ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, №№ 4—5, 1968 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

О РАДИАЛЬНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ФУНКЦИИ B_α

В связи с построением общей теории параметрического представления мероморфных в единичном круге функций в работах М. М. Джрбашяна [1а, б] для каждого значения параметра $\alpha\ (-1<\alpha<\infty)$ была введена функция $B_\alpha(z, A)$, являющаяся естественным обобщением произведения Бляшке и совпадающая с ним при значении параметра $\alpha=0$.

В работах [2а, б] исследованы граничные свойства функции $B_\alpha(z, A)$ при значениях параметра $\alpha\in(-1,0)$. Установлено, что радиальные пределы

$$\lim_{r\to 1-0} B_\alpha(re^{i\gamma}, A)=B_\alpha(e^{i\gamma}, A)$$

существуют не только почти для всех $\gamma\in[0,2\pi]$, как это имеет место для обычного произведения Бляшке

$$B(z, A)\equiv B_0(z, A)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{a_k-z}{1-\bar{a}_k z}\cdot\frac{|a_k|}{a_k},$$

а более того, что эти пределы существуют всюду, за исключением, быть может, некоторого множества $E\subset[0,2\pi]$, γ-емкость которого — нуль, где $\gamma\in(1+\alpha,\ 1)$ любое.

В настоящей статье устанавливаются некоторые новые результаты о граничных свойствах функции М. М. Джрбашяна $B_\alpha(z, A)$ и, в частности, доказывается, что предыдущее утверждение относительно емкости исключительного множества E справедливо и при $\gamma=1+\alpha$.

1° **Основные определения.** В предположении, что $A=\{a_k\}_1^\infty$ $(0<|a_k|<1)$ — некоторая последовательность чисел из единичного круга $D:\{|z|<1\}$, пронумерованная в порядке неубывания их модулей и удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|)^{1+\alpha}<+\infty\quad(-1<\alpha<\infty), \tag{1}$$

функция $B_\alpha(z, A)$ строится таким образом

$$B_\alpha(z, A)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{-W_\alpha(z,\, a_k)}, \tag{2}$$

где

$$W_\alpha(z, \zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_\alpha(e^{-i\gamma}z)\ V_\alpha(e^{i\gamma}, \zeta)\,d\gamma, \tag{3}$$

$$V_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta) = r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log \left|1 - \frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|, \tag{4}$$

$$S_\alpha(z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1\right\}. \tag{5}$$

Здесь $D^{-\alpha}$ — оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, т. е., если $\varphi(r) \in L_1(0,1)$, то

$$D^{-\alpha}\varphi(r) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^r (r-t)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt \quad (0<\alpha<\infty),$$

$$D^{-\alpha}\varphi(r) = \frac{d}{dr}\{D^{-(1+\alpha)}\varphi(r)\} \quad (-1<\alpha<0),$$

причем, поскольку почти всюду на $(0,1)$

$$\lim_{\alpha \to +0} D^{-\alpha}\varphi(r) = \varphi(r),$$

то естественно полагается, что

$$D^0\varphi(r) = \varphi(r), \quad r \in (0,1).$$

При условии (1) произведение $B_\alpha(z, A)$ равномерно и абсолютно сходится в любом замкнутом круге $|z| \leqslant r < 1$, определяя аналитическую в круге $|z|<1$ функцию, обращающуюся в нуль только на последовательности A.

Приведем некоторые хорошо известные определения [3, 4], которые понадобятся нам в дальнейшем.

а) Пусть E — некоторое множество в комплексной плоскости и $h(r)$ — некоторая вещественная функция меры, то есть $h(r)$ непрерывная и неубывающая функция при $r>0$, $h(0)=0$ и $r^{-2}h(r)$ не возрастает. Внешняя h-хаусдорфова мера множества E определяется следующим числом:

$$M_h(E) = \sup_{\varepsilon>0}\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} h[d(E_i)]:\ E \subset \bigcup_1^{\infty} E_i,\ d(E_i)<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots\right\},$$

где $d(E_i)$ означает диаметр множества E_i.

Если $h(r) = r^\beta$, где $0<\beta<2$, то мера называется β-хаусдорфовой и обозначается через $M_\beta(E)$.

б) Пусть E—ограниченное борелево множество на комплексной плоскости и β $(0<\beta<2)$—фиксированное число. Если существует такое положительное распределение масс μ на E, что $\mu(E)=1$, и интеграл

$$\int_E \frac{d\mu(\zeta)}{|z-\zeta|^\beta}$$

ограничен для всех z, то говорят, что множество E имеет положительную β-емкость, в противном случае говорят, что β-емкость множества E равна нулю и пишут $C_\beta(E) = 0$.

в) Если для ограниченного борелева множества E $M_\beta(E)=0$, то $C_\beta(E)=0$. Обратное, вообще говоря, неверно. Если для компактного множества E имеем $M_h(E)>0$, где функция меры $h(r)$ удовлетворяет условию

$$\int_0 \frac{h(t)}{t^{1+\beta}}\,dt<+\infty,$$

то можем утверждать, что $C_\beta(E)>0$.

В дальнейшем, если не указано особо, мы будем рассматривать только значения α из промежутка $(-1,0)$, а через c обозначать абсолютные константы, не обязательно равные между собой.

2°. **Результаты вспомогательного характера**. Следующая теорема о борелевых рядах носит довольно общий характер. Отметим, что при $\alpha=0$ эта теорема была установлена Л. Карлесоном [3].

Теорема 1. *Пусть* $\{a_\nu\}$ $(0\leqslant|a_\nu|<1)$ — *последовательность комплексных чисел из круга* D, *a* $\{A_\nu\}_1^\infty$ $(0<A_\nu<1)$ — *произвольная последовательность.*

Если $h(r)$ — *функция меры такая, что*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu^{1+\alpha}\int_{A_\nu}^{2} \frac{h(r)}{r^{2+\alpha}}\,dr<+\infty \quad (-1<\alpha\leqslant 0), \tag{6}$$

то $M_h(E)=0$, *где*

$$E=\left\{z:\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{A_\nu}{|z-a_\nu|}\right)^{1+\alpha}=+\infty\right\}.$$

Доказательство. Теорема доказывается тем же методом Берлинга, что и доказательство Л. Карлесона. Изложим это доказательство для случая $\alpha\in(-1,0]$.

Поскольку $r^{-2}h(r)$ не возрастает, то из условия (6) теоремы следует, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} h(A_\nu)<+\infty.$$

Для любого целого $p\geqslant 1$ обозначим через O_p открытое множество

$$O_p=\left\{z:\sum_{p}^{\infty}\left(\frac{A_\nu}{|z-a_\nu|}\right)^{1+\alpha}>1\right\}.$$

Пусть μ — неотрицательная вполне аддитивная функция распределения такая, что

$$\mu(r,a)\leqslant h(r),$$

где $\mu(r,a)$ — масса, расположенная на части множества O_p, лежащего в круге радиуса r с центром в точке a. Вне множества O_p $\mu(r,a)$ равна нулю.

Для любого a_ν, $\nu > p$ опишем круги с радиусами A_ν и с центро в этой точке, и обозначим через G_p внешность этих кругов. Ввиду т го, что $\mu(r, a) \leqslant h(r)$, на совокупности кругов $\bigcup\limits_p^\infty K_\nu$ масса μ не бол ше, чем

$$\sum_p^\infty h(A_\nu) = \varepsilon_p'.$$

Далее имеем

$$\mu(G_p) \leqslant \int\limits_{Op} d\mu(z) \sum_p^\infty \left(\frac{A_\nu}{|z-a_\nu|}\right)^{1+\alpha} \leqslant \sum_p^\infty A_\nu^{1+\alpha} \int\limits_{A_\nu}^{3} \frac{d\mu(r, a_\nu)}{r^{1+\alpha}} <$$

$$\leqslant \frac{h(3)}{3} \sum_p^\infty A_\nu^{1+\alpha} + \sum_p^\infty A_\nu^{1+\alpha} \int\limits_{A_\nu}^{3} \frac{h(r)}{r^{2+\alpha}} dr = \varepsilon_p^{*},$$

следовательно

$$\sup_{\mu < h(r)} \mu(O_p) \leqslant \varepsilon_p' + \varepsilon_p^{*} = \varepsilon_p.$$

Так как легко видеть, что $\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$, то μ-мера множест O_p равна нулю для любой μ, удовлетворяющей условию $\mu(r, a) \leqslant h($ Так как кроме точек a_ν $(\nu = 1, 2, \cdots, p-1)$ O_p содержит множеств E, то получается, что такая μ-мера множества E также равна нул Отсюда вытекает, что $M_h(E) = 0$.

Если принять $h(r) = r^{1+\alpha}$ $(-1 < \alpha < 0)$ и $A_\nu = 1 - |a_\nu|$, то из теор мы 1 получим

Следствие 1. Если

$$\sum_{\nu=1}^\infty (1-|a_\nu|)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1-|a_\nu|} < +\infty, \qquad ($$

то $M_{1+\alpha}(E) = 0$, где

$$E = \left\{ e^{i\theta} : \sum_{\nu=1}^\infty \left(\frac{1-|a_\nu|}{|e^{i\theta} - a_\nu|}\right)^{1+\alpha} = +\infty,\ \theta \in [0, 2\pi] \right\}.$$

Принимая в теореме 1 $\alpha = 0$ и $h(r) = r$, получим

Следствие 2. Если для последовательности положительн чисел $\{A_\nu\}_1^\infty$ $(0 < A_\nu < 1)$

$$\sum_{\nu=1}^\infty A_\nu \ln \frac{1}{A_\nu} < +\infty, \qquad ($$

то ряд

$$\sum_{\nu=1}^\infty \frac{A_\nu}{|z - a_\nu|} \qquad ($$

сходится почти всюду.

Следующая теорема при более слабых условиях, чем (7), налага мых на последовательность A_ν утверждает, что $C_{1+\alpha}(E) = 0$.

Теорема 2. *Если*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|a_\nu|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{10}$$

то

$$C_{1+\alpha}(E)=0.$$

Доказательство. Вопреки утверждению предположим, что $C_{1+\alpha}(E)>0$, тогда найдется такая мера μ, $\mu(E)=1$, что

$$\int_E \frac{d\mu(\theta)}{|e^{i\theta}-z|^{1+\alpha}}<M<+\infty,$$

и, следовательно

$$\int_E\left(\frac{1-|a_\nu|}{|e^{i\theta}-a_\nu|}\right)^{1+\alpha}d\mu(\theta)\leqslant M(1-|a_\nu|)^{1+\alpha}.$$

Отсюда вытекает

$$\int_E\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-|a_\nu|}{|e^{i\theta}-a_\nu|}\right)^{1+\alpha}d\mu(\theta)<+\infty,$$

что противоречит условию, что на множестве E ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-|a_\nu|}{|e^{i\theta}-a_\nu|}\right)^{1+\alpha} \tag{11}$$

расходится.

Точно таким же методом доказывается следующая

Теорема 3. *Если*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|a_\nu|)^{1+\alpha}<+\infty,$$

то $C_1(E_\alpha)=0$, *где*

$$E_\alpha=\left\{e^{i\theta}\colon \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-|a_\nu|)^{1+\alpha}}{|e^{i\theta}-a_\nu|}=+\infty,\ \theta\in[0,2\pi]\right\}.$$

Следствие. Ввиду свойства в) для емкости и хаусдорфовой меры множества, отмеченной выше, можем утверждать также, что

$$M_h(E_\alpha)=0,$$

где h — любая функция меры, удовлетворяющая условию

$$\int_0 \frac{h(r)}{r^2}\,dr<+\infty.$$

3°. Радиальные предельные значения функции $B_\alpha(z, A)$. Для данного сходящегося в круге $|z|<1$ произведения $B_\alpha(z, A)$ обозначим

$$U_\alpha(re^{i\varphi})=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\varphi}, A)|. \tag{12}$$

Следующая теорема для $\alpha\in[0,+\infty)$ была доказана М. М. Джрбашяном [1б].

Теорема A. *Почти для всех* $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0} U_\alpha(re^{i\varphi})=0 \quad (0\leqslant\alpha<\infty).$$

Там же было высказано предположение, что теорема, по-видимому, верна и в случае $\alpha\in(-1, 0)$. В этом пункте мы доказываем, что это предположение верно, если последовательность A удовлетворяет условию (7). Для этого приведем одну простую лемму, на основании которой и было высказано вышеупомянутое предположение М. М. Джрбашяна относительно справедливости теоремы A для значений $\alpha\in(-1, 0)$.

Так как, согласно (2)

$$B_\alpha(z, A)=\prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z, a_k),$$

где

$$A_\alpha(z, a_k)=\left(1-\frac{z}{a_k}\right)e^{-W_\alpha(z, a_k)}, \tag{13}$$

то

$$U_\alpha(re^{i\varphi})=\sum_{k=1}^{\infty} u_\alpha(re^{i\varphi}, a_k), \tag{14}$$

где

$$u_\alpha(re^{i\varphi}, a_k)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|A_\alpha(re^{i\varphi}, a_k)|.$$

Лемма 1. *Для каждого* $\varphi\in[0, 2\pi]$ *и* $|\zeta|<1$

$$\lim_{r\to 1-0} u_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta)=0.$$

Доказательство. Согласно (13) имеем

$$u_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta)=r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|-\operatorname{Re} r^{-\alpha}D^{-\alpha}W_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta). \tag{15}$$

С другой стороны ([16], стр. 582)

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|=\operatorname{Re}\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^1\frac{(1-x)^\alpha}{x-\dfrac{\zeta}{re^{i\varphi}}}\,dx, \tag{16}$$

и ([16], стр. 576)

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}S_\alpha(re^{i\varphi})=S_0(re^{i\varphi}),$$

где

$$S_0(z)=\frac{1+z}{1-z},$$

так что $S_0(e^{-i\varphi}z)$ есть известное ядро Шварца, а $\operatorname{Re} S_0(e^{-i\varphi}z)$—ядро Пуассона. Согласно (3) получим, что при $z=re^{i\varphi}$

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}W_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S_0(e^{-i\theta}z)\,V_\alpha(e^{i\theta}, \zeta)\,d\theta.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$F_\alpha(w) = \mathrm{Re}\int\limits_0^1 \frac{(1-x)^\alpha}{x-w}\,dx \quad (-1<\alpha<0),$$

условившись понимать интеграл в смысле главного значения при $w\in(0, 1)$.

Справедливо следующее утверждение ([16], стр. 584): функция $F_\alpha(w)$ непрерывна всюду на плоскости w за исключением точек $w=0$ и $w=1$.

Следовательно, можно утверждать, что

$$\lim_{r\to 1-0} \mathrm{Re}\,\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}W_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta)\} = V_\alpha(e^{i\varphi}, \zeta),$$

а из (4) и (16) вытекает также

$$\lim_{r\to 1-0}\left\{r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}\right|\right\} = V_\alpha(e^{i\varphi}, \zeta).$$

Имея в виду последние два равенства и соотношение (15), получим утверждение леммы.

Теорема 4. *Если для данного* $\varphi\in[0, 2\pi]$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(1-|a_\nu|)^{1+\alpha}}{|e^{i\varphi}-a_\nu|} < +\infty, \tag{17}$$

то

$$\lim_{r\to 1-0} U_\alpha(re^{i\varphi}) = 0.$$

Доказательство. Согласно (14) и лемме 1 для доказательства теоремы достаточно показать, что ряд (14) для указанного значения сходится равномерно относительно r на интервале $[0, 1]$ при условии (17).

Известно, что ([16], стр. 628)

$$u_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta) = -\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{|\zeta|}^1 \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)\cos(\varphi-\arg\zeta)+r^2}{\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|^2\cdot\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}x\right|^2}\,\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx. \tag{18}$$

Нижеследующие оценки до определенного момента аналогичны оценкам М. М. Джрбашяна [5].

Введем следующие обозначения:

$$J_\alpha^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta) = 2\int\limits_{|\zeta|}^1 \frac{r(|\zeta|x)^{-1}(|\zeta|^2+x^2)\sin^2\frac{\varphi-\arg\zeta}{2}}{\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|^2\cdot\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}x\right|^2}\cdot\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx, \tag{19}$$

$$J_\alpha^{(2)}(re^{i\varphi}, \zeta) = \int\limits_{|\zeta|}^1 \frac{1-r\left(\frac{|\zeta|}{x}+\frac{x}{|\zeta|}\right)+r^2}{\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|^2\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}x\right|^2}\cdot\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx, \tag{20}$$

с помощью которых запишем формулу (18) в виде

$$u_\alpha(re^{i\varphi}, \zeta) = -\frac{1-r^2}{\Gamma(1+\alpha)}\{J_\alpha^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta) + J_\alpha^{(2)}(re^{i\varphi}, \zeta)\}. \tag{20}$$

Перейдем к оценкам $J_\alpha^{(1)}$ и $J_\alpha^{(2)}$.

а) Из (19) получим при $\varphi \neq \arg\zeta$

$$|J_\alpha^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta)| \leqslant \frac{r}{|\zeta|^2}\frac{(\varphi-\arg\zeta)^2}{\delta^2(\varphi, \zeta)}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|^2}dx,$$

где

$$\delta(\varphi, \zeta) = \min_{|\zeta|<x<1}\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{\zeta}x\right| = \min_{|\zeta|<x<1}\frac{r}{|\zeta|}\left|x-\frac{\zeta}{re^{i\varphi}}\right| \geqslant \min_{0<x<1}\frac{r}{|\zeta|}\left|x-\frac{\zeta}{re^{i\varphi}}\right|,$$

откуда

$$\delta(\varphi, \zeta) > \begin{cases} |\sin(\varphi-\arg\zeta)|, & |\varphi-\arg\zeta| < \frac{\pi}{2} \\ 1, \text{ при } & \frac{\pi}{2} \leqslant |\varphi-\arg\zeta| \leqslant \pi. \end{cases}$$

Следовательно, вообще для любого r $(0 \leqslant r \leqslant 1)$, ζ $(0 < |\zeta| < 1)$ $\varphi \in [0, 2\pi]$ имеет место оценка

$$|J_\alpha^{(1)}(re^{i\varphi}, \zeta)| \leqslant \frac{\pi^2}{|\zeta|^2}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|^2}dx. \tag{21}$$

При $|\zeta| \leqslant x \leqslant 1$ имеем

$$\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right| \geqslant 1-\frac{r|\zeta|}{x} \geqslant 1-r \tag{22}$$

и

$$|x-re^{-i\varphi}\zeta| > |1-re^{-i\varphi}\zeta| - (1-x) > |1-re^{-i\varphi}\zeta| - (1-|\zeta|) =$$

$$= |1-re^{-i\varphi}\zeta|\left(1-\frac{1-|\zeta|}{|1-re^{-i\varphi}\zeta|}\right). \tag{23}$$

Заметим теперь, что

$$\left|z-\frac{1}{\bar\zeta}\right| \geqslant \left|e^{i\varphi}-\frac{1}{\bar\zeta}\right| - |z-e^{i\varphi}|, \quad \left|z-\frac{1}{\bar\zeta}\right| \geqslant |z-e^{i\varphi}|.$$

Следовательно

$$\left|z-\frac{1}{\bar\zeta}\right| \geqslant \frac{1}{2}\left|e^{i\varphi}-\frac{1}{\bar\zeta}\right| = \frac{1}{2}|e^{i\varphi}-\zeta|\cdot|\zeta|^{-1},$$

или, что

$$|1-re^{-i\varphi}\zeta| \geqslant \frac{1}{2}|1-\zeta e^{-i\varphi}|\cdot|\zeta|^{-1}, \tag{24}$$

Согласно условию (17) теоремы следующий ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1-|a_\nu|}{|e^{i\varphi}-a_\nu|}<+\infty$$

сходится и поэтому его общий член стремится к нулю, с другой стороны, согласно (24)

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1-|a_\nu|}{|1-ra_\nu e^{-i\varphi}|}=0 \tag{25}$$

равномерно относительно $r\in[0, 1]$.

Следовательно из (23) и (24) получим

$$|x-re^{-i\varphi}\zeta|\geqslant\frac{c}{|\zeta|}|1-e^{-i\varphi}\zeta|. \tag{26}$$

Согласно (22) и (25) из (21) имеем

$$(1-r^2)\,|J_\alpha^{(1)}(re^{i\varphi},\zeta)|\leqslant\frac{c}{|\zeta|}\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|e^{i\varphi}-\zeta|}. \tag{27}$$

в) Заметим, что

$$1-\frac{r}{|\zeta|x}(x^2+|\zeta|^2)+r^2=\left(r-\frac{x}{|\zeta|}\right)\left(r-\frac{|\zeta|}{x}\right)$$

и

$$\left|1-\frac{re^{i\varphi}}{x}\zeta\right|\geqslant\left|1-\frac{r|\zeta|}{x}\right|,\quad\left|1-\frac{re^{-i\varphi}}{x}\zeta\right|\geqslant 1-\frac{r|\zeta|}{x},$$

тогда из (20), согласно (24), получим

$$|J_\alpha^{(2)}(re^{i\varphi},\zeta)|\leqslant\frac{c}{|1-\zeta e^{-i\varphi}|}\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{|\zeta-re^{i\varphi}x|}\,dx. \tag{28}$$

Далее имеем при $|\zeta|\leqslant x\leqslant 1$

$$|\zeta-xre^{i\varphi}|>|\zeta-re^{i\varphi}|-r(1-x)\geqslant|\zeta-re^{i\varphi}|-r(1-|\zeta|)$$

и

$$|\zeta-re^{i\varphi}|=\frac{1}{|\zeta|}\,\left||\zeta|^2-r\bar\zeta e^{i\varphi}\right|\geqslant\frac{1}{|\zeta|}|1-r\bar\zeta e^{i\varphi}|-\frac{1}{|\zeta|}(1-|\zeta|^2),$$

так что

$$|\zeta-xre^{i\varphi}|>\frac{1}{|\zeta|}|1-r\bar\zeta e^{i\varphi}|-(1-|\zeta|)\left(r+\frac{1+|\zeta|}{|\zeta|}\right)$$

и

$$\left|\frac{\zeta-xre^{i\varphi}}{1-r\zeta e^{-i\varphi}}\right|>\frac{1}{|\zeta|}-\frac{1-|\zeta|}{|1-r\zeta e^{-i\varphi}|}\left(r+\frac{1+|\zeta|}{|\zeta|}\right).$$

Таким образом, согласно (25)

$$\left|\frac{\zeta-xre^{i\varphi}}{1-r\zeta e^{-i\varphi}}\right|>\frac{c}{|\zeta|}>0,\quad |\zeta|\leqslant x\leqslant 1,$$

и, так как $|1-r\zeta e^{-i\varphi}|\geqslant 1-r\,|\zeta|\geqslant 1-r$, то

$$\left|\frac{\zeta-xre^{i\varphi}}{1-r}\right|>\frac{c}{|\zeta|}>0.$$

Отсюда и из (28) получим

$$(1-r^2)\,|J_\alpha^{(2)}(re^{i\varphi},\zeta)| \leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-e^{-i\varphi}\zeta|}. \tag{29}$$

В итоге из (18′), согласно (27) и (29), имеем

$$|u_\alpha(re^{i\varphi},\zeta)| \leqslant \frac{c}{|\zeta|}\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-e^{-i\varphi}\zeta|}. \tag{30}$$

Из неравенства (30), ввиду условия (17) теоремы, следует, что ряд (14) сходится равномерно относительно $r\in[0, 1]$. Ввиду леммы 1 отсюда вытекает утверждение теоремы.

Следующая теорема была доказана в работе [6].

Теорема B. *Если для данного* $\varphi\in[0, 2\pi]$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1-|a_\nu|}{|e^{i\varphi}-a_\nu|}\right)^{1+\alpha} < +\infty, \tag{31}$$

то

$$\lim_{r\to 1-0} B_\alpha(re^{i\varphi}, A) = B_\alpha(e^{i\varphi}, A)$$

существует и конечен.

Теперь, объединяя следствие 1 теоремы 1 с теоремами 4 и B, а также теоремы 2, B и 4, приходим к следующим теоремам.

Теорема 5. *При условии*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|a_\nu|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|a_\nu|} < +\infty$$

функция $B_\alpha(z, A)$ *всюду на* $[0, 2\pi]$ *имеет радиальные предельные значения, кроме, быть может, некоторого множества* E, *внешняя* $(1+\alpha)$*-хаусдорфова мера которого равна нулю. При этом почти всюду на* $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0}\{r^{-\alpha} D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\varphi}, A)|\} = 0.$$

Теорема 6. *При условии*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(1-|a_\nu|)^{1+\alpha} < +\infty$$

произведение $B_\alpha(z, A)$ *всюду на* $[0, 2\pi]$ *имеет радиальные предельные значения, кроме, быть может, некоторого множества* E, $(1+\alpha)$*-емкость которого — нуль. При этом всюду на* $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r\to 1-0}\{r^{-\alpha} D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\varphi}, A)|\} = 0,$$

кроме, быть может, некоторого множества $E_\alpha\subset[0, 2\pi]$, *такого, что* $C_1(E_\alpha)=0$.

Отметим, что, таким образом, первая часть утверждения этой теоремы является усилением теоремы работ [2а, 6], о которой упоминалось во введении статьи, где утверждалось, что предел

$$\lim_{r\to 1-0} B_\alpha(re^{i\varphi}, A)$$

существует всюду, за исключением, быть может, некоторого множества $E\subset[0, 2\pi]$, γ-емкость которого—нуль, где $\gamma\in(1+\alpha, 1)$ любое.

Отметим, что, согласно следствию теоремы 3, имеем также, что

$$M_h(E_\alpha)=0,$$

где h — любая функция меры, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_0 \frac{h(r)}{r^2}\,dr<+\infty.$$

Имея в виду отношения между $(1+\alpha)$-емкостью и $(1+\alpha)$-хаусдорфовыми мерами множеств, ясно, что теоремы 5 и 6 не покрывают друг друга и представляют самостоятельный интерес.

4°. **Непрерывность функции $B_\alpha(z, A)$ в граничной точке.** Следующая теорема дает необходимый и достаточный признак того, чтобы $B_\alpha(z, A)$ была непрерывна в точке $z=e^{i\theta}$.

Теорема 7. *Если $z=e^{i\theta}$ не является точкой сгущения для последовательности $A=\{a_k\}_1^\infty$, то произведение $B_\alpha(z, A)$ абсолютно и равномерно сходится и непрерывно в окрестности точки $z=e^{i\theta}$, $(|z|\leqslant 1)$.*

Доказательство. Запишем $B_\alpha(z, A)$ в следующем виде:

$$B_\alpha(z, A)=\prod_{\nu=1}^{\infty}[1+C_\alpha(z, a_\nu)],$$

где

$$C_\alpha(z, a_\nu)=A_\alpha(z, a_\nu)-1,$$

и, согласно (2)

$$A_\alpha(z, a_\nu)=\left(1-\frac{z}{a_\nu}\right)\exp\{-W_\alpha(z, a_\nu)\}.$$

В неравенстве

$$|C_\alpha(z, a_\nu)|\leqslant|1-A_0(z, a_\nu)|+|A_0(z, a_\nu)-A_\alpha(z, a_\nu)| \tag{32}$$

первое слагаемое оценивается как в работе [7]

$$|1-A_0(z, a_\nu)|\leqslant\frac{1-|a_\nu|}{|a_\nu|}+\frac{1-|a_\nu|^2}{|1-\bar a_\nu z|\,|a_\nu|}.$$

Так как $e^{i\theta}$ не принадлежит A', то для $|z|\leqslant 1$ можно найти постоянные ε и $\delta(\varepsilon)$ такие, что

$$\left|z-\frac{1}{\bar a_\nu}\right|>\varepsilon, \text{ при } |z-e^{i\theta}|\leqslant\delta(\varepsilon).$$

Следовательно, если $|z|\leqslant 1$, то

$$|1-A_0(z, a_\nu)|\leqslant\frac{1-|a_\nu|}{|a_\nu|}+\frac{1-|a_\nu|^2}{\varepsilon\,|a_\nu|^2}, \qquad \text{при } |z-e^{i\theta}|\leqslant\delta(\varepsilon).$$

Таким образом, согласно (1), ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [1-A_0(z, a_\nu)] \quad (|z| \leqslant 1) \tag{33}$$

абсолютно и равномерно сходится при условии $|z-e^{i\theta}| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Но так как $1-A_0(z, a_\nu)$ — регулярная функция в $|z-e^{i\theta}| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $|z| \leqslant 1$, то ряд (33) абсолютно и равномерно сходится и непрерывен в $|z-e^{i\theta}| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $|z| \leqslant 1$.

Для оценки второго слагаемого из (32) заметим, что

$$|A_0(z, a_\nu) - A_\alpha(z, a_\nu)| \leqslant c \left(\frac{1-|a_\nu|}{|1-z\bar{a}_\nu|}\right)^{1+\alpha}$$

(см. [6], неравенства (26), (14) и (17)).

Следовательно

$$|A_0(z, a_\nu) - A_\alpha(z, a_\nu)| \leqslant c \frac{(1-|a_\nu|)^{1+\alpha}}{|a_\nu|^{1+\alpha}\varepsilon^{1+\alpha}}, \text{ при } |z-e^{i\theta}| \leqslant \delta(\varepsilon),\ |z| \leqslant 1,$$

откуда заключаем, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} [A_0(z, a_\nu) - A_\alpha(z, a_\nu)] \quad (|z| \leqslant 1)$$

абсолютно и равномерно сходится и непрерывен в $|z-e^{i\theta}| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $|z| \leqslant 1$.

Согласно (32) получим, что при $|z| \leqslant 1$ ряд $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} C_\alpha(z, a_\nu)$ или, что то же самое, $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty} [1+C_\alpha(z, a_\nu)] = B_\alpha(z, A)$ абсолютно и равномерно сходится и непрерывен в $|z-e^{i\theta}| \leqslant \delta(\varepsilon)$, $|z| \leqslant 1$, что и надо было доказать.

5°. **Непрерывность радиальной вариации функции** $B_\alpha(z, A)$. Для произведения $B_\alpha(z, A)$ определим радиальные вариации в точке $e^{i\varphi}$ единичной окружности C следующим образом:

$$V(B_\alpha, \varphi) = \int_0^1 |B'_\alpha(re^{i\varphi}, A)|\, dr.$$

Очевидно, что $V(B_\alpha, \varphi)$ есть длина кривой, на которую отображается радиус с концом в $e^{i\varphi}$ посредством функции $B_\alpha(z, A)$.

Как известно [6], при условии (31) $V(B_\alpha, \varphi)$ конечно.

Докажем теперь следующую лемму.

Лемма 2. *При условии* (31)

$$|B_\alpha(e^{i\varphi}, A| \geqslant q > 0.$$

Доказательство. Согласно (2) имеем

$$\frac{B_\alpha(z, A)}{B_0(z, A)} = \prod_{\nu=1}^{\infty} \exp\{W_0(z, a_\nu) - W_\alpha(z, a_\nu)\}$$

и, следовательно

$$\ln\left|\frac{B_\alpha(z, A)}{B_0(z, A)}\right| = \sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left[W_0(z, a_\nu) - W_\alpha(z, a_\nu)\right]. \tag{34}$$

В работах [2а, 6] доказано, что

$$\operatorname{Re}\left[W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)\right] \geqslant 0,$$

а в работе [6] была установлена оценка

$$|W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)| \leqslant c\left(\frac{1-|a_\nu|}{|e^{i\varphi}-a_\nu|}\right)^{1+\alpha}.$$

Используя условие (31), можем записать, что

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left[W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)\right] \leqslant \sum_{\nu=1}^{\infty} |W_\alpha(z, a_\nu) - W_0(z, a_\nu)| \leqslant c < +\infty.$$

Поэтому из равенства (34) следует

$$\ln\left|\frac{B_\alpha(z, A)}{B_0(z, A)}\right| \geqslant -c > -\infty. \tag{35}$$

Согласно условию (31) и теореме В можно перейти к пределу в неравенстве (35) при $r \to 1-0$. Тогда получим

$$\ln|B_\alpha(e^{i\varphi}, A)| \geqslant -c > -\infty,$$

так как $|B_0(e^{i\varphi}, A)| = 1$. Лемма доказана.

Теперь нетрудно доказать следующую теорему, специальный случай которой при $\alpha = 0$ был установлен Р. Колуэлом [8].

Теорема 8. *Пусть для функции* $B_\alpha(z, A)$ *в каждой точке окружности* C *удовлетворяется условие* (31). *Тогда* $V(B_\alpha, \varphi)$, *как функция от* φ, *терпит разрыв при* $\varphi = \varphi_0$ *тогда и только тогда, когда* $e^{i\varphi_0} \in A'$, *где* A' — *множество предельных точек последовательности* $A = \{a_k\}_1^\infty$.

Доказательство. С помощью результата теоремы 7 доказательство проводится как и в случае $\alpha = 0$. Только необходимо иметь в виду, что в случае $\alpha = 0$ при доказательстве существенно то, что, ввиду условия теоремы, $|B_0(e^{i\varphi}, A)| = 1$ для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$. При $\alpha \in (-1, 0)$ вместо этого необходимо использовать результат предыдущей леммы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15.IV.1968

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

B_α ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում ստացված են նոր արդյունքներ $B_\alpha(z, A)$ *ֆունկցիայի եզրային արժեքների մասին։*

Մասնավորապես ապացուցված է, որ եթե

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1-|a_\nu|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha \leqslant 0),$$

ապա $B_\alpha(z, A)$ ֆունկցիան ամենուրեք $[0, 2\pi]$ հատվածի վրա ունի շառավղային եզրային արժեքներ, բացի գուցե մի E բազմության, որի $\gamma = 1 + \alpha$ ունակությունը զերո է։ Ընդորում, ամենուրեք $[0, 2\pi]$ հատվածի վրա

$$\lim_{r \to 1-0} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}, A)| = 0,$$

բացի գուցե մի $E \subset [0, 2\pi]$ բազմությունից, որի $\gamma = 1$ ունակությունը զերո է։

V. S. SAKCHARIAN

ON RADIAL LIMITING VALUES OF THE B_α FUNCTION

Summary

Some new results on the limiting values of the $B_\alpha(z, A)$ function are stated.

In particular, if

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (1-|a_\nu|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha \leqslant 0),$$

then the function $B_\alpha(z, A)$ possesses every where on $[0, 2\pi]$ radial limits with a possible exception of a set E, whose $\gamma = 1+\alpha$ capacity is equal zero. At the same time every where $[0, 2\pi]$

$$\lim_{r \to 1-0} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi}, A)| = 0,$$

with a possible exception of a set $E \subset [0, 2\pi]$, whose $\gamma = 1$ capacity is equal zero.

ЛИТЕРАТУРА

1а. *М. М. Джрбашян.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
б. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., „Наука“, 1966.

2а. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.
б. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, „Математика“, 2, № 5, 1967, 275—294.

3. *L. Carleson.* On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Uppsala, 1950.

4. *O. Frostman.* Sur les produits de Blaschke. Kungl. Fysiogr. Sallsk, i Lund Forh., 12, 1942, 169—182.

5. *М. М. Джрбашян.* Об одном свойстве функции Бляшке, ДАН СССР, 175, № 5, 1967, 981—984.

6. *В. С. Захарян.* Радиальные пределы и радиальные изменения произведения B_α, Изв. АН АрмССР, „Математика“, 3, № 1, 1968, 38—51.

7. *C. Tanaka.* Boundary convergence of Biaschke products in the unit circle, Proc. Japan. Acad., 39, 1963, 410—412.

8. *P. Colwell.* On the boundary behavior of Blaschke products in the unit disk, Proc. of the Amer. Math. Soc., 17, No. 3, 1966, 582—587.