ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 3, 1968 Математика

Л. А. ПЕТРОСЯН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИГР КАЧЕСТВА

Здесь мы будем рассматривать игры преследования „с линией жизни“ в предположении, что кинематические уравнения, описывающие игру, имеют достаточно произвольный характер. Простейший вариант игры формулируется следующим образом. В n-мерном эвклидовом пространстве R^n задано некоторое замкнутое односвязное множество S. Игрок P (преследователь) перемещается в R^n в соответствии со своими кинематическими уравнениями

$$\dot{x}_i = f_i(x, \varphi, \psi), \quad i = 1, \cdots, n$$

из начального состояния $x_0 \in S$. Игрок E (преследуемый) имеет возможность перемещаться в R^n из начальной позиции $y_0 \in S$ в соответствии с кинематическими уравнениями

$$\dot{y}_i = g_i(x, \varphi, \psi), \quad i = 1, \cdots, n.$$

В каждый момент времени игроки P и E выбирают значения своих управляющих переменных φ, ψ из некоторых заданных выпуклых, замкнутых множеств Φ, Ψ, соответственно. Управляющие переменные выбираются игроками в зависимости от получаемой информации. Мы будем предполагать, что игра является с полной информацией и игрок E является дискриминированным. Это означает, что игроку $P(E)$ в каждый момент времени известно свое местоположение $x(y)$ и местоположение противника $y(x)$. Кроме того, игроку P в каждый момент времени известно значение управляющей переменной ψ, выбираемое игроком E в этот момент времени. Под стратегией игрока P мы будем понимать, как это обычно принято в теории дифференциальных игр, произвольную функцию $\varphi(x, y, \psi)$ со значениями в множестве Φ, которая ставит в соответствие текущей информации игрока P некоторый выбор управляющей переменной. Аналогично, под стратегией игрока E мы будем понимать произвольную функцию $\psi(x, y)$ со значениями в множестве Ψ. Обозначим через $\overline{P}$ и $\overline{E}$ классы всевозможных функций $\{\varphi\}$ и $\{\psi\}$, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Для любых начальных условий x_0, $y_0 \in S$ и любой пары функций $\varphi \in \overline{P}$, $\psi \in \overline{E}$ система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x, \varphi(x, y, \psi)), \\ \dot{y}_i &= g_i(y, \psi(x, y)), \quad i = 1, \cdots, n \end{aligned} \tag{1}$$

имеет единственное решение $x(t)$, $y(t)$.

2. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — решение системы дифференциальных уравнений (1) в ситуации (φ, ψ) из начальных позиций $x_0, y_0 \in S$, и пусть

$$t_{S_P} = \min\{t : x(t) \overline{\in} S\}$$

и

$$t_{S_E} = \min\{t : y(t) \overline{\in} S\},$$

тогда при всех

$$0 \leqslant t \leqslant t_{S_P}, \qquad x(t) \in S, \tag{2}$$

и при всех

$$0 \leqslant t \leqslant t_{S_E}, \qquad y(t) \in S. \tag{3}$$

Пусть далее

$$t_P = \min\{t : x(t) = y(t)\}$$

(если таких t, при которых $x(t) = y(t)$ не существует, то t_P полагаем равным ∞).

Относительно правых частей кинематических уравнений, определяющих структуру игры, мы будем предполагать, что существует такая стратегия φ игрока P, при которой поимка игрока E во всем пространстве R^n всегда возможна.

Функция выигрыша. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — траектории игроков P и E, исходящие из начальных позиций $x_0, y_0 \in S$ в ситуации (φ, ψ). Тогда функция выигрыша (выигрыш игрока P) равна

$$K(x_0, y_0; \varphi, \psi) = \begin{cases} +1, & \text{если } t_P \leqslant t_{S_E},\ t_{S_E} \neq \infty, \\ 0, & \text{если } t_P = t_{S_E} = \infty, \\ -1, & \text{если } t_P > t_{S_E}. \end{cases}$$

Определив множества стратегий игроков и функцию выигрыша, мы задали некоторое семейство игр в нормальной форме, зависящих от начальных позиций $x_0, y_0 \in S$. Каждую игру этого семейства обозначим через $\Gamma(x_0, y_0)$.

Из вида функции выигрыша следует, что игра $\Gamma(x_0, y_0)$ является игрой качества, в которой игрок стремится осуществить поточечную поимку игрока E до пересечения этим последним границы множества S. Мы предполагаем, что игра антагонистическая, что выигрыш игрока E равен выигрышу P с обратным знаком. Игры качества с „линией жизни" рассматривались в [3], [4], однако считалось, что игроки обладают простыми движениями; это означает, что кинематические уравнения имели вид

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = \varphi_i, \quad i = 1, \cdots, n, \\ &\dot{y}_i = \psi_i, \\ &|\varphi| = \text{const}, \quad |\psi| = \text{const}. \end{aligned} \tag{5}$$

Задача решалась для произвольного выпуклого замкнутого множества в S.

Предположение о дискриминации игрока E является естественным для существования значения игры. Такое же предположение делается в фундаментальной работе Л. С. Понтрягина [5].

Введем некоторые предположения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть $\bar{\varphi}$ некоторая фиксированная стратегия игрока P, обладающая тем свойством, что в любой ситуации $(\bar{\varphi}, \psi)$ поимка игрока E в игре $\Gamma(x_0, y_0)$ может быть осуществлена во всем пространстве. Обозначим через $C_{\bar{\varphi}}(x_0, y_0)$ множество точек поимки в ситуациях $(\bar{\varphi}, \psi)$ для всевозможных стратегий $\psi \in \bar{E}$ (сравни с „множеством достижимости" в [6]). Очевидно, что, если множество $C_{\bar{\varphi}}$ имеет непустое пересечение с дополнением множества S, то игрок P, используя стратегию $\bar{\varphi}$, не может гарантировать поимку игрока в множестве S. Действительно, игрок E в этом случае всегда может выбрать такую стратегию ψ^*, при которой поимка в ситуации $(\bar{\varphi}, \psi^*)$ происходит в дополнении множества S. Таких стратегий может существовать много.

Теорема 1. *При выполнении условий:*

1. *Пересечение* $C_{\bar{\varphi}}(x_0, y_0)$ *с дополнением множества* S *не пусто;*

2. *Существует такая стратегия* ψ^*, *при которой в ситуации* $\bar{\varphi}, \psi^*$ *игрок* P *осуществляет быстродействие из начальной позиции* x_0 *в точку поимки и точка поимки не принадлежит* S; *ситуация* $\bar{\varphi}, \psi^*$ *образует ситуацию равновесия в игре* $\Gamma(x_0, y_0)$ *и значение игры равно* -1, *то есть при выполнении условий теоремы поимка игрока* E *в* S *невозможна ни при каких стратегиях преследователя.*

Доказательство. Пусть $x^*(t)$, $y^*(t)$ — траектории игроков P и E в ситуации $(\bar{\varphi}, \psi^*)$ в игре $\Gamma(x_0, y_0)$. Обозначим через $\breve{\psi}^*$ стратегию игрока E, при которой он независимо от действий игрока P выбирает в каждый момент времени направление движения вдоль траектории $y^*(t)$. Какова бы ни была стратегия φ поимка в ситуации (φ, ψ^*) не может произойти раньше момента времени

$$t_P(\bar{\varphi}, \psi^*) = t_P = t_P(\bar{\varphi}, \breve{\varphi}^*),$$

так как в ситуации $(\bar{\varphi}, \psi^*)$ или $(\bar{\varphi}, \breve{\psi}^*)$ игрок P осуществляет быстродействие в точку поимки. Это означает, что

$$t_P(\varphi, \breve{\psi}^*) \geqslant t_P(\bar{\varphi}, \breve{\psi}^*) > t_{S_E}$$

при всех стратегиях φ игрока P. Теорема доказана.

В случае, когда множество $C_{\bar{\varphi}}(x_0, y_0)$ содержится в S, поимка игрока E в S, очевидно, всегда возможна при применении игроком P

стратегии $\bar{\varphi}$. Таким образом, в этом случае стратегия $\bar{\varphi}$ оказывается для P оптимальной (она может быть не единственной), значение игры равно $+1$ и для игрока E оптимальной является любая стратегия.

Таким образом для решения игры достаточно установить существование стратегии ψ^* игрока E, удовлетворяющей условиям теоремы 1 или установить существование стратегии φ^*, при которой множество $C_{\varphi^*}(x_0, y_0)$ содержится в S. Далее мы приведем некоторые достаточные условия, гарантирующие существование такой стратегии.

Определение. Обозначим через $Y_{y_0, \psi}$ множество всевозможных траекторий $y(t)$, исходящих из точки y_0, которые возможны при выборе управления ψ в точке y_0 и удовлетворяющих условию: для любых $t_1 < t_2$ $(t_1 \geqslant 0)$ время перехода $t_2 - t_1$ из точки $y(t_1)$ в точку $y(t_2)$ является минимальным

Для каждой траектории $y(t) \in Y_{y_0, \psi}$ построим траекторию $x(t)$, обладающую свойствами.

1. $\min\{t : x(t) = y(t)\} < \infty$;

2. Для любых $0 \leqslant t_1 < t_2$ время перехода $t_2 - t_1$ из точки $x(t_1)$ в точку $x(t_2)$ является минимальным.

Множество траекторий $x(t)$ игрока P, удовлетворяющих условиям 1, 2 и исходящих из точки x_0, обозначим через X_{x_0}.

Назовем игру $\Gamma(x_0, y_0)$ регулярной, если выполнено следующее условие. Пусть траектории $y^1(t)$, $y^2(t) \in Y_{y_0, \psi}$, и пусть $x^1(t)$, $y^1(t)$ — соответствующие им траектории из множества X_{x_0}; пусть далее на отрезке $[0, t]$

$$y^1(t) = y^2(t),$$

$$\dot{y}^1(t) = \dot{y}^2(t).$$

Тогда

$$x^1(t) = x^2(t),$$

$$\dot{x}^1(t) = \dot{x}^2(t).$$

Определим для регулярных игр следующую стратегию.

Пусть игрок E в позиции $y(t)$ выбирает некоторое управление $\psi \in \Psi$; тогда, как это следует из допущения о регулярности, у игрока P существует выбор $\bar{\varphi}$ в точке $x(t)$ такой, что все траектории из множества $X_{x(t)}$ имеют в момент времени t направление $f(x, \bar{\varphi})$.

Определение. Стратегию φ^{Π} мы будем называть П-стратегией, если каждой точке x, y и управлению ψ игрока E в позиции x она ставит в соответствие управление $\bar{\varphi}$, о котором говорилось выше.

Теорема 2. *Предположим, что множество $C_{\varphi^{\Pi}}(x_0, y_0)$ пересекается с дополнением множества S. Тогда, для того чтобы П-стратегия удовлетворяла условиям теоремы 1 достаточно, чтобы существовала стратегия ψ^* игрока E, при которой он перемещается по одной из траекторий множества $Y_{y_0, \psi}$, и такая, что поимка в ситуации (φ^{Π}, ψ^*) происходит в дополнении множества S.*

Доказательство. Теорема сразу получается из того факта, что в ситуации (φ^{Π}, ψ^*) (см. определение П-стратегии) игрок будет перемещаться по одной из траекторий $x(t) \in X_{x_0}$, то есть будет осуществлять быстродействие в точку поимки.

Таким образом для избежания поимки E в S достаточно существование траектории $y(t) \in Y_{y_0, \psi}$, при которой E избегает поимки в S при условии, что игрок P использует П-стратегию.

Обозначим через $D_{\varphi^{\Pi}}(x_0, y_0)$ множество точек поимки при условии, что игрок E использует только стратегии ψ, предписывающие ему движения по одной из траекторий $y(t) \in Y_{y_0}$, а игрок P использует П-стратегию. Во многих конкретных задачах оказывается, что множество $D_{\varphi^{\Pi}}(x_0, y_0)$ является границей множества $C_{\varphi^{\Pi}}(x_0, y_0)$. В этом случае, очевидно, имеет место следующая

Теорема 3. *Если множество $D_{\varphi^{\Pi}}(x_0, y_0)$ является границей множества $C_{\varphi^{\Pi}}(x_0, y_0)$, то в игре $\Gamma(x_0, y_0)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, при этом оптимальной стратегией игрока P является П-стратегия.*

Рассмотрим теперь одну игру уровня, которая естественным образом получается как обобщение игры $\Gamma(x_0, y_0)$. Предположим, что условия теоремы 3 выполнены, и множество $C_{\varphi^{\Pi}}(x_0, y_0)$ содержится в S. Это означает, что при любых стратегиях ψ поимка игрока E гарантирована в S. Пусть

$$\rho(x(t_p), S)$$

— расстояние от точки поимки до границы множества S. Будем считать, что игрок E стремится быть пойманным как можно ближе к границе множества S, и игра антагонистическая. То есть игрок E стремится минимизировать величину $\rho(x(t_p), S)$. В остальном игра совпадает с игрой $\Gamma(x_0, y_0)$. Полученную игру будем обозначать через $\bar{\Gamma}(x_0, y_0)$. Имеет место следующая

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы 3 в игре $\bar{\Gamma}(x, y)$ существует ситуация равновесия в чистых стратегиях, и оптимальной стратегией игрока P является П-стратегия.*

Доказательство. Пусть y' — точка, в которой

$$\min_{\eta \in C_E^T(y)} \rho(\eta, S) = \rho(y', S),$$

где $\rho(\eta, S)$ — расстояние от точки η до границы множества S; тогда оптимальной стратегией игрока E будет стратегия, предписывающая ему движение вдоль траектории $y(t) \in Y_{y_0, \psi}$, соединяющей точки y_0 и y'. Поскольку точка y' принадлежит границе множества $C_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$, то такая траектория $y(t)$ действительно существует. Оптимальность П-стратегии следует из того, что в указанном случае она осуществляет быстродействие в точку поимки.

Пример. Пусть S — некоторое выпуклое множество и игроки обладают простыми движениями.

Элементы множеств $Y_{y_0, \psi}$ и X_{x_0} представляют собой полупрямые, выходящие из точек y_0 и x_0. Условие о регулярности, очевидно, выполняется, так как элементы множеств $Y_{y_0, \psi}$ либо совпадают, либо имеют единственную общую точку y_0. П-стратегия получает изящный геометрический смысл. Какова бы ни была стратегия $\psi \in \overline{E}$ игрока E в любой ситуации (φ^{Π}, ψ) отрезок прямой, соединяющей точки $x(t)$, $y(t)$ параллелен отрезку прямой, соединяющей точки x, y, и расстояние между точками $x(t)$ и $y(t)$ — $\rho(x(t), y(t))$ строго убывает со временем (параллельное преследование).

Поместим начало координат в точку y, и направим координатный орт e_n в точку $(0, a)$, $a = \rho(x, y)$. Пусть ψ — некоторая стратегия E; тогда из определения П-стратегии немедленно следует, что в ситуации (φ^{Π}, ψ) траектория преследователя P получается как решение системы уравнений

$$\dot{x}_i = \psi_i(x, y), \quad i = 1, \cdots, n-1,$$

$$\dot{x}_n = -\sqrt{v^2 - \sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^2(x, y)}$$

при начальных условиях $x_i(0) = 0$, $x_n(0) = a$, $i = 1, \cdots, n-1$.

Множество $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ представляет собой сферу. Пусть a — расстояние между точками x и y, тогда радиус сферы $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ равен

$$R = \frac{av}{u^2 - v^2}.$$

Пусть E перемещается по полупрямой $y(t)$, а P применяет П-стратегию. Построим множество $D_{\varphi^{\Pi}}(x(t), y(t))$ для начальных позиций $x(t)$, $y(t)$. Оно представляет собой сферу, центр которой находится на пересечении прямой, соединяющей точки $x(t)$, $y(t)$ и прямой, соединяющей центр сферы $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ с точкой пересечения полупрямой $y(t)$ с множеством $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$. Кроме того, сфера $D_{\varphi^{\Pi}}(x(t), y(t))$ имеет одну общую точку со сферой $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$, являющейся точкой пересечения полупрямой $y(t)$ со сферой $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$. Отсюда немедленно следует, что сфера $D_{\varphi^{\Pi}}(x(t), y(t))$ содержится в шаре с границей $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$. Далее, применяя леммы 3 и 4 из [4], можно показать, что в любой ситуации (φ^{Π}, ψ) точка поимки принадлежит шару с границей $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$. Это означает, что множество $D_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ представляет собой границу множества $C_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$, и теорема 3 применима. То есть в этом случае П-стратегия оптимальна для преследователя P.

Рассмотрим теперь игру в дополнении некоторого выпуклого множества S (простое преследование). Множество точек поимки в ситуации (φ^{Π}, ψ), где ψ — произвольная стратегия игрока E, то же, что и в предыдущем примере. Так что все рассуждения останутся в силе, если в ситуации (φ^{Π}, ψ) траектория игрока P не пересечет границы множества S до окончания игры (то есть $t_P \leqslant t_{S_P}$ и $t_{S_E} \leqslant t_{S_P}$). В противном случае стратегия, осуществляющая параллельное преследование, окажется недопустимой, поскольку она не будет удовлетворять условиям (2), (3). Пусть, как обычно, x — начальное местоположение преследователя P' и $C_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ — множество точек поимки в ситуациях (φ^{Π}, ψ), где ψ — произвольная стратегия игрока E. Пусть далее $M(x, y)$ — выпуклая оболочка, натянутая на множество $C_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ и точку x. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть множество $M(x, y)$ имеет пустое пересечение с дополнением множества S, тогда оптимальная стратегия игрока P — П-стратегия, и поимка игрока E всегда возможна в S.*

Доказательство теоремы 5 следует из того, что в ситуации (φ^{Π}, ψ) траектория игрока P ни при каких стратегиях ψ игрока E не покидает множества S.

В случае, когда множество $C_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ имеет непустое пересечение с дополнением множества S, то, как это следует из определения П-стратегии и теоремы 2, игрок E всегда обладает стратегией ψ°, при которой поимка в S невозможна. В этом случае значение игры равно —1.

Нерешенным остается случай, когда множество $C_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ не пересекается с дополнением множества, а множество $M(x, y)$ пересекается с дополнением множества S. В этом случае некоторые траектории игрока P в ситуации (φ^{Π}, ψ) (при некоторых стратегиях ψ) оказываются недопустимыми ввиду того, что они пересекаются с дополнением множества S, и множество точек поимки $C_{\varphi^{\Pi}}(x, y)$ перестает быть шаром.

Ленинградский государственный
университет

Поступило 13.XI.1967

Լ. Հ. ՊԵՏՐՈՍՅԱՆ

ՈՐԱԿԱՅԻՆ ԽԱՂԵՐԻ ՄԻ ԴԱՍԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է հետապնդման մի խաղ R^4-ին պատկանող փակ S բազմության մեջ, P խաղացողի շահած գումարը հավասար է + 1, եթե նա բռնում է E-ին բազմության մեջ և հավասար է —1 հակառակ դեպքում, խաղը լրիվ ինֆորմացիայով է և E խաղացողը դիսկրիմինացված է, խաղացողները կատարում են անկախ միմիանցից շարժումներ։ Ապացուցվում են մի քանի ընդհանուր գոյության թեորեմներ և տրվում է խաղի լրիվ լուծումը պարզ հետապնդման» դեպքում։

L. A. PETROSIAN

ON A CLASS OF GAMES OF KIND

Summary

We investigate the class of pursuit games, the pursuit taking place in a given closed set S in the payoff space. The payoff of player P is $+1$ if he catches the evader E in S and -1 in the opposite case. The players have independent motions, the information is complete, and E is descreminated. We give some general existence theorems and a complete solution in the „simple motion" case.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Айзекс.* Дифференциальные игры, Москва, Мир, 1967.
2. *Н. Н. Воробьев.* Конечные бескоалиционные игры, УМН, 14, № 4, 1959.
3. *Л. А. Петросян.* Об одном семействе дифференциальных игр на выживание в пространстве R^n, ДАН СССР, 161, № 1, 1965.
4. *Л. А. Петросян.* Игры преследования „с линией жизни", Вестник ЛГУ, № 13, 1967.
5. *Л. С. Понтрягин.* К теории дифференциальных игр, УМН 21, № 4, 1966.
6. *Н. Н. Красовский, В. Е. Третьяков.* К задаче преследования в случае ограничений на импульсы управляющих сил, Дифференциальные уравнения, № 5, 1966.