О. П. ВИНОГРАДОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА ДЛИНЫ ОЧЕРЕДИ
 В ОДНОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ МАССОВОГО
 ОБСЛУЖИВАНИЯ

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с неограниченной очередью, в которую поступает пуассоновский поток требований с параметром λ . Предполагается, что время обслуживания распределено произвольно с функцией распределения $G(t)$. Пусть $\nu_k(t)$ число требований, находящихся в очереди в момент t при условии, что в момент -0 прибор свободен, k требований находится в очереди и в момент 0 требование начало обслуживаться. Обозначим

$$\pi_{k,n}(t) = P\{\max_{0 < y < t} \nu_k(y) \leq n\}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Используя метод взоженных цепей Маркова, нетрудно показать, что вероятности $\pi_{k,n}(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} \pi_{0,n}(t) &= e^{-\lambda t} + \int_0^t \pi_{1,n}(t-y) \lambda e^{-\lambda y} dy, \\ \pi_{k,n}(t) &= \sum_{l=0}^{n-k+1} \int_0^t \pi_{k+l-1,n}(t-y) \frac{(\lambda y)^l}{l!} e^{-\lambda y} dG(y) + \\ &+ [1 - G(t)] \sum_{l=0}^{n-k+1} \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \right. \quad (1)$$

Применим преобразование Лапласа. Введем следующие обозначения:

$$\int_0^{\infty} \pi_{k,n}(t) e^{-st} dt = \pi_k^n(s),$$

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t} dG(t) = c(s),$$

$$\sum_{l=0}^n \int_0^{\infty} e^{-st} [1 - G(t)] \frac{(\lambda t)^l}{l!} e^{-\lambda t} dt = b_n(s).$$

Тогда система (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \pi_0^n(s) = \pi_1^n(s) \frac{\lambda}{s+\lambda} + \frac{1}{s+\lambda}, \\ \pi_k^n(s) = \sum_{\nu=0}^{n-k+1} \pi_{k+\nu-1}^n(s) c_\nu(s) + b_{n-k+1}(s), \quad k=1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (2)$$

Заметим, что легко получить следующее соотношение:

$$B(x, s) = \frac{1 - C(x, s)}{(1-x)(s+\lambda-\lambda x)}, \quad (3)$$

где $B(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(s) x^k$ и $C(x, s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(s) x^k$.

Учитывая первое уравнение системы (2), запишем ее в виде:

$$\begin{cases} \pi_1^n(s) \left[\frac{\lambda}{s+\lambda} c_0(s) + c_1(s) - 1 \right] + \pi_2^n(s) c_2(s) + \dots + \\ + \pi_n^n(s) c_0(s) = -b_n(s) - \frac{c_0(s)}{s+\lambda}, \\ \pi_{k-1}^n(s) c_n(s) + \pi_k^n(s) [c_1(s) - 1] + \\ + \sum_{l=2}^{n-k+1} \pi_{k+l-1}^n(s) c_l(s) = -b_{n-k+1}(s), \quad k=2, 3, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

Найдем из этой системы $\pi_1^n(s)$. Для этого сначала определим $\pi_n^n(s)$, а затем, зная $\pi_n^n(s)$, легко получить $\pi_1^n(s)$. Запишем определитель этой системы

$$p_n(s) = \begin{vmatrix} \frac{\lambda}{s+\lambda} c_0(s) + c_1(s) - 1 & c_2(s) & \dots & c_{n-1}(s) c_n(s) \\ c_0(s) & c_1(s) - 1 & \dots & c_{n-2}(s) c_{n-1}(s) \\ 0 & c_0(s) & \dots & c_{n-3}(s) c_{n-2}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_0(s) c_1(s) - 1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Легко видеть, что

$$p_n(s) = k_n(s) + \frac{\lambda}{s+\lambda} c_0(s) k_{n-1}(s), \quad k_0(s) \equiv 1, \quad (6)$$

где

$$k_n(s) = \begin{vmatrix} c_1(s) - 1 & c_2(s) & c_3(s) & \dots & c_{n-1}(s) c_n(s) \\ c_0(s) & c_1(s) - 1 & c_2(s) & \dots & c_{n-2}(s) c_{n-1}(s) \\ 0 & c_0(s) & c_1(s) - 1 & \dots & c_{n-3}(s) c_{n-2}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_0(s) c_1(s) - 1 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно показать, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_n(s) x^n = \frac{c_0(s) x}{C[-c_0(s) x, s] + c_0(s) x}$$

Используя (6), отсюда получаем, что

$$P(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(s) x^n = \left[1 + \frac{\lambda}{s + \lambda} c_0(s) x \right] \frac{c_0(s)}{C[-c_0(s) x, s] + c_0(s) x} \quad (7)$$

Рассмотрим определитель $q_n(s)$, который получается из определителя $p_n(s)$ заменой последнего столбца столбцом свободных членов системы (4). Тогда

$$\pi_n^n(s) = \frac{q_n(s)}{p_n(s)}$$

Очевидно, что

$$q_n(s) = m_n(s) + \frac{\lambda}{s + \lambda} c_0(s) m_{n-1}(s) + (-1)^n \frac{c_0^n(s)}{s + \lambda}, \quad (8)$$

где

$$m_n(s) = \begin{vmatrix} c_1(s) - 1 & c_2(s) & \dots & c_{n-1}(s) & -b_n(s) \\ c_0(s) & c_1(s) - 1 & \dots & c_{n-2}(s) & -b_{n-1}(s) \\ 0 & c_0(s) & \dots & c_{n-3}(s) & -b_{n-2}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_0(s) & -b_1(s) \end{vmatrix}$$

Разлагая по элементам первого столбца, нетрудно видеть, что

$$m_n(s) = [c_1(s) - 1] m_{n-1}(s) - c_0(s) c_2(s) m_{n-2}(s) + \dots + (-1)^{k-1} c_0^{k-1}(s) c_k(s) m_{n-1}(s) + \dots + (-1)^{n-2} c_0^{n-2}(s) c_{n-1}(s) m_1(s) + (-1)^n c_0^{n-1}(s) b_n(s).$$

Отсюда

$$M(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n(s) x^n = \frac{B[-c_0(s) x, s] - b_0(s)}{C[-c_0(s) x, s] + c_0(s) x}$$

Используя соотношение (6), окончательно получаем

$$Q(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(s) x^n = \left[1 + \frac{\lambda c_0(s) x}{s + \lambda} \right] \frac{B[-c_0(s) x, s] - b_0(s)}{C[-c_0(s) x, s] + c_0(s) x} - \frac{c_0(s) x}{[s + \lambda][1 + c_0(s) x]} \quad (9)$$

Теперь выразим $\pi_1^n(s)$ через $\pi_n^n(s)$. Будем считать известным $\pi_n^n(s)$. Тогда система [4] запишется в следующем виде:

$$c_0(s) \pi_1^n(s) + [c_1(s) - 1] \pi_2^n(s) + \dots + c_{n-2}(s) \pi_{n-1}^n(s) = -b_{n-2}(s) - c_{n-1}(s) \pi_n^n(s)$$

$$c_0(s) \pi_2^n(s) + \dots + c_{n-3}(s) \pi_{n-1}^n(s) = -b_{n-2}(s) - c_{n-1}(s) \pi_n^n(s)$$

$$\dots$$

$$c_0(s) \pi_{n-1}^n(s) = -b_1(s) - [c_1(s) - 1] \pi_n^n(s).$$

Легко видно, что согласно правилу Крамера

$$\pi_1^n(s) = \frac{(-1)^n m_{n-1}(s) - \pi_n^n(s) (-1)^n k_{n-1}(s)}{c_0^{n-1}(s)}.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \pi_1^n(s) &= \frac{(-1)^n m_{n-1}(s)}{c_0^{n-1}(s)} - (-1)^n \frac{k_{n-1}(s) q_n(s)}{c_0^{n-1}(s) p_n(s)} = \\ &= \frac{(-1)^n}{c_0^{n-1}(s)} \left[m_{n-1}(s) - \frac{m_n(s) + c_0(s) m_{n-1}(s) + \frac{(-1)^n c_0^n(s)}{\lambda}}{k_n(s) + c_0(s) k_{n-1}(s)} k_{n-1}(s) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть τ_n время, когда длина очереди впервые будет равна n . Заметим далее, что

$$\begin{aligned} P\{\tau_n \leq t\} &= P\{\max_{0 < y < t} b_1(y) \geq n\} = 1 - P\{\max_{0 < y < t} b_t(y) \leq n-1\} = \\ &= 1 - \pi_{1, n-1}(t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M e^{-s\tau_n} &= \int_0^{\infty} e^{-st} dP\{\tau_n \leq t\} = \int_0^{\infty} e^{-st} d\pi_{1, n-1}(t) = \\ &= 1 - s \int_0^{\infty} e^{-st} \pi_{1, n-1}(t) dt = 1 - s \pi_1^{n-1}(s). \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда, в частности, следует, что $M\tau_n = \pi_1^{n-1}(0)$.

Заметим, что

$$C(z, 0) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)t} dG(t) = \varphi[\lambda(1-z)], \quad \text{где } \varphi(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} dG(t).$$

Применив формулу Коши для коэффициентов степенного ряда и используя (7), (9) и (10) получаем

$$M_{\tau_n} = \frac{n-1}{1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{[z-1]\{\varphi[\lambda(1-z)]-z\}z^{n-2}} +$$

$$+ \frac{1}{\lambda} \frac{\left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)]-z\}z^{n-1}} \right]^2}{\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{(1-z) dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)]-z\}z^n}}, \quad (12)$$

где радиус окружности, по которой производится интегрирование, выбран так, чтобы особые точки функции $\frac{1}{\varphi[\lambda(1-z)]-z}$ находились вне этой окружности.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема. Пусть

- 1) существует $\frac{1}{\mu} = \int_0^{\infty} t dG(t)$;
- 2) $\varphi[\lambda(1-z)]$ существует при $\text{Re } z < a$, где $1 \leq a < +\infty$;
- 3) $\varphi[\lambda(1-z)] \rightarrow +\infty$ при $z \rightarrow a-0$ по действительной оси;
- 4) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$.

Тогда

$$M_{\tau_n} \sim \frac{\lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda(1-z_0)t} dG(t) - 1}{\lambda [1-\rho]^2 [z_0-1]} z_0^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Используя теорему Руше, можно показать что, если выполнены условия теоремы, то функция $\frac{1}{\varphi[\lambda(1-z)]-z}$ в круге $|z| < a$ имеет два простых полюса $z = 1$ и $z = z_0$, где $1 < z_0 < a$.

Нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)]-z\}[z-1]z^{n-2}} = -\text{res}_{z=1} \frac{1}{\{\varphi[\lambda(1-z)]-z\}[z-1]z^{n-2}} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)]-z\}[z-1]z^{n-2}},$$

где $1 < r_1 < z_0$.

Оценивая последний интеграл по максимуму модуля, получим отсюда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r_1} \frac{dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)]-z\}[z-1]z^{n-2}} \sim \frac{n}{\rho-1}. \quad (13)$$

Аналогично

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r<1} \frac{dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)] - z\} z^{n-1}} \sim \frac{1}{1-\rho} \quad (14)$$

Остается оценить $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r<1} \frac{(1-z) dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)] - z\} z^n}$.

Заметим, что условия 2), 3) теоремы нам пришлось ввести потому, что подынтегральная функция не имеет особенностей в точке $z=1$.

Получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r<1} \frac{(1-z) dz}{\{\varphi[\lambda(1-z)] - z\} z^n} \sim \frac{z_0 - 1}{z_0^n \left[\lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda(1-z_0)t} dG(t) - 1 \right]} \quad (15)$$

Поэтому, используя (13), (14) и (15), из (12) получаем

$$M\tau_n \sim \frac{\lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda(1-z_0)t} dG(t) - 1}{\lambda [1-\rho]^2 [z_0 - 1]} z_0^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

В заключение считаю своим долгом принести глубокую благодарность А. Д. Соловьеву за обсуждение результатов.

Московский государственный университет

им. Ломоносова

П о с т у п и л о 14.IX.1967

Օ. Պ. ՎԻՆՈԳՐԱԴՈՎ

ՀԵՐԹԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՔՍԻՄՈՒՄԻ ԲԱՇԽՈՒՄԸ ՄԻ ԳԾԱՆԻ
ՄԱՍՍԱՅԱԿԱՆ ՍՊԱՍԱՐԿՄԱՆ ՍԻՍՏԵՄՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Դիտարկվում է $M|G|1$ սիստեմը: Աշխատանքում գտնված է $Me^{-s\tau_n}$ նախադիտարկումը, որտեղ τ_n -ը առաջին մոմենտն է, երբ հերթի երկարությունը դառնում է n :

Ապացուցված է մի թեորեմ, որը պարզում է $M\tau_n$ մեծության ասիմտոտիկ վարքը երբ $n \rightarrow \infty$.

O. P. VINOGRADOV

ON THE DISTRIBUTION OF MAXIMAL QUEUE SIZE
IN THE $M|G|1$ SYSTEM

S u m m a r y

For the system $M|G|1$ the Laplace transform $Me^{-s\tau_n}$, where τ_n is the first moment, when the queue size becomes equal n . A theorem, establishing the asymptotic behaviour of $M\tau_n$ when $n \rightarrow \infty$ is proved.