Т е о р е м а 4. *Пусть полиномы не составляют всюду плотного множества в $C_\varphi(E)$ и пусть $J(\psi, \rho_2, E) < +\infty$. Тогда функции из $C_\varphi(E)$, допускающие аппроксимацию полиномами, входят в множество $C_\varphi^*(E)$ (точнее: на E_φ совпадают со значениями некоторой функции из C_φ^*).*

Чтобы сформулировать утверждение, аналогичное утверждению теоремы 3, введем следующие обозначения.

Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ множество целых функций $f(z) \in C_\varphi^*$, удовлетворяющих условию

$$\left\| \frac{f(t)}{t+1} \right\| \leqslant 1, \ \lim_{|t| \to +\infty} \frac{f(t)}{(t+1)\varphi(t)} = 0, \ t \in E,$$

а через $\psi_1(z) = \sup\limits_{f \in \mathfrak{M}_1} |f(z)|$.

Т е о р е м а 5. *Пусть полиномы не составляют плотного множества в $C_\varphi(E)$ и пусть $I(\psi, \rho_2, E) < +\infty$. Тогда для того чтобы полиномы составляли всюду плотное множество в $C_\varphi^*(E)$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\psi_1(z) \equiv \psi(z).$$

Доказательство по существу не отличается от доказательств теоремы 3, поэтому мы его опускаем.

4°. Рассмотрим теперь задачу весовой полноты полиномов в пространстве непрерывных функций, заданных на нескольких лучах.

Пусть на множестве E — совокупности лучей $E_1, E_2, \cdots, E_n$, исходящих из начала координат и перенумерованных в порядке возрастания аргумента, определена вещественная функция $\varphi(t) \geqslant 1$, стремящаяся к $+\infty$ быстрее любой степени $|t|^n$ при $|t| \to +\infty$, и пусть $C_\varphi(E)$ означает пространство непрерывных на E функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $f(t)\varphi^{-1}(t) \to 0$ при $|t| \to +\infty$, $t \in E$. Норма элемента f определяется, как в пункте 1°, равенством (2).

Угловую область, ограниченную лучами E_k и E_{k+1} $(E_{n+1} = E_1)$ обозначим через $D_{k,\,k+1}$, а ее раствор — через $\dfrac{\pi}{\rho_k}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$.

Обозначим далее через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_\varphi$ множество полиномов $p(z)$, удовлетворяющих условию

$$\left\| \frac{p(t)}{1+|t|} \right\| \leqslant 1,$$

а через $\psi(z) = \sup\limits_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)|$.

Теорема 6. *Для полноты системы полиномов в* $C_\varphi(E)$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_{E_k + E_{k+1}} \frac{\ln \psi(t)}{1 + |t|^{1+\rho_k}} |dt| = +\infty, \quad k = 1, 2, \cdots, n. \tag{37}$$

Доказательство. Необходимость доказывается как и в теореме 1.

Докажем, что, если полиномы не плотны в $C_\varphi(E)$, то хотя бы один из интегралов (37) сходится.

Пусть полиномы не плотны в $C_\varphi(E)$. Тогда они не плотны также в $C_\psi(E)$, и пусть V - произвольный нетривиальный функционал в $C_\psi(E)$ такой, что $V[t^n] = 0$.

Введем, как и в теореме 1, обозначение

$$F(z) = V\left[\frac{1}{t-z}\right] = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_E \frac{e^{i\varphi(s)}\,d\sigma(s)}{\psi(t)(t-z)}.$$

Если $\psi(z) < +\infty$ во всей плоскости, то по схеме доказательства теоремы 1 легко устанавливается сходимость всех интегралов (37).

Пусть теперь $\psi(z) \equiv +\infty$ в некоторых областях. Рассмотрим ту из них, которая граничит с областью, где $\psi(z) < +\infty$. Пусть эти области суть D_{12} и D_{23}:

$$\psi(z) = +\infty, \ z \in D_{12}, \ \psi(z) < +\infty, \ z \in D_{23}.$$

Тогда будем иметь

$$F(z) \equiv 0, \ z \in D_{12}. \tag{38}$$

Представим функцию $F(z)$ в виде

$$F(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

где

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E_1+E_2} \frac{e^{i\varphi(s)}\, d\sigma(s)}{\psi(t)(t-z)}, \quad f_2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E-(E_1+E_2)} \frac{e^{i\varphi(s)}\, d\sigma(s)}{\psi(t)(t-z)}.$$

Из (38) следует, что в области D_{21} $f_1(z) \equiv -f_2(z)$.

По теореме Привалова можем написать, что почти всюду на E_2

$$\lim_{\substack{z \to t \in E_2 \\ z \in D_{21}}} f_1(z) + f_2(t) = \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)}$$

или

$$\lim_{\substack{z \to t \in E_2 \\ z \in D_{23}}} f_1(z) = \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)} - f_2(t),$$

откуда следует, что

$$\lim_{\substack{z \to t \in E_2 \\ z \in D_{23}}} F(z) = \frac{\sigma'(s)}{\psi(t)}. \tag{39}$$

Записав теперь $F(z)$ в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E_2+E_3} \frac{e^{i\varphi(s)}\, d\sigma(s)}{(t-z)\,\psi(t)} + f^*(z)$$

и учитывая, что $f^*(z)$ представляется интегралом Коши в области D_{23}

$$f^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E_2+E_3} \frac{f^*(t)\, dt}{t-z},$$

будем иметь представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{E_2+E_3} \frac{d\varepsilon_1(t)}{t-z}. \tag{40}$$

Из (40) следует сходимость интеграла

$$\int\limits_{E_2+E_3} \frac{\ln|F(t)|}{1+|t|^{1+p_2}}\, |dt|,$$

где $F(t)$ -- предельное значение функции $F(z)$ в точке $t \in E_2 + E_3$ изнутри области D_{23}. Тогда из (39) будет следовать сходимость интеграла

$$\int\limits_{E_2} |\ln| \left|\frac{\sigma'(s)}{\psi(t)}\right| \frac{|dt|}{1+|t|^{1+p_2}},$$

откуда, как и в теореме 1, следует сходимость интеграла

$$\int\limits_{E_2} \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+p_2}}\, |dt|. \tag{41}$$

Сходимость интеграла (41) по лучу E_3 устанавливается аналогич но, если $\psi(z) \equiv +\infty$ в области D_{31}. Если же $\psi(z) < +\infty$, $z \in D_{31}$, то сходимость интеграла

$$\int\limits_{E_3} \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+\rho_3}}|dt|$$

доказывается как и в теореме 1.

Замечание. Легко видеть, что приведенное доказательство не обходимого и достаточного условия полноты полиномов на систем лучей применимо также в случае, когда аппроксимация совершается на произвольной системе кривых в комплексной области, удовлетворяю щих условиям М. М. Джрбашяна [3].

5°. Приведем теперь несколько примеров весовых функций, пред ложенных С. Н. Мергеляном. Эти весовые функции интересны тем что они стремятся к $+\infty$ существенно разными скоростями на различ ных лучах, при этом по одному лучу требуется минимальный по шка ле экспонент рост, а по остальным лучам рост диктуется требованием полноты на рассматриваемой системе лучей.

1. Рассмотрим сначала весовую аппроксимацию на вещественной оси.

Пусть на оси $(-\infty, +\infty)$ весовая функция $\varphi(t)$ определена сле дующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp|t|^{\alpha}, & t < 0 \\ \exp|t|^{\beta}, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Докажем, что при $\alpha \geqslant 1/2$, $\beta > 1$ система полиномов всюду плотна в $C_\varphi(-\infty, +\infty)$.

При применении общего интегрального критерия весовой аппрок симации С. Н. Мергеляна или Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна мы сталкиваемся с определенными трудностями, вызванными возмож ным резко несимметричным ростом весовой функции $\varphi(t)$, поэтому мы применяем метод, принадлежащий Б. Я. Левину, который связывает полноту с квазианалитичностью определенных классов бесконечно диф ференцируемых функций на оси $(-\infty, +\infty)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество полиномов $p(z)$, удовлетворяющих условию

$$|p(x)| \leqslant \varphi(x) \quad (-\infty < x < +\infty),$$

а через $\mathfrak{M}_1$ — множество полиномов $R(z)$, удовлетворяющих условиям

$$|R(x)| \leqslant \exp|x|^{2\beta}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$|R(iy)| \leqslant \exp|y|^{2\alpha}, \quad -\infty < y < +\infty,$$

и введем соответствующие функционалы

$$\sup_{p \in \mathfrak{M}} |p(z)| = \psi(z), \quad \sup_{R \in \mathfrak{M}_1} |R(z)| = \psi_1(z).$$

Легко видеть, что из $\psi(z) \equiv +\infty$, $\operatorname{Im} z \neq 0$ следует тождество $\psi_1(z) \equiv +\infty$, $\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Re} z \neq 0$ и обратно. Это означает, что полнота полиномов в $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$ эквивалентна полноте полиномов в $C_{\varphi_1}(E)$, где

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \exp|t|^{2\beta}, & -\infty < t < +\infty \\ \exp|t|^{2\alpha}, & \operatorname{Re} t = 0, \end{cases}$$

и через E обозначены координатные оси.

Предположим, что нет полноты в $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$. Тогда нет полноты также в $C_{\varphi_1}(E)$. Это означает, что на E существует функция $\sigma(t)$ ограниченной вариации и такая, что $\sigma(t) \not\equiv \mathrm{const}$ и

$$\int\limits_E t^n \frac{d\sigma(t)}{\varphi_1(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1}$$

Рассмотрим функцию

$$f(\lambda) = \int\limits_E e^{it\lambda} \frac{d\sigma(t)}{\varphi_1(t)} = f_1(\lambda) + f_2(\lambda),$$

где

$$f_1(\lambda) = \int\limits_{-i\infty}^{+i\infty} e^{it\lambda}\, e^{-|t|^{2\alpha}}\, d\sigma(t), \tag{2}$$

$$f_2(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, e^{-|t|^{2\beta}}\, d\sigma(t). \tag{3}$$

Так как по условию $2\alpha \geqslant 1$, $2\beta > 2$, то функция $f_1(\lambda)$ голоморфна полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda = u < 1$, а $f_2(\lambda)$ — целая, следовательно, $f(\lambda)$ голоморфна в полуплоскости $u < 1$. Из (1) следует, что $f^{(n)}(0) = 0$ $n = 0, 1, \cdots$, откуда заключаем, что $f(\lambda) \equiv 0$, или

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0. \tag{4}$$

Оценим целую функцию $f_2(\lambda)$. Из (3), применяя неравенство Гельдера, получим

$$|f_2(\lambda)| < \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{|t|\,|\lambda|}\, e^{-|t|^{2\beta}} |d\sigma(t)| \leqslant C \exp\left(\frac{1}{2\beta'}|\lambda|^{2\beta'}\right), \quad \frac{1}{2\beta} + \frac{1}{2\beta'} = 1,$$

т. е. $f_2(\lambda)$ имеет порядок $2\beta' < 2$.

Далее из (3) следует, что на вещественной оси $-\infty < u < +\infty$ $|f_2(u)| \leqslant c$, а из (2) следует неравенство $|f_1(iv)| \leqslant c$, $-\infty < v < +\infty$, следовательно, согласно (4), $|f_2(iv)| \leqslant c$, $-\infty < v < +\infty$.

Таким образом, целая функция $f_2(\lambda)$ ограничена на координатных осях. Так как ее порядок меньше двух, то она ограничена во всей плоскости и, следовательно, постоянна.

Итак

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{it\lambda}\, e^{-|t|^{2\beta}}\, d\sigma(t) \equiv \mathrm{const},$$

откуда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-|t|^{2\beta}} d\sigma(t) = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Но функцию $f(t) = |t|$ можно приблизить полиномами $p(t)$ $(p(0) = 0)$ на оси $(-\infty, +\infty)$ при наличии веса $\exp|t|^{2\beta}$, $2\beta > 1$, следовательно, $\sigma(t) \equiv \text{const}$, при $-\infty < t < +\infty$, что, в свою очередь, дает $f_1(\lambda) \equiv 0$, т. е. $\sigma(t) \equiv \text{const}$ на мнимой оси. Таким образом, мы получили, что $\sigma(t) \equiv \text{const}$ на E, что противоречит условию и, тем самым, наше утверждение доказано.

2. Приведем теперь аналогичный пример весовой функции, определенной на двух лучах комплексной плоскости. Пусть E означает систему двух лучей $\arg t = 0$ и $\arg t = \frac{\pi}{\rho}$ $(\rho > 1)$, и пусть на E определена весовая функция $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp|t|^{\alpha}, & \arg t = 0 \\ \exp|t|^{\beta}, & \arg t = \dfrac{\pi}{\rho}. \end{cases}$$

Докажем, что, если $\alpha \geqslant 1/2$, $\beta > \rho$, то система полиномов полна в $C_\varphi(E)$, т. е. покажем, что из равенств

$$\int_E t^n \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

следует, что $\sigma(t) \equiv \text{const}$ на E.

С этой целью составим функцию

$$f(\lambda) = \int_E \operatorname{ch} \sqrt{\lambda t} \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}.$$

Как и в первом примере, легко показать, что $f(\lambda) \equiv 0$. Представим $f(\lambda)$ в виде $f(\lambda) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$, где

$$f_1(\lambda) = \int_0^{\infty} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda t}\, e^{-|t|^{\alpha}} d\sigma(t), \tag{1}$$

$$f_2(\lambda) = \int_0^{e^{i\frac{\pi}{\rho}}\infty} \operatorname{ch} \sqrt{\lambda t}\, e^{-|t|^{\beta}} d\sigma(t). \tag{2}$$

Функция $f_2(\lambda)$ — целая. Из (2) с помощью неравенства Гельдера убеждаемся, что $f_2(\lambda)$ имеет порядок β' $\left(\frac{1}{2\beta'} + \frac{1}{2\beta} = 1\right)$ и нормальный тип. Далее опять таки из представления (2) следует, что $f_2(\lambda)$ ограничена на луче $\arg\lambda = \pi - \frac{\pi}{\rho}$

$$|f_2(|\lambda| e^{i\pi(1-1/\rho)})| \leqslant c.$$

Представление (1), в свою очередь, нам дает следующую оценку на вещественном отрицательном луче:

$$|f_1(|\lambda| e^{i\pi})| \leqslant c. \tag{3}$$

Из (3) и тождества $f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0$ следует, что $f_2(\lambda)$ также ограничена на отрицательной вещественной полуоси

$$|f_2(|\lambda| e^{i\pi})| \leqslant c.$$

Таким образом, целая функция $f_2(\lambda)$ ограничена на сторонах угла $\pi(1-1/\rho) \leqslant \arg\lambda \leqslant \pi$ раствора $\frac{\pi}{\rho}$, имеет порядок β' и нормальный тип. Раствор дополнительного угла обозначим через $\frac{\pi}{\rho_1}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_1} = 2\right)$. Легко видеть, что $\beta' < \rho$, $\beta' < \rho_1$, и, применяя принцип Фрагмена-Линделефа, заключаем, что $f_2(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, то есть

$$\int_0^{e^{i\frac{\pi}{\rho}}\infty} \operatorname{ch}\sqrt{\lambda t}\, e^{-|t|^{\beta}} d\sigma(t) \equiv \mathrm{const},$$

что, в свою очередь, дает $d\sigma(t) \equiv 0$ на луче $\arg t = \frac{\pi}{\rho}$. Тогда из тождества $f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0$ будет следовать, что $f_2(\lambda) \equiv 0$ или $d\sigma(t) \equiv 0$ на луче $(0, +\infty)$, что и требовалось доказать.

Заметим, что тем же способом можно доказать, что, если

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp t^{1/2}, & \arg t = 0 \\ \exp |t|^{\rho} \ln(1+|t|), & \arg t = \dfrac{\pi}{\rho}, \end{cases}$$

то опять полиномы всюду плотны в $C_\varphi(E)$.

Отметим здесь, что существует функция $h(t)$, определенная на полуоси $(-\infty, 0)$ и такая, что система полиномов полна в $C_h(-\infty, 0)$ и вместе с тем эта система не полна на оси $(-\infty, +\infty)$ при весе

$$\varphi(t) = \begin{cases} h(t), & t < 0 \\ \exp t^{\beta}, & t \geqslant 0 \end{cases}$$

ни для одного конечного значения β.

3. В первом примере мы показали, что в случае веса

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \exp |t|^{\alpha}, & \operatorname{Im} t = 0, \ \alpha \geqslant 1 \\ \exp |t|^{\beta}, & \operatorname{Re} t = 0, \ \beta > 2 \end{cases}$$

система полиномов полна в C_φ на координатных осях. Сейчас мы покажем, что полнота имеет место также в случае веса

$$
\varphi(t)=\begin{cases}\exp t^{\alpha}, & \arg t=0, \quad \alpha>1/2\\ \exp|t|^{\beta}, & \arg t=\dfrac{\pi}{2}, \ \beta>2\\ \exp|t|^{\gamma}, & \arg t=\pi, \ \gamma>1\\ \exp|t|^{\delta}, & \arg t=3\ \dfrac{\pi}{2}, \ \delta>2.\end{cases}
$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\delta=\beta$. Для доказательства достаточно установить, что из равенств

$$
\int_E t^n \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}=0, \ n=0,1,2,\cdots
$$

следует, что $d\sigma(t)\equiv \text{const}$ на координатных осях.

Составим функцию

$$
f(\lambda)=\int_E e^{\lambda\sqrt{t}}\frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}.
$$

Она—целая и

$$
f^{(2n)}(0)=\int_E t^n\frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}=0, \ n=0,1,2,\cdots,
$$

т. е. $f(\lambda)$ — нечетная функция, следовательно

$$
f(\lambda)+f(-\lambda)\equiv 0. \tag{1}
$$

Представим $f(\lambda)$ в виде $f(\lambda)=f_1(\lambda)+f_2(\lambda)$, где

$$
f_1(\lambda)=\int_0^{\infty} e^{-|t|^{\alpha}}e^{\lambda\sqrt{t}}\,d\sigma(t),
$$

$$
f_2(\lambda)=\int_0^{+i\infty} e^{\lambda\sqrt{t}}e^{-|t|^{\beta}}d\sigma(t)+\int_{-\infty}^{0} e^{\lambda\sqrt{t}}e^{-|t|^{\gamma}}d\sigma(t)+\int_{-i\infty}^{0} e^{\lambda\sqrt{t}}e^{-|t|^{\beta}}d\sigma(t)=
$$

$$
=f_{21}(\lambda)+f_{22}(\lambda)+f_{23}(\lambda). \tag{2}
$$

Из (1) имеем

$$
f_1(\lambda)+f_1(-\lambda)+f_2(\lambda)+f_2(-\lambda)\equiv 0. \tag{1'}
$$

Функция $f_1(\lambda)+f_1(-\lambda)$ ограничена на мнимой оси, следовательно, сумма $f_2(\lambda)+f_2(-\lambda)$ также ограничена на мнимой оси

$$
|f_2(i|\lambda|)+f_2(-i|\lambda|)|\leqslant c. \tag{3}
$$

Но $f_2(\lambda)$ ограничена в области $\frac{\pi}{4}\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi/2+\frac{\pi}{4}$, так как

$$
|f_{21}(\lambda)|\leqslant c, \ \frac{\pi}{4}\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi+\frac{\pi}{4},
$$

$$
|f_{22}(\lambda)|\leqslant c, \ 0\leqslant\arg\lambda\leqslant\pi,
$$

$$
|f_{23}(\lambda)|\leqslant c, \ -\frac{\pi}{4}\leqslant\arg\lambda\leqslant 3\ \frac{\pi}{4},
$$

и, значит

$$|f_2(i|\lambda|)| \leqslant c. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует ограниченность $f_2(\lambda)$ на отрицательной мнимой полуоси

$$|f_2(-i|\lambda|)| \leqslant c. \tag{5}$$

Рассмотрим функцию $_{23}(\lambda)$. Она ограничена в верхней полуплоскости и

$$|f_{22}(\lambda)| \leqslant |f_2(\lambda)| + |f_{21}(\lambda)| + |f_{23}(\lambda)|.$$

Из (5) следует, что

$$|f_{22}(-i|\lambda|)| \leqslant c + |f_{21}(-i|\lambda|)| + |f_{23}(-i|\lambda|)|.$$

С помощью неравенства Гельдера легко показать, что функции $f_{21}(\lambda)$ и $f_{23}(\lambda)$ имеют порядок $< \frac{4}{3}$, а функция $f_{22}(\lambda)$ имеет порядок <2.

Таким образом, целая функция $f_{22}(\lambda)$ имеет порядок <2, ограничена в верхней полуплоскости, а по мнимому отрицательному лучу имеет порядок роста $< \frac{4}{3}$. Отсюда с помощью известных соображений $\left(\text{рассмотрение функции } f_{22}(\lambda)\cdot\exp(a\lambda^{\rho}),\ \rho < \frac{4}{3}\right)$ получаем, что $f_{22}(\lambda)$ имеет порядок $< \frac{4}{3}$. Следовательно, функция $f_2(\lambda)$ имеет порядок меньше $\frac{4}{3}$. Применяя принцип Фрагмена-Линделефа, получим, что $f_2(\lambda) \equiv \mathrm{const}$. Доказательство нашего утверждения заканчивается как в предыдущих примерах.

4. Следующий пример относится к вопросу о весовой полноте системы $\{t^{\lambda_n}\}$ на вещественной оси. Во всех работах, посвященных этому вопросу, полнота системы $\{t^{\lambda_n}\}$ исследовалась при предположении, что система степеней $\{t^n\}$ полна.

Но естественно ожидать, что, если система $\{t^{\lambda_n}\}$ богаче системы $\{t^n\}$, то она может быть полной при меньшем требовании, налагаемом на рост весовой функции $\varphi(t)$, как это имеет место при приближении на одном луче: например, система $\{t^{\frac{n}{2}}\}$ полна на полуоси $(0, +\infty)$ в случае веса $\exp t^{1/4}$, хотя система $\{t^n\}$ не полна.

Но, с другой стороны, легко видеть, что в случае веса $\varphi(t)$ таком, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \varphi(t)\, dt}{1+t^2} < +\infty,$$

никакая система $\{t^{\lambda_n}\}$, $c_1 \leqslant |\lambda_{n+1} - \lambda_n| \leqslant c_2$ не может быть полной в $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$. Тем не менее мы покажем, что по одному лучу рост весовой функции можно снизить за счет обогащения системы $\{t^n\}$.

Определим весовую функцию $\varphi(t)$ на оси $(-\infty, +\infty)$ следующи
образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} \exp|t|^{\alpha}, & t \leqslant 0,\ \alpha > 1/4 \\ \exp t^{\beta}, & t \geqslant 0,\ \beta > 1, \end{cases}$$

и покажем, что система $\{t^{n/2}\}$ полна в $C_{\varphi}(-\infty, +\infty)$, хотя систем $\{t^{n}\}$ может и не быть полной (если $\alpha < 1/2$).

Мы должны показать, что из равенств

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^{n/2} \frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \qquad (1$$

следует тождество $\sigma(t) \equiv \mathrm{const}$.

Составим функцию

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{ch}\,(\sqrt{\lambda}\,\sqrt[4]{t}\,)\,\frac{d\sigma(t)}{\varphi(t)}.$$

Как и в предыдущих примерах, из (1) следует, что $f(\lambda) \equiv 0$. Пре,
ставляя $f(\lambda)$ в виде

$$f(\lambda) = \int_{-\infty}^{0} \mathrm{ch}\sqrt{\lambda}\,\sqrt[4]{t}\,e^{-|t|^{\alpha}} d\sigma(t) + \int_{0}^{+\infty} \mathrm{ch}\sqrt{\lambda}\,\sqrt[4]{t}\,e^{-|t|^{\beta}} d\sigma(t) = f_1(\lambda) + f_2(\lambda)$$

будем иметь

$$f_1(\lambda) + f_2(\lambda) \equiv 0.$$

Функция $f_1(\lambda)$ ограничена на луче $\arg\lambda = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $f_2($
также ограничена на этом луче. С другой стороны, $f_2(\lambda)$ ограничен
на отрицательной полуоси. Таким образом, целая функция $f_2(\lambda)$ удо
летворяет условиям

$$|f_2(i|\lambda|)| \leqslant c,$$
$$|f_2(-|\lambda|)| < c. \qquad (2$$

С помощью неравенства Гельдера легко устанавливается оценка

$$|f_2(\lambda)| \leqslant C\exp(c_1|\lambda|^{2\beta'}),\ \frac{1}{4\beta} + \frac{1}{4\beta'} = 1, \qquad (3$$

то есть $f_2(\lambda)$ имеет порядок $2\beta' < 2/3$ и нормальный тип. Из (2) и (
следует, что $f_2(\lambda) \equiv \mathrm{const}$, и доказательство заканчивается, как и
предыдущих примерах.

Автор выражает искреннюю благодарность М. М. Джрбашяну
Б. Я. Левину за обсуждение работы и ценные советы.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 6.V.196

Ի. Հ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԱՆԸՆԴՀԱՏ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԿՇՌԱՅԻՆ-ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅՈՒՆԸ ԲԱԶՄԱՆԴԱՄՆԵՐՈՎ ԵՐԿՈՒ ՃԱՌԱԳԱՅԹՆԵՐԻ ՎՐԱ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է անհրաժեշտ և բավարար պայման որպեսզի հարթության երկու ճառագայթների վրա՝ E տված $\varphi(t) \geqslant 1$ կշռով հնարավոր լինի ամեն մի անընդհատ ֆունկցիայի $C_\varphi(E)$ տարածությունից մոտարկել բազմանդամներով ($f \in C_\varphi(E)$, եթե $f(t)\cdot\varphi^{-1}(t) \to 0$ երբ $|t| \to +\infty$, $t \in E$, իսկ տարածության նորման որոշվում է (2) բանաձևով)։

Այդ պայմանը (4) ինտեգրալների տարամիտությունն է, որտեղ

$$\psi(t) = \sup_{\left\|\frac{p(t)}{t+1}\right\|<1} |p(t)|, \text{ իսկ } \frac{\pi}{\rho_1} \text{ և } \frac{\pi}{\rho_2} \left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=2\right)$$

դիտարկվող ճառագայթներով կազմված անկյունների մեծություններն են։

Քննարկված է նաև այն դեպքը, երբ ամբողջ $C_\varphi(E)$ տարածությունում այդպիսի մոտավորություն հնարավոր չէ և նկարագրված է այն անընդհատ ֆունկցիաների դասը, որոնք թույլատրում են նման մոտարկում։

Հոդվածի վերջում բերված են ոչ սիմետրիկ կշռային ֆունկցիաների մի քանի օրինակներ։

I. O. KCHATCHATRIAN

ON WEIGHTED-UNIFORM APPROXIMATION OF CONTINIOUS FUNCTIONS WITH POLYNOMS ON TWO HALFLINES

Summary

The necessary and sufficient condition of completeness with weight for polynoms in the space $C_\varphi(E)$ of functions continious on two half-lines is given.

The condition is the divergence of the integrals

$$\int_E \frac{\ln \psi(t)}{1+|t|^{1+\rho_k}} |dt|, \quad k=1, 2,$$

where E stands for the halflines, where the approximation takes place, $\frac{\pi}{\rho_1}$ and $\frac{\pi}{\rho_2}$ are the angles, formed by these halflines and $\psi(t)$ is related to the weighting function $\varphi(t)$ as follows

$$\psi(t) = \sup_{\left|\frac{p(t)}{(t+1)\varphi(t)}\right|<1} |p(t)|.$$

The case, when the polynoms do not form a complete system in t[he] whole C_φ is also considered. Here the class of continious on E fu[n]ctions, which may be nevertheless approximated with polynoms, is de[s]cribed.

Several examples of nonsymmetrical weighting functions are give[n].

ЛИТЕРАТУРА

1. *S. Bernstein.* Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'ax[e] réel et l'une de ses applications, Bull. Math. de France, 52, 1924, 399–410.
2. *А. Л. Шагинян.* О полноте семейств аналитических функций в комплексной обла[сти], Сообщ. Ин-та матем. и мех. АН АрмССР, вып. 1, 1947.
3. *М. М. Джрбашян.* Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных при[]ближений в комплексной области, Матем. сб., т. 36, № 3, 1955, 353–440.
4. *С. Н. Мергелян.* Весовые приближения многочленами, УМН, т. XI, вып. 5 (71[),] 1956, 107–152.
5. *И. О. Хачатрян.* О взвешенном приближении целых функций нулевой степен[и] многочленами на действительной оси, Записки мех.-матем. факультета и Харь[]ковского матем. об-ва, серия 4, том 29, 1963, 129–142.
6. *М. М. Джрбашян.* Докторская диссертация, МГУ, 1948.