ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 3, 1968 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН

РАСШИРЕНИЕ КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ ДАНЖУА—КАРЛЕМАНА

Введение

1. Идея дальнейшего расширения и обобщения понятия аналитичности связана с именами Н. Адамара и Э. Бореля, впервые выдвинувшими некоторые важные проблемы в этом круге вопросов.

Напомним, что функция $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемая на некотором промежутке $I=(a, b)$, называется аналитической на этом промежутке, если для каждой точки $x_0 \in I$ имеет место разложение в ряд Тейлора

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n, \tag{1}$$

который сходится в некоторой окрестности этой точки.

Как хорошо известно, *для того чтобы бесконечно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ была аналитической на промежутке I необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства вида*

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant A\cdot B^n\, n!;\ x\in I\ (n=1, 2, \cdots), \tag{2}$$

где $A=A(\varphi)>0$, $B=B(\varphi)>0$ — постоянные, зависящие, вообще говоря, от функции φ.

Но этой теореме можно дать и другую формулировку, которая естественным образом приводит нас к понятию классической квазианалитичности.

Пусть $\{M_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел. Обозначим через $C\{M_n\}$ множество бесконечно дифференцируемых и ограниченных на промежутке I функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^n M_n\ \ (n=1, 2, \cdots), \tag{3}$$

где постоянные $A=A(\varphi)>0$ и $B=B(\varphi)>0$ зависят, вообще говоря, от функции φ.

Тогда предыдущее утверждение может быть сформулировано и таким образом.

Класс $C\{n!\}$ совпадает с множеством функций, аналитических на промежутке I.

Важнейшее свойство класса $C\{n!\}$ заключается в том, что каждая функция этого класса определяется единственным образом посредством своего значения и значений своих последовательных производных в любой точке $x_0 \in I$. Иначе говоря, каждая функция $\varphi(x) \in C\{n!\}$, удовлетворяющая условиям

$$\varphi^{(n)}(x_0) = 0; \ x_0 \in I \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

тождественно равна нулю на всем промежутке I.

Проблема, поставленная Адамаром [1] в 1912 г., формулировалась таким образом:

Каковы должны быть числа последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, *чтобы для каждой пары функций* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *из класса* $C\{M_n\}$ *из равенства чисел*

$$\varphi^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0); \ x_0 \in I \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

следовало бы тождество

$$\varphi(x) \equiv g(x), \ x \in I.$$

Такие классы $C\{M_n\}$ и было принято называть *квазианалитическими* на промежутке I.

Поскольку классы $C\{M_n\}$, очевидно, аддитивны, т. е. со всякой парой функций $\varphi(x)$ и $g(x)$ этому же классу принадлежат также и функции $\varphi(x) \pm g(x)$, то проблема Адамара может быть поставлена и в такой форме:

Каковы должны быть числа последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, *чтобы для каждой функции* $\varphi(x) \in C\{M_n\}$ *из равенств*

$$\varphi^{(n)}(x_0) = 0; \ x_0 \in I \ (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

следовало бы тождество

$$\varphi(x) \equiv 0, \ x \in I. \tag{5}$$

Данжуа [3] впервые получил достаточное условие для квазианалитичности класса $C\{M_n\}$. А именно, он установил квазианалитичность для случаев, когда

$$M_n = (n \cdot \log n \cdots \log_p n)^n, \ n > N_p, \tag{6}$$

где $p > 1$ — любое целое число, и доказал вообще, что это так всякий раз, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} = +\infty$$

и последовательность $\{M_n\}_1^\infty$ удовлетворяет еще некоторым дополнительным условиям.

Карлеман [4] дал исчерпывающее решение проблемы Адамара, установив необходимое и достаточное условие квазианалитичности. Несколько позже А. Островский [5] дал другое, более простое условие, эквивалентное условию Карлемана.

В формулировке Островского теорема Данжуа—Карлемана гласит:

Для квазианалитичности класса $C\{M_n\}$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2} dr = +\infty, \tag{7}$$

где

$$T(r) = \sup_{n \geq 1} \frac{r^n}{M_n}. \tag{8}$$

Метод доказательства этой теоремы, данный Карлеманом и значительно упрощенный затем Островским, заключался в сведении проблемы квазианалитичности к известной проблеме Ватсона о максимальной скорости убывания ограниченной аналитической функции в круге (или в полуплоскости).

Это сведение совершалось путем применения аппарата преобразования Лапласа и интеграла Пуассона, позволяющего построить аналитическую и ограниченную в круге функцию $f(z) \not\equiv 0$, предельно быстро убывающую в окрестности одной точки окружности.

Впоследствии С. Мандельбройт [6], а затем Банг [7] дали другие доказательства теоремы Данжуа—Карлемана. Они интересны тем, что в них не привлекаются методы теории аналитических функций и интегральных преобразований.

2. Дальнейшее существенное продвижение в теории квазианалитических функций было достигнуто благодаря целой серии работ С. Мандельбройта.

В исследованиях С. Мандельбройта, систематически изложенных затем в его известной монографии [8], разработанная им теория примыкающих рядов нашла важные применения в целом ряде тонких вопросов классического анализа и, в частности, в развитой им теории обобщенной квазианалитичности.

Обобщенная проблема квазианалитичности ставилась таким образом:

Пусть $\{\nu_n\}_1^\infty$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, а $\{M_n\}_1^\infty$ — положительная последовательность. Класс $C\{M_n\}$ бесконечно дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций является *квазианалитическим* $\{\nu_n\}$, если из равенств нулю чисел

$$\varphi(0) = \varphi^{(\nu_n)}(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

следует, что $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$.

Очевидно, что классом, квазианалитическим в классическом смысле на $[0, +\infty)$, является класс, квазианалитический $\{n\}$.

Опираясь на свою фундаментальную теорему о примыкающих рядах, Мандельбройт дал в известном смысле полное решение проблемы обобщенной квазианалитичности.

В теоремах Мандельбройта, формулировки которых мы здесь приводить не будем (см. [8], гл. IV), дается несколько интегральных критериев необходимо-достаточного типа для $\{\nu_n\}$-квазианалитичности класса $C\{M_n\}$. В них выявлена глубокая взаимная связь между распределением последовательности $\{\nu_n\}$ и ростом функции $T(r)$, ассоциированной с $\{\nu_n\}$-квазианалитическим классом $C\{M_n\}$.

Однако отметим особо, что в указанных критериях $\{\nu_n\}$-квазианалитичности условие обычной квазианалитичности, т. е. расходимость интеграла

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2}\, dr \tag{9}$$

предполагается безусловно выполненным. Образно говоря, для $\{\nu_n\}$-квазианалитичности от функции $T(r)$ требуется заведомо больший рост, а это значит, что от последовательности $\{M_n\}_1^\infty$ требуется заведомо меньший рост, чем это надо для расходимости интеграла (9).

3. Согласно теореме Данжуа—Карлемана при условии

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^2}\, dr < +\infty \tag{10}$$

класс $C\{M_n\}$ бесконечно дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ или на отрезке $[0, l]$ $(0 < l < +\infty)$ функций будет заведомо неквазианалитическим. А именно, как хорошо известно, при условии (10), скажем в случае полуоси $[0, +\infty)$, существует нетривиальная функция $\varphi(x)$ из класса $C\{M_n\}$, и более того, удовлетворяющая условиям вида

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant A \cdot B^n M_n e^{-\nu x};\ x \in [0, +\infty)\ (\nu > 0;\ n = 1, 2, 3, \cdots),$$

для которой $\varphi^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

В связи с этим фактом естественно возникает следующий вопрос:

Если класс $C\{M_n\}$ *неквазианалитический на* $[0, +\infty)$ *или на* $[0, l]$, *то какие данные вместо последовательности значений* $\varphi^{(n)}(0)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ *определяют функции этого класса единственным образом?*

В настоящем исследовании вводится новое значительно более общее понятие—понятие *α-квазианалитичности*, охватывающее, в частности, и понятие обычной квазианалитичности, и приводится полное решение поставленной задачи.

Для формулировки основных результатов работы необходимо ввести некоторые предварительные определения и обозначения.

Пусть функция $\varphi(x)$ определена и измерима на $(0, +\infty)$. Тогда на $(0, +\infty)$ можно ввести в рассмотрение следующие функции (в предположении их существования хотя бы почти всюду):

$$D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t - x)^{\alpha - 1} \varphi(t)\, dt \qquad (0 < \alpha < +\infty),$$

$$D_\infty^{\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_\infty^{-(1-\alpha)} \varphi(x)\ \ (0 < \alpha \leqslant 1), \tag{11}$$

известные под названием *интеграла* и, соответственно, *производной* *в смысле Вейля порядка α.* При этом естественно интеграл или производную нулевого порядка отождествлять с самой функцией, т. е. положить

$$D_{\infty}^{0}\varphi(x)\equiv\varphi(x). \tag{11'}$$

Рассмотрим множество $C_{\alpha}^{(\infty)}(0\leqslant\alpha<1)$ бесконечно дифференцируемых на $[0,+\infty)$ функций $\varphi(x)$, подчиненных условиям

$$\sup_{0\leqslant x<+\infty}|(1+x^{\alpha m})\varphi^{(n)}(x)|<+\infty \quad (n;\ m=0,1,2,\cdots). \tag{12}$$

В предположении, что $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{\infty}$ $(0\leqslant\alpha<1)$, положив $\frac{1}{\rho}=1-\alpha$, рассмотрим операторы

$$D_{\infty}^{0/\rho}\varphi(x)\equiv\varphi(x),$$

$$D_{\infty}^{1/\rho}\varphi(x)\equiv\frac{d}{dx}D_{\infty}^{-\alpha}\varphi(x), \tag{13}$$

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)\equiv D_{\infty}^{1/\rho}D_{\infty}^{(n-1)/\rho}\varphi(x)\quad(n=2,3,\cdots),$$

т. е. операторы последовательного дифференцирования функции $\varphi(x)$ порядков $\frac{n}{\rho}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ в смысле Вейля.

Наконец, для произвольной последовательности положительных чисел $\{M_n\}_1^{\infty}$ мы вводим следующие два класса бесконечно дифференцируемых на $[0,+\infty)$ функций:

Класс $C_{\alpha}^{*}\{[0,+\infty);\ M_n\}$ *— совокупность функций* $\varphi(x)$ *из* $C_{\alpha}^{(\infty)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\sup_{0\leqslant x<+\infty}|D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)|\leqslant AB^{n}M_{n}\qquad(n=1,2,\cdots) \tag{14}$$

и

класс $C_{\alpha}\{[0,+\infty);\ M_n\}$ *— совокупность функций* $\varphi(x)$ *из* $C_{\alpha}^{(\infty)}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\sup_{0\leqslant x<+\infty}|(1+\alpha x^{2})\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^{n}M_{n}\qquad(n=1,2,\cdots). \tag{15}$$

При этом, как обычно, так и в этих определениях $A=A(\varphi)>0$ и $B=B(\varphi)>0$ — постоянные, зависящие, вообще говоря, от самой функции $\varphi(x)$ данного класса.

Для обоих этих классов ставится вопрос, аналогичный проблеме Адамара и сводящийся к этой же проблеме при значении параметра $\alpha=0$.

Какова должна быть последовательность чисел $\{M_n\}_1^{\infty}$, *чтобы для любой пары функций* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *из соответствующего класса из равенств*

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0)=D_{\infty}^{n/\rho}g(0)\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{16}$$

следовало бы тождество

$$\varphi(x)\equiv g(x),\ 0\leqslant x<+\infty. \tag{17}$$

Или, что то же самое:

Какова должна быть последовательность чисел $\{M_n\}_1^\infty$, *чтобы для каждой функции* $\varphi(x)$ *из соответствующего класса из равенств*

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots) \tag{16'}$$

следовало бы тождество

$$\varphi(x)\equiv 0, \quad 0\leqslant x<+\infty. \tag{17'}$$

Такого рода классы $C_\alpha^*\{[0,+\infty); M_n\}$ или $C_\alpha\{[0,+\infty); M_n\}$ впредь мы и будем называть *α-квазианалитическими.* Добавим при этом, что 0-квазианалитические классы $C_0^*\{[0,+\infty); M_n\}$; и $C_0\{[0,+\infty); M_n\}$ есть не что иное, как квазианалитический на $[0,+\infty)$ класс $C\{M_n\}$ в обычном классическом смысле.

Данная работа, посвященная установлению критериев α-квазианалитичности, состоит из трех параграфов. При этом в первых двух параграфах приводится ряд важных, но вспомогательных результатов, существенно необходимых для заключительного § 3, где устанавливаются основные результаты работы, содержащие решение проблемы α-квазианалитичности.

Вкратце перечислим содержание отдельных параграфов статьи, и приведем формулировки основных теорем, относящихся к α-квазианалитичности.

В § 1 наряду с приведением некоторых известных предложений теории функций и теории интегральных преобразований с ядрами Миттаг-Леффлера (теоремы А, Б, В и Г), на которые мы опираемся в последующем, устанавливается ряд лемм и весьма важные для дальнейшего теоремы 1 и 2 о представлениях функций, аналитических в угловой области, а также целых функций конечного роста.

Эти теоремы представляют собой специфические аналоги более ранних результатов автора, относящихся к развитой им теории интегральных преобразований и представлений функций в комплексной области, существенно опирающейся на применение функций типа Миттаг-Леффлера [9]

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}. \tag{18}$$

Весь § 2 посвящается изложению ряда свойств операторов дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля и в смысле Вейля, которые весьма необходимы для всего данного исследования. Здесь приводится ряд лемм о свойствах и представлениях операторов Вейля $D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ и аналогичных операторов Римана-Лиувилля $D_l^{n/\rho}\varphi(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ в случае, когда функция $\varphi(x)$ определена лишь на конечном отрезке $[0,l]$. Здесь же отмечается существенное для дальнейшего обстоятельство, заключающееся в том, что функции

$$e^{-\lambda^\rho x} \text{ и } E_\rho\left(\lambda x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}$$

являются решениями некоторых задач типа задачи Коши для специальных дифференциальных операторов дробного порядка.

Наконец, в § 3 устанавливаются основные теоремы 3—6 работы, дающие ответ на вопрос об α-квазианалитичности классов

$$C_\alpha^*\{[0, +\infty);\ M_n\}\ (0 \leqslant \alpha < 1) \text{ и } C_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}\ (0 \leqslant \alpha < 1),$$

а также для аналогичных классов функций $C_\alpha^*\{[0, l];\ M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ и $C_\alpha\{[0, l];\ M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ в случае конечного отрезка. Каждая из этих теорем в предельном случае, когда значение параметра $\alpha=0$, сводится к классической теореме Данжуа—Карлемана.

Приведем формулировки теорем 3 и 4.

Теорема 3. *Для того чтобы класс* $C_\alpha^*\{[0, +\infty);\ M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ *был α-квазианалитическим необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty. \tag{19}$$

Теорема 4. *Для того чтобы класс* $C_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ *был α-квазианалитическим необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty. \tag{20}$$

Причем в обеих теоремах, как обычно, положено

$$T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}.$$

Отметим, что элементарные оценки показывают, что если

$$M_n = \left(n^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \log n \cdots \log_p n\right)^n \ (n \geqslant N_p), \tag{21}$$

где $p \geqslant 1$ — любое целое число, то условие (20) выполняется. Таким образом, α-квазианалитический класс $C_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}$ $(0 < \alpha < 1)$ существенно шире обычного квазианалитического класса $C_0\{[0, +\infty);\ M_n\} \equiv C\{M_n\}$, поскольку в первом случае последовательные производные функций класса могут расти значительно сильнее $\left(\text{ведь } \frac{1+\alpha}{1-\alpha} > 1\right.$ при $\left. 0 < \alpha < 1!\right)$, чем это допустимо для классов квазианалитических в обычном смысле, что видно, например, из первоначального результата Данжуа [6].

Отметим еще, что основная трудность при доказательстве этих теорем выпадает на теорему 3, с помощью которой затем сравнительно легко устанавливается теорема 4. Что же касается доказательства теоремы 3, то, как и первоначальное доказательство теоремы Данжуа—Карлемана, оно также проводится методом сведения задачи α-квазианалитичности к известной проблеме Ватсона, но уже для угловой области определенного раствора, и существенно опирается также на наличие отличной от нуля аналитической функции, предельно быстро убывающей в этом угле. Однако, здесь также сведение задачи удается осуществить лишь с помощью аппарата интегральных преобразований и представлений с ядром Миттаг-Леффлера, с одновременным привлечением операторов дробного дифференцирования в смысле Вейля.

В заключительных теоремах 5 и 6, формулировки которых мы не приводим здесь, так как они по существу те же, что и в теоремах 3 и 4, приводится решение проблемы α-квазианалитичности для классов $\dot{C}_\alpha\{[0, l]; M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ и $C_\alpha\{[0, l]; M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ бесконечно дифференцируемых функций, определенных на конечном отрезке $[0, l]$.

§ 1. Предварительные теоремы теории функций и теории интегральных представлений и преобразований с ядром Миттаг-Леффлера

1.1. (а) Рассмотрим область

$$\Delta(\gamma; 0)=\left\{z; |\arg z|<\frac{\pi}{2\gamma},\ 0<|z|<+\infty\right\}\left(\frac{1}{2}<\gamma<+\infty\right), \tag{1.1}$$

представляющую собой угол раствора $\pi/\gamma<2\pi$.

Следующая известная теорема играет важную роль в последующем изложении. Различные эквивалентные этой теореме предложения встречаются в целом ряде работ [10, 4, 5].

Теорема А. 1°. *Пусть функция $F(z)$ аналитична внутри и непрерывна в замкнутой области $\bar{\Delta}(\gamma; 0)$ (кроме, быть может, точки $z=\infty$) и удовлетворяет там неравенству*

$$|F(re^{i\varphi})|\leqslant Ae^{-p(r)}\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\gamma},\ 0\leqslant r<+\infty\right), \tag{1.2}$$

где $A>0$ — некоторая постоянная, а $p(r)$ — неотрицательная функция, определенная на полуоси $[0, +\infty)$. Если при этом

$$\int_1^{+\infty}\frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr=+\infty, \tag{1.3}$$

то $F(z)\equiv 0$.

2°. *Пусть $p(r)>0$ — неубывающая функция, определенная на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяющая условию*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr < +\infty, \tag{1.4}$$

где $\frac{1}{2} < \gamma < +\infty$.

Тогда существует функция $F(z) \not\equiv 0$, *аналитическая внутри и непрерывная в замкнутом угле* $\overline{\Delta}(\gamma, 0)$ *и удовлетворяющая неравенству* (*1.2*).

Доказательство. 1°. Преобразование

$$w = \frac{z^{\gamma}-1}{z^{\gamma}+1}, \quad z = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{1/\gamma}$$

конформно отображает область $\Delta(\gamma; 0)$ на единичный круг $|w| < 1$. Поэтому функция

$$f(w) = F\left(\left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{1/\gamma}\right)$$

аналитична внутри и непрерывна в замкнутом круге $|w| \leqslant 1$ (кроме, быть может, точки $w = 1$). Далее, в силу условия (1.2), она ограничена там и удовлетворяет неравенству

$$|f(w)| \leqslant A \exp\left\{-p\left(\left|\frac{1+w}{1-w}\right|^{1/\gamma}\right)\right\} \quad (|w| \leqslant 1). \tag{1.5}$$

Предположим, вопреки утверждению теоремы, что $F(z) \not\equiv 0$. Тогда будем иметь также $f(w) \not\equiv 0$ и, согласно известной теореме [11], справедливой для значительно более широких классов аналитических функций, должно быть

$$\int_{|w|=1} \log|f(w)|\,|dw| > -\infty,$$

или, по неравенству (1.5)

$$\int_{|w|=1} p\left(\left|\frac{1+w}{1-w}\right|^{1/\gamma}\right)|dw| < +\infty.$$

Наконец, поскольку

$$\int_{|w|=1} p\left(\left|\frac{1+w}{1-w}\right|^{1/\gamma}\right)|dw| = 2\int_{0}^{\pi} p\left(\operatorname{ctg}^{1/\gamma}\frac{\vartheta}{2}\right)d\vartheta =$$

$$= 2\gamma \int_{0}^{+\infty} p(r)\,\frac{r^{\gamma-1}}{1+r^2}\,dr,$$

то интеграл

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr$$

сходится. Противоречие с условием (1.3) теоремы доказывает, что $f(w)\equiv F(z)\equiv 0$.

2°. Положив

$$q(r)=p(r^{1/\gamma}),$$

заметим, что

$$\int_1^{+\infty}\frac{q(r)}{r^2}\,dr=\gamma\int_1^{+\infty}\frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr<+\infty, \tag{1.4'}$$

в силу условия (1.4) теоремы.

Из (1.4′) следует, что интеграл

$$g(w)\equiv 2\frac{u+1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{q(|\tau|)}{(u+1)^2+(\tau-v)^2}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}q(|\tau|)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{1+w-i\tau}\,d\tau\quad(w=u+iv) \tag{1.6}$$

сходится при любом $u>-1$ и $-\infty<v<+\infty$, определяя функцию $g(w)\geqslant 0$, гармоническую в полуплоскости $\mathrm{Re}\,w>-1$.

Оценим функцию $g(w)$ снизу на полуокружностях

$$|w|=\sqrt{u^2+v^2}=R,\ \mathrm{Re}\,w\geqslant 0.$$

С этой целью, заметив, что функция $q(|\tau|)=p(|\tau|^{1/\gamma})$ не убывает на полуоси $[0,+\infty)$, из (1.6) приходим к неравенству

$$g(u+iv)\geqslant\frac{2q(R)}{\pi}\{I_{(-)}(u;\,v)+I_{(+)}(u;\,v)\}, \tag{1.7}$$

где

$$I_{(-)}(u;\,v)=(u+1)\int_{-\infty}^{-R}\frac{d\tau}{(u+1)^2+(\tau-v)^2}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\frac{R+v}{u+1},$$

$$I_{(+)}(u;\,v)=(u+1)\int_{R}^{+\infty}\frac{d\tau}{(u+1)^2+(\tau-v)^2}=\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}\,\frac{R-v}{u+1}.$$

Далее, поскольку

$$I_{(-)}(u;\,v)+I_{(+)}(u;\,v)=\pi-\mathrm{arctg}\,\frac{2R(u+1)}{2u+1}\geqslant\frac{\pi}{2},$$

то из (1.7) мы приходим к неравенству

$$g(w)\geqslant q(R)\quad(|w|=R,\ \mathrm{Re}\,w\geqslant 0). \tag{1.8}$$

Обозначим, наконец, через $h(w)$ функцию, гармонически сопряженную с $g(w)$ в полуплоскости $\mathrm{Re}\,w>-1$.

Тогда функция

$$f(w)=\exp\{-g(w)-ih(w)\}$$

аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,w>-1$, отлична там от нуля и в силу (1.8) удовлетворяет неравенству

$$|f(w)| \leqslant \exp\{-q(R)\} \quad (|w| = R, \ \operatorname{Re} w \geqslant 0).$$

Наконец, так как $q(R) = p(R^{1/\gamma})$, легко видеть, что функция

$$F(z) = f(z^{1/\gamma})$$

будет искомой.

(б) В связи с утверждением 2° теоремы А в свое время была поставлена задача: *существует ли целая функция конечного порядка ρ и нормального типа, удовлетворяющая неравенству (1.2) при том же условии (1.4)?*

Вопрос о нижней грани для порядка ρ искомых целых функций выясняется легко. А именно, опираясь на теорему Фрагмена-Линделефа и на теорему Валирона об оценке модуля целой функции снизу, можно легко убедиться в том, что если такая целая функция $f(z) \not\equiv$ $\not\equiv \mathrm{const}$ существует, то ее порядок $\rho \geqslant \max\left\{\gamma, \dfrac{\gamma}{2\gamma - 1}\right\}$.

Полное решение этой задачи было дано в недавней работе Н. У. Аракеляна [11], а именно, доказана следующая

Теорема Б*. *Пусть $p(r) \geqslant 0$ — неубывающая функция на полуоси $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям*

$$r^{-\gamma} p(r) \downarrow 0, \quad r \uparrow +\infty, \tag{1.9}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr < +\infty \quad \left(\frac{1}{2} < \gamma < +\infty\right). \tag{1.10}$$

Тогда существует целая функция $f(z)$ порядка $\rho = \max\left\{\gamma, \dfrac{\gamma}{2\gamma - 1}\right\}$ и нормального типа, все нули которой лежат вне замкнутого угла $\bar{\Delta}(\gamma; 0)$ и которая удовлетворяет неравенству

$$|f(re^{i\varphi})| \leqslant \exp\{-p(r) - r^{\gamma}\cos\gamma\varphi\} \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\gamma}, \ 0 \leqslant r < +\infty\right). \tag{1.11}$$

1.2. (а) Введем некоторые обозначения.

Для любого $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ и $\rho > \dfrac{1}{2}$ введем в рассмотрение взаимно дополнительные угловые области с вершиною в точке $\zeta = 0$:

$$\Delta(\rho; \vartheta) = \left\{\zeta; |\operatorname{Arg}\zeta - \vartheta| < \frac{\pi}{2\rho}, \ 0 < |\zeta| < +\infty\right\} \tag{1.12}$$

и

$$\Delta^*(\rho; \vartheta) = \left\{\zeta, \ \frac{\pi}{2\rho} < |\operatorname{Arg}\zeta - \vartheta| \leqslant \pi, \ 0 < |\zeta| < +\infty\right\}. \tag{1.13}$$

---

* Специальный случай этой теоремы, когда $\gamma = 1$, был установлен ранее автором [12] значительно более простым путем. При снятии же ограничения относительно расположения нулей целой функции, в том же случае $\gamma = 1$, теорема эта следует также из некоторых результатов С. Мандельбройта [7].

Далее, условившись под $(e^{-i\theta}\zeta)^\rho$ понимать ту ветвь этой функции, которая на луче $\arg\zeta=\theta$ принимает положительные значения, для любого $\nu\geq 0$ введем в рассмотрение область

$$D_\rho(\theta;\ \nu)=\left\{\zeta;\ \ \mathrm{Re}(e^{-i\theta}\zeta)^\rho>\nu,\quad |\mathrm{Arg}\,\zeta-\theta|<\frac{\pi}{2\rho}\right\}\tag{1.14}$$

и ее дополнение

$$D_\rho^*(\theta;\ \nu)=C\overline{D}_\rho(\theta;\ \nu)\tag{1.15}$$

относительно всей плоскости ζ.

Легко видеть, что

$$\Delta(\rho;\ \theta)\equiv D_\rho(\theta;\ 0),\ \ \Delta^*(\rho;\ \theta)\equiv D_\rho^*(\theta;\ 0),\tag{1.16}$$

а также, что при любом $\nu>0$

$$\Delta(\rho;\ \theta)\supset D_\rho(\theta;\ \nu),\quad \Delta^*(\rho;\ \theta)\subset D_\rho^*(\theta;\ \nu).\tag{1.17}$$

Очевидно далее, что области $D_\rho(\theta;\ \nu)$ и $D_\rho^*(\theta;\ \nu)$ имеют общую границу $L_\rho(\theta;\ \nu)$ уравнение которой имеет вид

$$L_\rho(\theta;\ \nu)\equiv\left\{\zeta;\ \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta}\zeta)^\rho=\nu,\ |\mathrm{Arg}\,\zeta-\theta|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}\right\}.\tag{1.18}$$

Если $\nu=0$, то легко видеть, что $L_\rho(\theta;\ 0)$ — это совокупность лучей $\mathrm{Arg}\,\zeta=\theta\pm\dfrac{\pi}{2\rho}$, образующих границу угловых областей $\Delta(\rho;\ \theta)$ и $\Delta^*(\rho;\ \theta)$.

Если же $\nu>0$, то уравнение кривой $L_\rho(\theta;\ \nu)$ в полярных координатах имеет вид

$$r=\left\{\frac{\nu}{\cos\rho(\varphi-\theta)}\right\}^{1/\rho},\ |\varphi-\theta|\leqslant\frac{\pi}{2\rho}.\tag{1.18'}$$

Поэтому кривая $L_\rho(\theta;\ \nu)$ симметрична относительно луча $\arg\zeta=\theta$ и две ее бесконечные ветви асимптотически приближаются к лучам $\mathrm{Arg}\ \zeta=\theta\pm\dfrac{\pi}{2\rho}$, т. е. к границе $L_\rho(\theta;\ 0)$ угла $\Delta(\rho;\ \theta)$.

(б) В дальнейшем при $\theta=0$ мы будем пользоваться более краткими обозначениями областей:

$$\begin{gathered}\Delta_\rho\equiv\Delta(\rho;\ 0),\ \ \Delta_\rho^*\equiv\Delta^*(\rho;\ 0),\\ D_\rho(\nu)\equiv D_\rho(0;\ \nu),\ \ D_\rho^*(\nu)\equiv D_\rho^*(0;\ \nu)\quad(\nu>0),\end{gathered}\tag{1.19}$$

а также кривых

$$L_\rho^{(0)}\equiv L_\rho(0;\ 0),\quad L_\rho(\nu)\equiv L_\rho(0;\ \nu)\quad(\nu>0).\tag{1.20}$$

Наконец, обозначим через $\Delta_\rho(\nu)$ $(\nu>0)$ образ области угла Δ_ρ при его параллельном переносе $w=\zeta-\nu^{1/\rho}$, т. е.

$$\Delta_\rho(\nu)=\left\{\zeta;\ \ |\arg(\zeta-\nu^{1/\rho})|<\frac{\pi}{2\rho},\ 0<|\zeta-\nu^{1/\rho}|<+\infty\right\}.\tag{1.21}$$

Заметив, что $D_\rho(\nu)\subset\Delta_\rho$ и $\Delta(\nu)\subset\Delta_\rho$ $(\nu>0)$, приведем одну простую лемму.

Лемма 1. *Если $\rho \geqslant 1$, то справедливо включение*

$$\Delta_\rho(\nu) \subset D_\rho(\nu), \tag{1.22}$$

т. е. граница $L_\rho(\nu) \subset \Delta_\rho$ области $D_\rho(\nu)$ лежит вне области угла $\Delta_\rho(\nu)$.

Доказательство. Отметим, что ввиду (1.14) и (1.19)

$$D_\rho(\nu) = \left\{\zeta;\ \operatorname{Re}\zeta^\rho > \nu,\ |\arg\zeta| < \frac{\pi}{2\rho}\right\} \tag{1.14'}$$

и что граница области $D_\rho(\nu)$, т. е. кривая

$$L_\rho(\nu) : r^\rho \cos\rho\varphi = \nu,\ |\varphi| < \frac{\pi}{2\rho}$$

проходит через вершину $\zeta = \nu^{1/\rho}$ нашего угла $\Delta_\rho(\nu)$.

Далее, поскольку $\Delta_\rho(\nu) \subset \Delta_\rho$, то при $\zeta \in \Delta_\rho(\nu)$ имеем $|\arg\zeta| < \dfrac{\pi}{2\rho}$ и поэтому, чтобы установить включение (1.22), достаточно убедиться, что $\operatorname{Re}\zeta^\rho > \nu$ при $\zeta \in \Delta_\rho(\nu)$. А для этого, в свою очередь, достаточно убедиться в том, что неравенство $\operatorname{Re}\zeta^\rho > \nu$ справедливо во всех граничных точках области угла $\Delta_\rho(\nu)$, т. е. на лучах $\arg(\zeta - \nu^{1/\rho}) = \pm\dfrac{\pi}{2\rho}$, кроме точки их пересечения $\zeta = \nu^{1/\rho}$.

Пусть $\zeta = re^{i\varphi}$ $\left(\nu^{1/\rho} < r < +\infty,\ |\varphi| < \dfrac{\pi}{2\rho}\right)$ — произвольная точка, лежащая на границе угла $\Delta_\rho(\nu)$, т. е. на лучах $\arg(\zeta - \nu^{1/\rho}) = \pm\dfrac{\pi}{2\rho}$. Из треугольника с вершинами в точках 0, $\nu^{1/\rho}$ и $re^{i\varphi}$ мы находим

$$r = \nu^{1/\rho} \sin\frac{\pi}{2\rho} \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2\rho} - |\varphi|\right)$$

и, таким образом,

$$r^\rho \cos\rho\varphi = \nu\left[\sin\frac{\pi}{2\rho}\right]^\rho \frac{\cos\rho\varphi}{\left[\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - |\varphi|\right)\right]^\rho}. \tag{1.23}$$

Полагая теперь, что $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2\rho}$, рассмотрим функцию

$$y(\varphi) = \cos\rho\varphi\left[\sin\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right)\right]^{-\rho} > 0 \tag{1.24}$$

и ее логарифмическую производную

$$y'(\varphi)\, y^{-1}(\varphi) = -\rho\left[\operatorname{ctg}\rho\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right)\right]. \tag{1.25}$$

Поскольку по условию $\rho \geqslant 1$, то

$$\rho\left(\frac{\pi}{2\rho} - \varphi\right) \geqslant \frac{\pi}{2\rho} - \varphi \quad \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

и поэтому из (1.25) следует, что $y'(\varphi) \geqslant 0$. Таким образом, имеем

$$y(\varphi) \geqslant y(0) = \left|\sin\frac{\pi}{2\rho}\right|^{\rho} \left(0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Отсюда, ввиду четности функции (1.23), вытекает, что

$$\operatorname{Re} \zeta^{\rho} = r^{\rho} \cos \rho\varphi > \nu$$

для каждой выбранной нами точки.

(в) Приведем теперь некоторые предварительные сведения о характере роста функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\rho}(z;\ \mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)} \tag{1.26}$$

в комплексной области*.

Пусть $\rho > \frac{1}{2}$, $\mu > 0$, $p \geqslant 1$ — любое целое число, а $\varkappa_0$—произвольное число из интервала

$$\frac{\pi}{2\rho} < \varkappa_0 \leqslant \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho}\right\}.$$

Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

для $|\arg z| \leqslant \varkappa_0$, $|z| \to \infty$

$$E_{\rho}(z;\ \mu) = \rho\, z^{\rho(1-\mu)} e^{z^{\rho}} - \sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma\left(\mu - \frac{k}{\rho}\right)} + O(|z|^{-p-1}), \tag{1.27}$$

для $\varkappa_0 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$

$$E_{\rho}(z;\ \mu) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma\left(\mu - \frac{k}{\rho}\right)} + O(|z|^{-p-1}). \tag{1.28}$$

При этом, так как $1/\Gamma(0) = 0$, то в случае, когда $\mu = 1/\rho$, в формулах (1.27) и (1.28) следует полагать $p \geqslant 2$, а содержащиеся в них суммы следует заменить суммой

$$-\sum_{k=2}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma\left(\mu - \frac{k}{\rho}\right)}.$$

Из этого замечания и из наших формул (1.27) и (1.28), в частности, вытекают следующие оценки:

для $|\arg z| \leqslant \varkappa_0$, $|z| \geqslant 0$

$$\left|E_{\rho}\left(z;\ \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant M_1 (1 + |z|)^{\rho - 1} e^{\operatorname{Re} z^{\rho}} + \frac{M_2}{(1 + |z|)^2}, \tag{1.27'}$$

* См. [9], гл. III.

для $\varkappa_0 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi$, $|z| \geqslant 0$

$$\left|E_\rho\left(z;\ \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant \frac{M_2}{(1+|z|)^2}, \tag{1.28'}$$

где M_1 и M_2 не зависят от z.

Отметим еще, что, поскольку

$$E_1(z;\ 1) = e^z,$$

то, в случае $\mu = \rho = 1$, вместо оценок (1.27′) и (1.28′) следует пользоваться формулой

$$|E_1(z;\ 1)| \equiv e^{\operatorname{Re} z}, \tag{1.29}$$

справедливой во всей z-плоскости, откуда, в частности, вытекает оценка

$$|E_1(tz;\ 1)| \leqslant e^{-t} (\operatorname{Re} z \leqslant -1,\quad 0 \leqslant t < +\infty). \tag{1.30}$$

Но и в случае $\rho > 1$ нам необходимо установить аналогичную оценку для функции $E_\rho\left(t^{1/\rho} z;\ \frac{1}{\rho}\right)$, когда z принадлежит некоторой подобласти угла Δ_ρ^*.

Обозначим через $\Delta_\rho(-1)$ и $\Delta_\rho^*(-1)$ образы определенных уже выше взаимно дополнительных угловых областей Δ_ρ и Δ_ρ^* при линейном переносе их вершин из начала $z = 0$ в точку $z = -1$. Таким образом, очевидно, что

$$\overline{\Delta}_\rho \subset \Delta_\rho(-1),\quad \overline{\Delta}_\rho^*(-1) \subset \Delta_\rho^*. \tag{1.31}$$

Лемма 2. *Если $\rho > 1$, то справедлива оценка*

$$\left|E_\rho\left(t^{1/\rho} z;\ \frac{1}{\rho}\right)\right| < \frac{M|z|^{\rho-1}}{(1+t^{1/\rho})^2}\ (z \in \overline{\Delta}_\rho^*(-1),\ 0 \leqslant t < +\infty), \tag{1.32}$$

где $M > 0$ не зависит от z и t.

Доказательство. Ввиду того, что $\rho > 1$, область угла

$$\Delta_{\rho/2} = \left\{z;\ |\arg z| < \frac{\pi}{\rho},\quad 0 < |z| < +\infty\right\},$$

раствора $\frac{2\pi}{\rho} < 2\pi$, имеет своим дополнением область угла

$$\Delta_{\rho/2}^* = \left\{z;\ \frac{\pi}{\rho} < |\arg z| \leqslant \pi,\ 0 < |z| < +\infty\right\},$$

раствора $2\pi\left(1 - \frac{1}{\rho}\right)$.

Далее, поскольку $\rho > 1$, то в оценках (1.27′) и (1.28′) можно положить $\varkappa_0 = \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho}\right\} = \frac{\pi}{\rho}$.

В результате мы приходим к неравенствам

$$\left|E_\rho\left(t^{1/\rho} z;\ \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant M_1 (1 + |z|\, t^{1/\rho})^{\rho-1}\, e^{t \operatorname{Re} z^\rho} +$$

$$+\frac{M_2}{(1+|z|\,t^{1/\rho})^2};\ z\in\overline{\Delta}_{\rho/2},\ t\geqslant 0, \tag{1.33}$$

$$\left|E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\frac{1}{\rho}\right)\right|\leqslant\frac{M_2}{(1+|z|\,t^{1/\rho})^2};\ z\in\overline{\Delta}^*_{\rho/2},\ t\geqslant 0, \tag{1.34}$$

где M_1 и M_2 не зависят от z и t.

Представим теперь замкнутый угол $\overline{\Delta}^*_\rho(-1)$, где нам предстоит оценивать нашу функцию $E_\rho(t^{1/\rho}z;\ 1/\rho)$, в виде суммы двух множеств

$$\overline{\Delta}^*_\rho(-1)=g_1\cup g_2, \tag{1.35}$$

где g_1 и g_2 — соответственно означают пересечение $\overline{\Delta}^*_\rho(-1)$ с замкнутыми углами $\overline{\Delta}^*_{\rho/2}$ и $\overline{\Delta}_{\rho/2}$, т. е.

$$g_1=\overline{\Delta}^*_{\rho/2}\cap\overline{\Delta}^*_\rho(-1),\ g_2=\overline{\Delta}_{\rho/2}\cap\overline{\Delta}^*_\rho(-1). \tag{1.36}$$

Что касается множества g_1, то нетрудно убедиться, что оно ограничено ломаной, образованной отрезками

$$z=-1+re^{i\frac{\pi}{2\rho}}\left(0\leqslant r\leqslant 2\cos\frac{\pi}{2\rho}\right)\text{ и }z=-1+re^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\left(0\leqslant r\leqslant 2\cos\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

и исходящими из их концов $e^{\pm i\frac{\pi}{\rho}}$ лучами $\arg\left(z-e^{i\frac{\pi}{\rho}}\right)=\frac{\pi}{\rho}$ и $\arg\left(z-e^{-i\frac{\pi}{\rho}}\right)=-\frac{\pi}{\rho}$. При этом область g_1 не содержит начала $z=0$ и, как легко усмотреть,

$$\min_{z\in g_1}\{|z|\}=\sin\frac{\pi}{2\rho}. \tag{1.37}$$

Множество же g_2 состоит из двух отдельных компонент—угловых областей

$$g_2^{(+)}=\left\{z;\ \frac{\pi}{2\rho}\leqslant\arg\left(z-e^{i\frac{\pi}{\rho}}\right)\leqslant\frac{\pi}{\rho},\ 0\leqslant\left|z-e^{i\frac{\pi}{\rho}}\right|<+\infty\right\}, \tag{1.38'}$$

$$g_2^{(-)}=\left\{z;\ -\frac{\pi}{\rho}\leqslant\arg\left(z-e^{-i\frac{\pi}{\rho}}\right)\leqslant-\frac{\pi}{2\rho},\ 0\leqslant\left|z-e^{-i\frac{\pi}{\rho}}\right|<+\infty\right\}, \tag{1.38''}$$

раствора $\frac{\pi}{2\rho}$ с вершинами, расположенными в точках $e^{i\frac{\pi}{\rho}}$ и $e^{-i\frac{\pi}{\rho}}$ соответственно. Поэтому будем иметь

$$\min_{z\in g_2}\{|z|\}=1. \tag{1.39}$$

Ввиду (1.35) оценку функции $E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\frac{1}{\rho}\right)$ на $\overline{\Delta}^*_\rho(-1)$ можно свести к ее оценкам на множествах g_1 и g_2, причем, ввиду определения (1.36) этих множеств, мы можем соответственно воспользоваться неравенствами (1.34) и (1.33).

Поэтому из (1.34) и (1.37) следует оценка

$$\left|E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\frac{1}{\rho}\right)\right|<\frac{M_3}{(1+t^{1/\rho})^3}|z|^{\rho-1};\ z\in g_1,\ 0\leqslant t<+\infty,\tag{1.34'}$$

где $M_3=M_2\left|\sin\frac{\pi}{2\rho}\right|^{-3-\rho}$.

Поскольку вообще

$$\left|E_\rho\left(t^{1/\rho}\bar{z};\frac{1}{\rho}\right)\right|=\left|E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\frac{1}{\rho}\right)\right|,$$

а области $g_2^{(+)}$ и $g_2^{(-)}$ очевидно являются зеркальными отображениями друг друга относительно оси $\operatorname{Im} z=0$, то для оценки нашей функции на множестве $g_2=g_2^{(+)}\cup g_2^{(-)}$ достаточно лишь оценить ее в области угла $g_2^{(+)}$, воспользовавшись неравенством (1.33).

Для этого заметим сначала, что каждая точка $z\in g_2^{(+)}$ представима в виде

$$z=e^{i\frac{\pi}{\rho}}+re^{i\varphi}\left(\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{\rho},\ 0\leqslant r<+\infty\right)$$

и поэтому

$$\operatorname{Re} z^\rho=-\operatorname{Re}\left\{1+re^{i\left(\frac{\pi}{\rho}-\varphi\right)}\right\}^\rho.\tag{1.40}$$

С другой стороны, поскольку $0\leqslant\frac{\pi}{\rho}-\varphi\leqslant\frac{\pi}{2\rho}$, то каждая точка вида

$$w=1+re^{i\left(\frac{\pi}{\rho}-\varphi\right)}\left(\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{\rho},\ 0\leqslant r<+\infty\right)$$

очевидно принадлежит замкнутой области

$$\bar{\Delta}_\rho(1)=\left\{w;\ \left|\arg(w-1)\right|\leqslant\frac{\pi}{2\rho},\ 0\leqslant|w-1|<+\infty\right\}.$$

Но согласно лемме 1 имеет место включение

$$\bar{\Delta}_\rho(1)\subset\bar{D}_\rho(1)\equiv\bar{D}_\rho(0;1),$$

причем по определению (1.14) области $D_\rho(0;1)$

$$\operatorname{Re} w^\rho\geqslant 1\quad\text{при}\quad w\in\bar{D}_\rho(0;1).$$

Поэтому, в частности, имеем также

$$\operatorname{Re} w^\rho\geqslant 1\quad\text{при}\quad w\in\bar{\Delta}_\rho(1),$$

т. е.

$$\operatorname{Re}\left\{1+re^{i\left(\frac{\pi}{\rho}-\varphi\right)}\right\}^\rho\geqslant 1\left(\frac{\pi}{2\rho}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{\rho},\ 0\leqslant r<+\infty\right).\tag{1.41}$$

Из (1.40) и (1.41) вытекает, что

$$\operatorname{Re} z^{\rho} > -1, \quad z \in g_2^{(+)},$$

откуда, ввиду (1.39), из неравенства (1.33) приходим к оценке

$$\left|E_{\rho}\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant M_1 |z|^{\rho-1} (1+t^{1/\rho})^{\rho-1} e^{-t} +$$

$$+ \frac{M_2}{(1+t^{1/\rho})^2}; \; z \in g_2^{(+)}, \; 0 \leqslant t < +\infty.$$

Но так как

$$\max_{0 \leqslant t < +\infty} \{(1+t^{1/\rho})^{\rho-1} e^{-t}\} = c_{\rho} < +\infty,$$

то из этой оценки, в частности, вытекает

$$\left|E_{\rho}\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant \frac{C_{\rho} M_1 |z|^{\rho-1}}{(1+t^{1/\rho})^2} + \frac{M_2 |z|^{\rho-1}}{(1+t^{1/\rho})^2} =$$

$$= \frac{(C_{\rho} M_1 + M_2)}{(1+t^{1/\rho})^2} |z|^{\rho-1}; \; z \in g_2^{(+)}, \; 0 \leqslant t < +\infty.$$

Итак, на множестве $g_2 = g_2^{(+)} \cup g_2^{(-)}$ справедлива оценка

$$\left|E_{\rho}\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant \frac{M_4}{(1+t^{1/\rho})^2} |z|^{\rho-1}; \; z \in g_2, \; 0 \leqslant t < +\infty. \qquad (1.33')$$

Наконец, неравенство (1.32) леммы следует из (1.34′) и (1.33′), ввиду (1.35).

1.3. (а) Приведем сначала одно интегральное представление для ядра Коши.

Лемма 3*. *Для любого* $\rho > \frac{1}{2}$ *справедлива формула*

$$\int_0^{+\infty} e^{-\zeta t^{\rho}} E_{\rho}\left(z t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho - 1}\, dt = \frac{1}{\zeta - z}; \; z \in \Delta_{\rho}^{*}, \; \zeta \in \overline{\Delta}_{\rho}, \qquad (1.42)$$

*причем интеграл сходится абсолютно-равномерно*** *относительно переменных z и ζ, если*

$$z \in \overline{d_{\rho}^{*}} \quad \textit{и} \quad \zeta \in \overline{\Delta}_{\rho}, \qquad (1.43)$$

где d_{ρ}^{*} — любая ограниченная подобласть области Δ_{ρ}^{*}.

---

* См. [9], лемму 3.9, где рассмотрен более общий случай.

** Иными словами, в условиях (1.43) равномерно сходится не только интеграл (1.42), но и

$$\int_0^{+\infty} \left| e^{-\zeta t^{\rho}} E_{\rho}\left(z t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right)\right| t^{\frac{1}{\rho}-1}\, dt.$$

Доказательство. Пусть $d_\rho^* \subset \Delta_\rho^*$ — произвольная ограниченная область, а параметр $\varkappa_0 \in \left(\frac{\pi}{2\rho}, \min\left\{\pi, \frac{\pi}{\rho}\right\}\right)$ выбран настолько близким к $\frac{\pi}{2\rho}$, чтобы эта область лежала внутри угла

$$\{\varkappa_0 \leqslant |\arg z| \leqslant \pi, \quad 0 < |z| < +\infty\},$$

где, как известно, имеет место оценка (1.28′).

Поскольку

$$\min_{z \in \overline{d}_\rho^*} \{|z|\} = \delta_\rho > 0,$$

то, таким образом, из (1.28′) будем иметь

$$\left| E_\rho\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant \frac{M_2}{(1+\delta_\rho t^{1/\rho})^2}; \quad z \in \overline{d}_\rho^*, \ 0 \leqslant t < +\infty. \tag{1.28″}$$

С другой стороны, так как

$$\operatorname{Re} \zeta^\rho \geqslant 0, \ \zeta \in \overline{\Delta}_\rho,$$

то справедливо неравенство

$$\left| e^{-t\zeta^\rho} E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} \right| \leqslant \frac{M_2 t^{\frac{1}{\rho}-1}}{(1+\delta_\rho t^{1/\rho})^2}; \ z \in \overline{d}_\rho^*, \ \ \zeta \in \overline{\Delta}_\rho, \ 0 < t < +\infty,$$

где справа стоит интегрируемая на $(0, +\infty)$ функция, не зависящая от z и ζ.

Таким образом, интеграл (1.42) сходится в условиях (1.43) абсолютно-равномерно, определяя аналитическую функцию двух переменных при $z \in \Delta_\rho^*$ и $\zeta \in \overline{\Delta}_\rho$.

Пусть

$$\max_{z \in \overline{d}_\rho^*} \{|z|\} = \nu_1 > 0$$

и $\nu > \nu_1$ — произвольное фиксированное число. Докажем, что формула (1.42) справедлива по крайней мере при

$$z \in \overline{d}_\rho^*, \ \zeta \in \overline{D}_\rho(\nu) \subset \overline{\Delta}_\rho. \tag{1.44}$$

С этой целью число $\varepsilon\,(0 < \varepsilon < \nu)$ выберем так, чтобы

$$q = \left\{\frac{\nu_1}{\nu - \varepsilon}\right\}^{1/\rho} < 1. \tag{1.45}$$

Отметим далее формулу

$$\max_{0 < t < +\infty} \{t^{k/\rho} e^{-(\nu-\varepsilon)t}\} = \left\{\frac{k}{\rho(\nu-\varepsilon)}\right\}^{k/\rho} e^{-k/\rho}$$

и оценку

$$\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right) > (k\rho^{-1})^{\frac{k+1}{\rho}-\frac{1}{2}} e^{-\frac{k}{\rho}} \ (k \geqslant k_0),$$

вытекающую из формулы Стирлинга.

Учитывая (1.45), при $z \in \overline{d}^*$ теперь получим

$$\max_{0 \leqslant t < +\infty} \left| \frac{z^k t^{k/\rho}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} e^{-(\nu-\varepsilon)t} \right|^{\rho} \leqslant (k\rho^{-1})^{\frac{1}{2}-\frac{1}{\rho}} q^k (k > k_0).$$

Отсюда следует, что разложение

$$e^{-(\nu-\varepsilon)t} E_\rho\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k t^{k/\rho}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} e^{-(\nu-\varepsilon)t}$$

равномерно сходится относительно $z \in \overline{d}_\rho^*$ и $t \in [0, +\infty)$.

Однако, так как

$$\operatorname{Re} \zeta^\rho > \nu \quad \text{при} \quad z \in \overline{D}_\rho(\nu),$$

то разложение

$$e^{-t\zeta^\rho} E_\rho\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} e^{-t\zeta^\rho} t^{\frac{k+1}{\rho}+1}$$

при условии (1.44) допускает почленное интегрирование по t вдоль всей полуоси $[0, +\infty)$.

В силу известной формулы

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\zeta^\rho} t^{\frac{k+1}{\rho}-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}{\zeta^{k+1}} \quad (\operatorname{Re} \zeta^\rho > 0,\ k \geqslant 0)$$

в условиях (1.44) справедливы равенства

$$\int_0^{+\infty} e^{-t\zeta^\rho} E_\rho\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} \int_0^{+\infty} e^{-t\zeta^\rho} t^{\frac{k+1}{\rho}-1} dt = \zeta^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k = \frac{1}{\zeta - z},$$

поскольку

$$|\zeta| \geqslant |\operatorname{Re} \zeta^\rho|^{\frac{1}{\rho}} \geqslant \nu^{\frac{1}{\rho}} > \nu_1^{\frac{1}{\rho}} \geqslant |z|.$$

Итак, в условиях (1.44) формула (1.42) установлена.

Наконец, отметим, что как левая, так и правая части формулы (1.42) являются аналитическими функциями от z и ζ при $z \in \Delta_\rho^*$ и $\zeta \in \Delta_\rho$. Поэтому аналитическим продолжением из $d_\rho^* \subset \Delta_\rho^*$ в Δ_ρ^* относительно переменной z и из $D_\rho(\nu) \subset \Delta_\rho$ в Δ_ρ — относительно переменной ζ заключаем, что представление (1.42) справедливо при $z \in \Delta_\rho^*$ и $\zeta \in \overline{\Delta}_\rho$.

(б) Условимся считать, что контур

$$L_\rho \equiv L_\rho(0;\,0) = \left\{\zeta;\ |\arg\zeta| = \frac{\pi}{2\rho},\ 0 < |\zeta| < +\infty\right\}$$

взаимно-дополнительных угловых областей Δ_ρ и Δ_ρ^* обходится в положительном направлении относительно области Δ_ρ^*.

Теорема 1. *Пусть функция $F(z)$ голоморфна внутри и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta}_\rho^*\left(\rho > \frac{1}{2}\right)$, причем в окрестности точки $z = \infty$ удовлетворяет условию: при $r \to +\infty$*

$$\max_{\frac{\pi}{2\rho} \leq |\varphi| \leq \pi} \{|F(re^{i\varphi})|\} = O(r^{-\omega}),\ \omega > 1. \tag{1.46}$$

Тогда функция $F(z)$ допускает интегральное представление вида

$$F(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(t^{1/\rho} z;\ \frac{1}{\rho}\right)\varphi(t)\, t^{\frac{1}{\rho}-1}\, dt,\quad z \in \Delta_\rho^*, \tag{1.47}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} e^{-t\zeta^\rho} F(\zeta)\, d\zeta,\quad t \in [0,\ +\infty). \tag{1.48}$$

Доказательство. Пользуясь условием (1.46), обычным способом предельного перехода легко установить, что функция $F(z)$ в области Δ_ρ^* представима интегралом Коши

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,\quad z \in \Delta_\rho^*. \tag{1.49}$$

Заметим однако, что, согласно лемме 3, представление (1.42) ядра Коши $1/\zeta - z$ имеет место для $\zeta \in \overline{\Delta}_\rho$ и в частности для $\zeta \in L_\rho$ при каждом фиксированном $z \in \Delta_\rho^*$. Поэтому формулу (1.49) можно записать также в форме

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} F(\zeta)\left\{\int_0^{+\infty} e^{-t\zeta^\rho} E_\rho\left(t^{1/\rho} z;\ \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1}\, dt\right\} d\zeta,\quad z \in \Delta_\rho^*. \tag{1.50}$$

Обозначая далее

$$\Phi(z;\zeta;\ t) = e^{-t\zeta^\rho} E_\rho\left(t^{1/\rho} z;\ \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} F(\zeta),$$

формулу (2.50) можно переписать в виде

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} d\zeta \int_0^{+\infty} \Phi(z;\ \zeta;\ t)\, dt,\quad z \in \Delta_\rho^*. \tag{1.50'}$$

Отметим теперь, что, в силу оценки (1.28′), для любой фиксированной точки $z\in\Delta_\rho^*$

$$\left|E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\ \frac{1}{\rho}\right)\right|\leqslant\frac{M_2}{(1+|z|\,t^{1/\rho})^2},\ 0\leqslant t<+\infty,$$

откуда следует, что

$$\int_0^{+\infty}\left|E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\ \frac{1}{\rho}\right)\right|t^{\frac{1}{\rho}-1}dt<+\infty,\ z\in\Delta_\rho^*. \tag{1.51}$$

Далее, в силу условия (1.46) теоремы, имеем также

$$\int_{L_\rho}|F(\zeta)|\,|d\zeta|<+\infty, \tag{1.52}$$

откуда и из (1.51), ввиду того, что

$$|e^{-t\zeta^\rho}|=1;\ \zeta\in L_\rho,\quad t\in[0,\ +\infty),$$

приходим к заключению, что повторный интеграл

$$\int_{L_\rho}|d\zeta|\int_0^{+\infty}|\Phi(z;\ \zeta;\ t)|\,dt \tag{1.53}$$

существует при любом $z\in\Delta_\rho^*$.

С другой стороны, поскольку при $\zeta\in L_\rho$ и $t\in(0,\ +\infty)$

$$|\Phi(z;\ \zeta;\ t)|=\left|E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\ \frac{1}{\rho}\right)\right|t^{\frac{1}{\rho}-1}\,|F(\zeta)|,$$

причем очевидно, что

$$\sup_{\zeta\in L_\rho}|F(\zeta)|<+\infty,$$

то из (1.51) и (1.52) приходим к выводу, что интегралы

$$\int_{L_\rho}\Phi(z;\ \zeta;\ t)\,d\zeta\ \text{и}\ \int_0^{+\infty}\Phi(z;\ \zeta;\ t)\,dt,\ \ z\in\Delta_\rho^* \tag{1.54}$$

равномерно сходятся: первый—относительно t в любом конечном интервале $(\delta,\ R)$ $(0<\delta<R<+\infty)$, а второй—относительно ζ на всем контуре L_ρ.

Из отмеченных здесь свойств интегралов (1.53) и (1.54) на основании известной теоремы анализа вытекает, что в представлении (1.50′) можно поменять порядок интегрирования.

Таким образом, получим

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}dt\int_{L_\rho}\Phi(z;\ \zeta;\ t)\,d\zeta,\ z\in\Delta_\rho^*, \tag{1.55}$$

откуда, пользуясь обозначением (1.48), приходим к представлению (1.47)—(1.48) теоремы.

(в) Ниже мы будем опираться на следующую теорему относительно целых функций конечного роста.

Теорема B*. *Пусть*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)} z^k \tag{1.56}$$

— целая функция порядка ρ $\left(\frac{1}{2} < \rho < +\infty\right)$ *и типа* σ $0 < \sigma < +\infty)$.

Тогда

1°. *Ряд*

$$g(\zeta; f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{\zeta^{k+1}} \tag{1.57}$$

сходится и представляет аналитическую функцию в области $|\zeta| > \sigma^{1/\rho}$.

2°. *Для любого* $\vartheta \in (-\pi, \pi]$ *справедливо интегральное представление*

$$g(\zeta; f) \equiv g_\vartheta(\zeta) = e^{-i\vartheta} \int_0^{+\infty} e^{-v(e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho} f(v^{1/\rho} e^{-i\vartheta})\, v^{\frac{1}{\rho}-1}\, dv, \ \zeta \in D_\rho(\vartheta; \sigma). \tag{1.58}$$

3°. *Если*

$$\sup_{0 < r < +\infty} \{|f(re^{-i\vartheta})|\} < +\infty, \tag{1.59}$$

то функция $g(\zeta; f)$ *аналитически продолжается из области* $D_\rho(\vartheta; \sigma)$ *в область* $\Delta(\rho; \vartheta) \equiv D_\rho(\vartheta; 0) \supset D_\rho(\vartheta; \sigma)$, *где представление* (1.58) *остается в силе.*

Имеет место

Теорема 2. *Пусть* $f(z)$ *— целая функция порядка* $\rho > \frac{1}{2}$ *и типа* σ $(0 < \sigma < +\infty)$, *удовлетворяющая условию*

$$\max_{\frac{\pi}{2\rho} < |\varphi| < \pi} \{|f(re^{i\varphi})|\} = O(r^{-\omega}), \quad \omega > \max\left\{1, \frac{1}{\rho}\right\}. \tag{1.60}$$

Тогда справедлива интегральная формула

$$f(z) = \int_0^\sigma E_\rho\left(t^{1/\rho} z; \frac{1}{\rho}\right) \varphi(t)\, t^{\frac{1}{\rho}-1}\, dt, \tag{1.61}$$

где функция $\varphi(t)$ *непрерывна на* $[0, \sigma]$ *и определяется из соотношения*

---

* См. [9], теорему 6.5 для случая $\mu = \frac{1}{\rho}$.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} e^{-t\zeta^\rho} f(\zeta)\,d\zeta = \begin{cases}\varphi(t), & t\in[0,\sigma],\\ 0, & t\in[\sigma,+\infty].\end{cases} \tag{1.62}$$

Доказательство. Поскольку функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то она допускает представление

$$f(z)=\int_0^{+\infty} E_\rho\left(t^{1/\rho}z;\frac{1}{\rho}\right)\varphi(t)\,t^{\frac{1}{\rho}-1}\,dt,\ z\in\Delta_\rho^*, \tag{1.63}$$

где функция

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} e^{-t\zeta^\rho} f(\zeta)\,d\zeta,\ t\in[0,+\infty), \tag{1.64}$$

очевидно, непрерывна на полуоси $[0,+\infty)$.

Таким образом, теорема будет доказана, если будет установлено, что в рассматриваемом случае, когда $f(z)$ — целая функция порядка $\rho>\frac{1}{2}$ и типа σ, интеграл (1.64) равен нулю всюду на полуоси $[0,+\infty)$.

Чтобы установить этот факт, заметим, что по принятому нами условию в интеграле (1.64) контур L_ρ пробегается в положительном направлении относительно области Δ_ρ^* и состоит из двух лучей

$$L_\rho^{(\pm)}=\left\{\zeta;\ \arg\zeta=\pm\frac{\pi}{2\rho},\ 0\leqslant|\zeta|<+\infty\right\}.$$

Поэтому интеграл (1.64) может быть записан в виде суммы

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho} e^{-t\zeta^\rho} f(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{2\pi\rho i}\left\{e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\int_0^{+\infty} e^{-itv} f\left(v^{1/\rho}e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right)v^{1/\rho-1}\,dv-\right.$$

$$\left.-e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\int_0^{+\infty} e^{itv} f\left(v^{1/\rho}e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right)v^{1/\rho-1}\,dv\right\}, \tag{1.65}$$

если на лучах $L_\rho^{(\pm)}$ произвести замену переменного интегрирования, соответственно положив $\zeta=e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}v^{1/\rho}$.

Заметим далее, что по условию (1.60) теоремы целая функция $f(z)$ не только удовлетворяет условию (1.59) теоремы B (3°), но и, кроме того

$$\int_0^{+\infty}\left|f\left(v^{1/\rho}e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}}\right)\right|v^{1/\rho-1}\,dv<+\infty. \tag{1.66}$$

Отсюда, во-первых, согласно теореме B (3°) следует, что функция $g(\zeta; f)$ аналитически продолжается в каждую из угловых областей

$\Delta\left(\rho;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $\Delta\left(\rho;\ -\frac{\pi}{2\rho}\right)$, где соответственно справедливы представления

$$g(\zeta; f) \equiv g_{\frac{\pi}{2\rho}}(\zeta) = e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \int\limits_0^{+\infty} e^{iv\zeta^\rho} f\left(v^{1/\rho} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right) v^{1/\rho-1}\, dv,\ \zeta \in \Delta\left(\rho;\ \frac{\pi}{2\rho}\right), \tag{1.67'}$$

$$g(\zeta; f) \equiv g_{-\frac{\pi}{2\rho}}(\zeta) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-iv\zeta^\rho} f\left(v^{1/\rho} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right) v^{1/\rho-1}\, dv,\ \zeta \in \Delta\left(\rho;\ -\frac{\pi}{2\rho}\right). \tag{1.67''}$$

Но, как нетрудно проверить, справедливы неравенства

$$|e^{iv\zeta^\rho}| \leqslant 1;\ 0 \leqslant v < +\infty,\ \zeta \in \bar{\Delta}\left(\rho;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

и

$$|e^{-iv\zeta^\rho}| \leqslant 1;\ 0 \leqslant v < +\infty,\ \zeta \in \bar{\Delta}\left(\rho;\ -\frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Отсюда, с учетом (1.66), в представлениях (1.67′) и (1.67″) интегралы абсолютно и равномерно сходятся в соответственных замкнутых областях $\bar{\Delta}\left(\rho;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $\bar{\Delta}\left(\rho;\ -\frac{\pi}{2\rho}\right)$. Но тогда можно утверждать, что функция $g(\zeta; f)$ аналитична внутри и непрерывна в каждой из замкнутых областей $\bar{\Delta}\left(\rho;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $\bar{\Delta}\left(\rho;\ -\frac{\pi}{2\rho}\right)$, где ее представления (1.67′) и (1.67″) останутся в силе. В частности, поскольку области $\bar{\Delta}\left(\rho;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)$ и $\bar{\Delta}\left(\rho;\ -\frac{\pi}{2\rho}\right)$ примыкают друг к другу вдоль всей полуоси $[0, +\infty)$, то одновременно будем иметь

$$g_{\frac{\pi}{2\rho}}(t^{1/\rho}) = e^{-i\frac{\pi}{2\rho}} \int\limits_0^{+\infty} e^{ivt} f\left(v^{1/\rho} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}\right) v^{1/\rho-1}\, dv,\ 0 \leqslant t < +\infty$$

и

$$g_{-\frac{\pi}{2\rho}}(t^{1/\rho}) = e^{i\frac{\pi}{2\rho}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-ivt} f\left(v^{1/\rho} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}\right) v^{1/\rho-1}\, dv,\ 0 \leqslant t + \infty.$$

Ввиду этого формулу (1.65) можно записать также в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\rho} e^{-t\zeta^\rho} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi\rho i} \{g_{\frac{\pi}{2\rho}}(t^{1/\rho}) - g_{-\frac{\pi}{2\rho}}(t^{1/\rho})\}\ (0 \leqslant t < +\infty), \tag{1.68}$$

С другой стороны, согласно теореме B (2°) функция $g(\zeta; f)$ голоморфна в области $|\zeta| > \sigma^{1/\rho}$, и, поскольку

$$g_{\frac{\pi}{2\rho}}(\zeta) \equiv g(\zeta; f),\quad \zeta \in \bar{\Delta}\left(\rho;\ \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

и

$$g_{-\frac{\pi}{2\rho}}(\zeta) \equiv g(\zeta; f), \ \zeta \in \overline{\Delta}\left(\rho; -\frac{\pi}{2\rho}\right),$$

то имеем также

$$g_{\frac{\pi}{2\rho}}(\zeta) \equiv g_{-\frac{\pi}{2\rho}}(\zeta), \ \zeta \in [\sigma^{1/\rho}, +\infty). \tag{1.69}$$

Наконец, из (1.68), (1.69) и (1.64) вытекает формула (1.62), чем и (в силу (1.63)) завершается доказательство теоремы.

1.4. (а) Приведем теперь формулировку одной теоремы об обращении интегрального преобразования с ядром Миттаг-Леффлера, а затем докажем две леммы о поведении в комплексной области и о единственности преобразований такого рода.

Теорема 1*. *Пусть параметры* ρ *и* μ *подчинены условиям*

$$\frac{1}{2} \leqslant \rho < +\infty, \ \frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}, \tag{1.70}$$

и $\varphi(x)$*—произвольная функция из класса* $L_2(0, +\infty)$.

Тогда, обозначая

$$g^{(\pm)}(r; \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \int_0^{\sigma} E_\rho\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} r^{1/\rho} t^{1/\rho}; \mu\right) t^{\mu-1} \varphi(t)\, dt \quad (\sigma > 0), \tag{1.71}$$

будем иметь:

1°. *Существуют функции* $g^{(\pm)}(r)$ *из класса* $g^{(\pm)}(r)\, r^{\mu-1} \in \in L_2(0, +\infty)$ *и такие, что на полуоси* $(0, +\infty)$

$$g^{(\pm)}(r)\, r^{\mu-1} = \underset{\sigma\to+\infty}{\text{l.i.m.}}\ g^{(\pm)}(r; \sigma)\, r^{\mu-1}. \tag{1.72}$$

2°. *Почти всюду на полуоси* $0 < x < +\infty$ *справедлива формула обращения*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ixr}-1}{-ir} g^{(+)}(r)\, r^{\mu-1}\, dr + \right.$$
$$\left. + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \cdot \frac{d}{dx} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixr}-1}{ir} g^{(-)}(r)\, r^{\mu-1}\, dr \right\}. \tag{1.73}$$

Докажем теперь лемму.

Лемма 4. *Пусть функция* $\varphi(t)$ *ограничена и непрерывна на полуоси* $[0, +\infty)$ *и*

$$\Phi_\rho(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} \varphi(t)\, dt \qquad (\rho \geqslant 1) \tag{1.74}$$

— ее преобразование с ядром Миттаг-Леффлера. Тогда имеют место утверждения:

* См. [9], теорему 4.5.

1°. *Если $\rho = 1$, то функция $\Phi_1(z)$ аналитическая в полуплоскости $\Delta_1^* = \{z;\ \mathrm{Re}\, z < 0\}$.*

2°. *Если $\rho > 1$, то при дополнительном условии $\varphi(t) \in L(0, +\infty)$ функция $\Phi_\rho(z)$ аналитична внутри и непрерывна в замкнутой области угла $\overline{\Delta}_\rho^*$ (кроме, быть может, точки $z = \infty$), где всюду справедливо представление* (1.74).

Доказательство. 1°. При $\rho = 1$ интеграл (1.74) сводится к преобразованию Лапласа функции $\varphi(t)$

$$\Phi_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{zt} \varphi(t)\, dt, \quad z \in \Delta_1^*. \tag{1.75}$$

Поэтому очевидно, что интеграл $\Phi_1(z)$ абсолютно-равномерно сходится* в любой полуплоскости

$$\Delta_1^*(-\nu) = \{z;\ \mathrm{Re}\, z \leqslant -\nu\} \quad (\nu > 0),$$

представляя функцию, аналитическую во всей полуплоскости Δ_1^*.

2°. Как легко следует из оценок (1.27′) и (1.28′) [1.2 (в)], при $z \in \overline{\Delta}_\rho^*$

$$\left| E_\rho\left(z; \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant M_1 (1 + |z|)^{\rho - 1} + \frac{M_2}{(1+|z|)^2}, \tag{1.76}$$

где $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ — постоянные.

Обозначим теперь через $\overline{\Delta}_{\rho, R}^*$ $(R > 0)$ пересечение замкнутого угла $\overline{\Delta}_\rho^*$ с кругом $|z| \leqslant R$. Тогда, поскольку $\rho > 1$, из (1.76) будет следовать оценка

$$\left| E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant M_3 (1 + Rt^{1/\rho})^{\rho - 1}, \quad z \in \overline{\Delta}_{\rho, R}^*, \quad 0 \leqslant t < +\infty, \tag{1.77}$$

где $M_3 > 0$ не зависит от z и t.

Наконец, так как, очевидно, в условиях леммы

$$(1 + Rt^{1/\rho})^{\rho - 1}\, t^{1/\rho - 1} \varphi(t) \in L \quad (0, +\infty),$$

то из (1.77) вытекает, что интеграл $\Phi_\rho(z)$ $(\rho > 1)$ сходится абсолютно-равномерно в каждой области $\overline{\Delta}_{\rho, R}^*$ $(R > 0)$, определяя таким образом функцию с требуемыми свойствами и представлением (1.74), справедливым во всей области $\overline{\Delta}_\rho^*$, кроме, быть может, точки $z = \infty$.

Лемма 5. *Пусть функция $\varphi(t)$ ограничена и непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$ и $\Phi_\rho(z)$ $(\rho \geqslant 1)$ — ее преобразование с ядром Миттаг-Леффлера* (1.74).

Положим далее, что при $\rho > 1$ функция $\varphi(t)$ одновременно входит в оба класса $L_1(0, +\infty)$ и $L_2(0, +\infty)$.

Если при этом

$$\Phi_\rho(z) \equiv 0, \quad z \in \Delta_\rho^*, \tag{1.78}$$

---

* См. примечание на стр. 35.

то будет также

$$\varphi(t) \equiv 0, \quad 0 \leqslant t < +\infty. \tag{1.79}$$

Доказательство. Если $\rho = 1$, то, как уже отмечалось выше, $\Phi_1(z)$ сводится к преобразованию Лапласа (1.75) ограниченной на $[0, +\infty)$ функции $\varphi(t)$ и, таким образом, согласно (1.78)

$$\Phi_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{zt} \varphi(t)\, dt \equiv 0, \quad z \in \Delta_1^*.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что

$$\Phi_1(-1+iy) = \int_0^{+\infty} [e^{-t}\varphi(t)]\, e^{iyt}\, dt \equiv 0, \quad -\infty < y < +\infty$$

и, поскольку $e^{-t}\varphi(t) \in L(0, +\infty)$, то $e^{-t}\varphi(t) \equiv \varphi(t) \equiv 0$, ввиду единственности преобразования Фурье непрерывной интегрируемой функции.

Положив теперь $\rho > 1$, согласно лемме 4 заключаем, что тождество (1.78) имеет место в замкнутой области угла $\overline{\Delta_\rho^*}$ и, следовательно, в частности, на ее граничных лучах $z = e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} y^{1/\rho}$ $(0 \leqslant y < +\infty)$.

Итак, соответственно мы будем иметь

$$\Phi_\rho\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} y^{1/\rho}\right) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} y^{1/\rho} t^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} \varphi(t)\, dt \equiv 0 \ \ (0 \leqslant y < +\infty), \tag{1.80}$$

причем интегралы эти равномерно сходящиеся относительно параметра y в каждом конечном промежутке $[0, R]$ $(0 < R < +\infty)$.

Заметим теперь, что для любого $\varkappa > 0$ справедлива формула

$$D_0^{-\varkappa}\left\{E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) r^{1/\rho - 1}\right\} = \frac{1}{\Gamma(\varkappa)} \int_0^r (r-y)^{\varkappa-1} E_\rho\left(\lambda y^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) y^{\frac{1}{\rho}-1}\, dy =$$

$$= E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho} + \varkappa\right) y^{1/\rho + \varkappa - 1}, \quad r > 0,$$

что легко проверить путем непосредственного интегрирования разложения функции $E_\rho\left(\lambda y^{1/\rho};\ \dfrac{1}{\rho}\right)$.

Отсюда, в частности, получим при $\varkappa = \dfrac{\rho - 1}{2\rho} > 0$

$$D_0^{-\varkappa}\left\{E_\rho\left(\lambda r^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) r^{\frac{1}{\rho}-1}\right\} = E_\rho(\lambda r^{1/\rho};\ \mu)\, r^{\mu-1}, \quad \mu = \frac{\rho+1}{2\rho}. \tag{1.81}$$

Умножим теперь наши тождества (1.80) на $y^{\frac{1}{\rho}-1}$ и применим к ним оператор $D_0^{-\varkappa}$, где $\varkappa = \dfrac{\rho - 1}{2\rho}$. Заметив при этом, что ввиду характера их сходимости оператор $D^{-\alpha}$ можно ввести под знак интегралов (1.80), в силу формулы (1.81) мы приходим к тождествам

$$r^{\mu-1}\int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} r^{1/\rho} t^{1/\rho};\ \mu\right) t^{\mu-1}\varphi(t)\,dt \equiv 0,\ r\in(0, +\infty), \tag{1.82}$$

где $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$.

Пользуясь обозначениями теоремы Г, ввиду (1.82) можно утверждать, что существуют пределы в обычном смысле

$$g^{(\pm)}(r) = \lim_{\sigma\to+\infty} g^{(\pm)}(r;\ \sigma) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}}\int_0^{+\infty} E_\rho\left(e^{\pm i\frac{\pi}{2\rho}} r^{1/\rho} t^{1/\rho};\ \mu\right) t^{\mu-1}\varphi(t)\,dt \equiv 0,\ r\in(0, +\infty). \tag{1.82'}$$

Поскольку $\varphi(t)\in L_1(0, +\infty)$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, то из (1.82′) приходим к тождеству $\varphi(x)\equiv 0$ $(0\leqslant x < +\infty)$, согласно формуле обращения (1.73) теоремы Г.

§ 2. Дифференциальные операторы дробного порядка

2.1, (а) Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L(0, l)$ $(0 < l < +\infty)$. Тогда при данном α $(0 < \alpha < +\infty)$ функцию

$$D_0^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\,dt,\ x\in(0, l) \tag{2.1}$$

принято называть *интегралом от $f(x)$ порядка α в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке $x = 0$.*

Как известно*, при данном α $(0 < \alpha < 1)$ функция $D_0^{-\alpha} f(x)$ определена почти всюду на $(0, l)$ и вновь принадлежит классу $L(0, l)$, а при $1\leqslant\alpha < +\infty$, очевидно, что эта функция непрерывна всюду на $[0, l]$.

Доказывается, что во всех точках Лебега функции $f(x)$

$$\lim_{\alpha\to+0} D_0^{-\alpha} f(x) = f(x).$$

Поэтому естественно интеграл нулевого порядка $D_0^{-0} f(x)$ отождествлять с самой функцией и положить

$$[D_0^{-\alpha} f(x)]_{\alpha=0} = f(x). \tag{2.1'}$$

Аналогично *интегралом от $f(x)\in L(0, l)$ порядка* α $(0 < \alpha < +\infty)$ *с концом в точке $x = l$* называют функцию

---

* См., напр., [9], гл. IX.

$$D_l^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_x^l (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \ x \in (0, l), \tag{2.2}$$

причем естественно положить

$$[D_l^{-\alpha} f(x)]_{\alpha=0} = f(x), \ x \in (0, l), \tag{2.2'}$$

так как и в этом случае устанавливается, что

$$\lim_{\alpha \to +0} D_l^{-\alpha} f(x) = f(x)$$

во всех точках Лебега функции $f(x)$.

Предположим теперь, что функция $f(x) \in L(0, l)$ такова, что при данном α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ интегралы Римана-Лиувилля

$$D_0^{-(1-\alpha)} f(x) \quad \text{и} \quad D_l^{-(1-\alpha)} f(x)$$

почти всюду на $(0, l)$ обладают производными, причем не обязательно суммируемыми. Тогда функции

$$D_0^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} \equiv \frac{d}{dx} D_0^{-(1-\alpha)} f(x) \tag{2.3}$$

и

$$D_l^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{\alpha} f(x)}{d(l-x)^{\alpha}} \equiv \frac{d}{dx} D_l^{-(1-\alpha)} f(x) \tag{2.4}$$

называются *производными порядка* α *от* $f(x)$ *с началом в точке* $x = 0$ *и, соответственно, с концом в точке* $x = l$.

При этом отметим, что, ввиду (2.1′) и (2.2′), будем иметь

$$D_0^1 f(x) = D_l^1 f(x) = f'(x). \tag{2.5}$$

Таким образом, операторы $D_0^{-\alpha} f(x)$ и $D_l^{-\alpha} f(x)$ определены для любого значения параметра α $(-1 \leqslant \alpha < +\infty)$.

В частности, заметив, что при $\gamma > -1$ $x^{\gamma} \in L(0, l)$, непосредственным подсчетом получим, что для любого α $(-1 \leqslant \alpha < +\infty)$

$$D_0^{-\alpha} \left\{ \frac{x^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)}, \ x \in (0, +\infty) \tag{2.6}$$

и

$$D_l^{-\alpha} \left\{ \frac{(l-x)^{\gamma}}{\Gamma(1+\gamma)} \right\} = \frac{(l-x)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)}, \ x \in (0, l). \tag{2.7}$$

(б) Отметим два важных свойства интегралов Римана-Лиувилля.

1°. *Пусть* $f(x) \in L(0, l)$, *а числа* α_1 $(0 \leqslant \alpha_1 < +\infty)$ *и* α_2 $(0 \leqslant \alpha_2 < +\infty)$ — *произвольны. Тогда почти всюду на* $(0, l)$, *а в случае* $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 1$ *всюду на* $[0, l]$ *справедливы равенства*

$$\begin{gathered} D_0^{-\alpha_2} D_0^{-\alpha_1} f(x) = D_0^{-\alpha_1} D_0^{-\alpha_2} f(x) = D_0^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x), \\ D_l^{-\alpha_1} D_l^{-\alpha_2} f(x) = D_l^{-\alpha_2} D_l^{-\alpha_1} f(x) = D_l^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x). \end{gathered} \tag{2.8}$$

В самом деле, например, имеем

$$D_0^{-\alpha_2} D_0^{-\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x (x - t_2)^{\alpha_2 - 1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_2} (t_2 - t_1)^{\alpha_1 - 1} f(t_1)\, dt_1 \right\} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x f(t_1) \left\{ \int_{t_1}^x (x - t_2)^{\alpha_2 - 1} (t_2 - t_1)^{\alpha_1 - 1}\, dt_2 \right\} dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_0^x (x - t_1)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} f(t_1)\, dt_1 = D_0^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} f(x).$$

При этом, в силу теоремы Фубини, почти для всех $x \in (0, l)$ произведенные выше операции допустимы.

Вполне аналогично получим также

$$D_l^{-\alpha_2} D_l^{-\alpha_1} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_x^l (t_2 - x)^{\alpha_2 - 1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_2}^l (t_1 - t_2)^{\alpha_1 - 1} f(t_1)\, dt_1 \right\} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_x^l f(t_1) \left\{ (x - t_2)^{\alpha_2 - 1} (t_1 - t_2)^{\alpha_1 - 1}\, dt_2 \right\} dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_x^l (t_1 - x)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} f(t_1)\, dt_1 = D_l^{-(\alpha_1 + \alpha_2)} f(x).$$

Так как при $\alpha_1 + \alpha_2 \geqslant 1$ правые части формул (2.8) являются непрерывными функциями на $[0, l]$, то наши утверждения доказаны.

2°. *Пусть* $f_k(x) \in L(0, l)$ $(k = 1, 2)$ *и для данного значения* α $(0 < \alpha < +\infty)$

$$f_1(x) D_l^{-\alpha} f_2(x) \in L(0, l). \tag{2.9}$$

Тогда имеет место формула

$$\int_0^l f_1(x) D_l^{-\alpha} f_2(x)\, dx = \int_0^l f_2(x) D_0^{-\alpha} f_1(x)\, dx. \tag{2.10}$$

В самом деле

$$\int_0^l f_1(x) D_l^{-\alpha} f_2(x)\, dx = \int_0^l f_1(x) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^l (t - x)^{\alpha - 1} f_2(t)\, dt \right\} dx =$$

$$= \int_0^l f_2(t) \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - x)^{\alpha - 1} f_1(x)\, dx \right\} dt = \int_0^l f_2(t)\, D_0^{-\alpha} f_1(t)\, dt,$$

причем замена порядка интегрирования допустима, ввиду условия (2.9), согласно теореме Фубини.

(в) Известно, что функции вида

$$x^{\mu-1} E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu)\quad (\rho>0,\ \mu>0),$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma\left(\mu+\frac{k}{\rho}\right)}\tag{2.11}$$

—целая функция типа Миттаг-Леффлера порядка ρ и типа 1, а λ-произвольный, вообще говоря, комплексный параметр, являются решениями задач типа задачи Коши для специальных дифференциальных операторов дробного порядка [13, 14].

В частности, полагая, что $\rho\geqslant 1$ и обозначая

$$\alpha=1-\frac{1}{\rho}\quad (0\leqslant\alpha<1),\tag{2.12}$$

для функции

$$\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)=E_\rho\left(\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{\frac{1}{\rho}-1}\tag{2.13}$$

можно утверждать следующее:

3°. *Функция* $\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)$ *является решением следующей задачи типа Коши на полуоси* $[0,+\infty)$:

$$D_0^{1/\rho}y(x)-\lambda y(x)=0,\tag{2.14}$$

$$D_0^{-\alpha}y(x)|_{x=0}=1.\tag{2.15}$$

В самом деле, в силу формул (2.6) и (2.12) будем иметь

$$D_0^{-\alpha}\,\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k D_0^{-\alpha}\left\{\frac{x^{\frac{k+1}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}\right\}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{k/\rho}}{\Gamma\left(1+\frac{k}{\rho}\right)}=E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ 1),\tag{2.16}$$

откуда следует, что для функции $\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)$ выполняется начальное условие (2.15).

Наконец, из (2.17) получим далее

$$D_0^{1/\rho}\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)\equiv\frac{d}{dx}D_0^{-\alpha}\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{\frac{k}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{\rho}\right)}=$$

$$=\lambda x^{\frac{1}{\rho}-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k x^{k/\rho}}{\Gamma\left(\frac{k+1}{\rho}\right)}=\lambda\,E_\rho\left(\lambda x^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{1/\rho-1}=\lambda\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda).$$

Отметим в заключение, что решение $\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)$ задачи (2.14)—(2.15) будет единственным [14] в классе функций $L(0,\ l)$ при любом $l<+\infty$.

(г) Определения интеграла $D_l^{-\alpha} f(x)$ $(0<\alpha<+\infty)$ и производной $D_l^{\alpha} f(x)$ $(0<\alpha<1)$ с концом в точке $x=l$ могут быть распространены на случай, когда $l=+\infty$.

А именно, если функция $f(x)$ определена и измерима на полуоси $(0, +\infty)$, то, в предположении их существования, почти всюду на $(0, +\infty)$ можно ввести в рассмотрение функции

$$D_{\infty}^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt \quad (0<\alpha<+\infty) \tag{2.17}$$

и

$$D_{\infty}^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1-\alpha)} f(x) \quad (0<\alpha\leqslant 1). \tag{2.18}$$

Функции эти принято называть, соответственно, *интегралом и производной от $f(x)$ по Вейлю порядка α.*

Простейшее условие, обеспечивающее существование интеграла $D_{\infty}^{-\alpha} f(x)$ $(0<\alpha<+\infty)$, заключается в следующем:

Если $x^{\alpha} f(x) \in L(0, +\infty)$, то интеграл $D_{\infty}^{-\alpha} f(x)$ существует почти всюду на $(0, +\infty)$ и принадлежит $L(0, +\infty)$.

В самом деле, имеем

$$\int_0^{+\infty} |D_{\infty}^{-\alpha} f(x)|\, dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} |f(t)|\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} |f(t)| \left\{ \int_0^t (t-x)^{\alpha-1} dx \right\} dt = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha} |f(t)|\, dt < +\infty,$$

причем замена порядка интегрирования допустима согласно теореме Фубини.

Если не только $f(x) \in L(0, +\infty)$, но и $x^{\alpha} f(x) \in L(0, +\infty)$ при некотором $\alpha>0$, то можно установить, что

$$\lim_{\alpha \to +0} D_{\infty}^{-\alpha} f(x) = f(x)$$

во всех точках Лебега функции $f(x)$.

Поэтому и в случае интегралов $D_{\infty}^{-\alpha} f(x)$ естественно положить

$$[D_{\infty}^{-\alpha} f(x)]_{\alpha=0} = f(x). \tag{2.17'}$$

Отсюда, в силу (2.18), будем иметь

$$D_{\infty}^{1} f(x) = f'(x), \tag{2.19}$$

т. е. оператор D_{∞}^{1} совпадает с оператором обычного дифференцирования.

(д) Отметим теперь свойства операторов $D_{\infty}^{-\alpha}$ $(0\leqslant\alpha<+\infty)$, аналогичные свойствам 1° и 2°.

4°. *Пусть функция $f(x)$ такова, что*

$$x^{\alpha_1} f(x),\ x^{\alpha_2} f(x)\ \text{и}\ x^{\alpha_1+\alpha_2} f(x),$$

где $0<\alpha_1<+\infty$, $0<\alpha_2<+\infty$, *принадлежат классу* $L(0, +\infty)$. *Тогда почти всюду на* $(0, +\infty)$ *имеем*

$$D_{\infty}^{-\alpha_2} D_{\infty}^{-\alpha_1} f(x) = D_{\infty}^{-\alpha_1} D_{\infty}^{-\alpha_2} f(x) = D_{\infty}^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x). \tag{2.20}$$

В самом деле, ввиду отмеченного выше признака существования операторов $D_{\infty}^{-\alpha}$, функции

$$D_{\infty}^{-\alpha_1} f(x),\ D_{\infty}^{-\alpha_2} f(x)\ \text{и}\ D_{\infty}^{-\alpha_1+\alpha_2} f(x)$$

существуют почти всюду на $(0, +\infty)$ и принадлежат классу $L(0, +\infty)$.

Поэтому, например, будем иметь

$$D_{\infty}^{-\alpha_2} D_{\infty}^{-\alpha_1} f(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_x^{+\infty} (t_2 - x)^{\alpha_2 - 1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{t_2}^{+\infty} (t_1 - t_2)^{\alpha_1 - 1} f(t_1)\, dt_1 \right\} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_x^{+\infty} f(t_1) \left\{ \int_x^{t_1} (x - t_2)^{\alpha_2 - 1} (t_1 - t_2)^{\alpha_1 - 1}\, dt_2 \right\} dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} \int_x^{+\infty} (t_1 - x)^{\alpha_1 + \alpha_2 - 1} f(t_1)\, dt_1 = D_{\infty}^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x),$$

причем замена порядка интегрирования допустима, поскольку в результате получается оператор $D_{\infty}^{-(\alpha_1+\alpha_2)} f(x)$, существующий почти всюду на $(0, +\infty)$.

5°. *Пусть функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *измеримы на* $(0, +\infty)$ *и таковы, что*

$$f_1(x)\, D_{\infty}^{-\alpha} f_2(x) \in L(0, +\infty),\ f_2(x)\, D_0^{-\alpha} f_1(x) \in L(0, +\infty).$$

Тогда имеет место обобщенная формула интегрирования по частям

$$\int_0^{+\infty} f_1(x)\, D_{\infty}^{-\alpha} f_2(x)\, dx = \int_0^{+\infty} f_2(x)\, D_0^{-\alpha} f_1(x)\, dx. \tag{2.21}$$

Действительно, так как оба интеграла в (2.21) сходятся абсолютно, то формула (2.21) получится буквально таким же образом, как и формула (2.10), если там положить $l = +\infty$.

6°. *Функция*

$$e_{\rho}(x; \lambda) = e^{-\lambda^{\rho} x} \left(|\arg \lambda| \leqslant \frac{\pi}{2\rho},\ \rho > 1 \right) \tag{2.22}$$

является решением следующей задачи типа Коши:

$$D_{\infty}^{1/\rho} y(x) + \lambda y(x) = 0, \quad y(0) = 1. \tag{2.23}$$

В самом деле, если $\rho > 1$ и $\alpha = 1 - \dfrac{1}{\rho}$, то

$$D_{\infty}^{-\alpha} e_{\rho}(x; \lambda) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} e^{-\lambda^{\rho} t}\, dt =$$

$$= \frac{e^{-\lambda^{\rho} x}}{\Gamma(\alpha)} \int_{0}^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\lambda^{\rho} t}\, dt = \lambda^{1-\rho} e^{-\lambda^{\rho} x} \quad \left(|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

оэтому при $\rho > 1$ и $|\arg \lambda| < \frac{\pi}{2\rho}$

$$D_{\infty}^{1/\rho} e_{\rho}(x; \lambda) = \frac{d}{dx} D_{\infty}^{-\alpha} e_{\rho}(x; \lambda) = -\lambda e_{\rho}(x; \lambda).$$

Наконец, в случае, когда $\rho = 1$, в силу (2.19)

$$D_{\infty}^{1} e_1(x; \lambda) = \frac{d}{dx} e_1(x; \lambda) = -\lambda e_1(x; \lambda),$$

ричем для любого значения параметра λ.

Дополнительно отметим также, что в определенном классе доустимых функций решение $e_{\rho}(x; \lambda)$ задачи (2.23) будет единственым [15].

2.2. (a) Для фиксированного значения параметра α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ поожим

$$\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha \qquad (\rho \geqslant 1), \tag{2.24}$$

на полуоси $[0, +\infty)$ введем в рассмотрение операторы

$$D_{\infty}^{0} \varphi(x) \equiv \varphi(x),$$

$$D_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_{\infty}^{-\alpha} \varphi(x), \tag{2.25}$$

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \equiv D_{\infty}^{1/\rho} D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) \quad (n = 2, 3, \cdots),$$

. е. операторы последовательного дифференцирования функции $\varphi(x)$ орядка $\frac{n}{\rho}$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ в смысле Вейля.

Поскольку, согласно (2.19)

$$D_{\infty}^{1} \varphi(x) \equiv \varphi'(x),$$

о в случае $\alpha = 0$ (т. е. $\rho = 1$) будем иметь

$$D_{\infty}^{n} \varphi(x) \equiv \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.25'}$$

Теперь на полуоси $[0, +\infty)$ определим следующие два класса рункций.

Класс $C_{\alpha}^{(\infty)}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0, +\infty)$ всеми последовательными производными

$$D_\infty^n \varphi(x) \equiv \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

удовлетворяющими условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1 + x^{\alpha m}) \varphi^{(n)}(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Класс $C_\alpha^{*(\infty)}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0, +\infty)$ всеми последовательными в смысле Вейля производными

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) \quad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

непрерывными на $[0, +\infty)$ и удовлетворяющими условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1+x^{\alpha m}) D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

В случае $\alpha = 0$ (т. е. при $\rho = 1$), ввиду (2.25′), очевидно, что классы $C_0^{(\infty)}$ и $C_0^{*(\infty)}$ тождественны с классом $C^{(\infty)}$ функций $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| < +\infty \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Ниже мы покажем, что в случае $0 < \alpha < 1$ эти классы также тождественны.

Лемма 6. *Классы* $C_\alpha^{(\infty)}$ и $C_\alpha^{*(\infty)}$ $(0 < \alpha < 1)$ *совпадают, причем для любой функции* $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)} \equiv C_\alpha^{*(\infty)}$ *на всей полуоси* $[0, +\infty)$ *справедливы формулы*

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) \quad (n=0, 1, 2, \cdots), \tag{2.2}$$

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^k D_\infty^{-(\alpha n - k)} \varphi^{(n-k)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; k=0, 1, \cdots, [\alpha n]), \tag{2.30}$$

$$\varphi^{(k)}(x) \equiv (-1)^{n-k} D_\infty^{-\left(\frac{n}{\rho} - k\right)} D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) \quad \left(n = 0, 1, 2, \cdots;\ k = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n}{\rho}\right]\right). \tag{2.3}$$

Доказательство. Полагая $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$, покажем сначала, что интегралы

$$D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-1} \varphi^{(n)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha n-1} \varphi^{(n)}(x+t)\, dt \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{2.3}$$

сходятся абсолютно и равномерно относительно x на всей полуоси $[0, +\infty)$ и определяют непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

* Здесь, как и в дальнейшем, $[x]$ означает целую часть числа $x > 0$.

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{2m}) D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots). \quad (2.33)$$

ействительно, если $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$, то, обозначая через $A_{n,m} = A_{n,m}(\varphi)$ ачения верхних граней в (2.26), приходим к неравенствам

$$|\varphi^{(n)}(x)| < \frac{A_{n,m}}{1+x^{2m}} \quad (0 \leqslant x < +\infty;\ n, m = 0, 1, 2, \cdots) \quad (2.34)$$

$$|\varphi^{(n)}(x+t)| < \frac{A_{n,m}}{1+t^{2m}} \quad (0 \leqslant x,\ t < +\infty;\ n, m = 0, 1, 2, \cdots). \quad (2.34')$$

з (2.34') непосредственно и следует наше утверждение о природе одимости интегралов (2.32).

Далее, поскольку

$$x+t \geqslant 2\sqrt{xt} \geqslant \sqrt{xt} \quad (0 \leqslant x,\ t < +\infty),$$

из (2.34), в частности, вытекают неравенства

$$|\varphi^{(n)}(x+t)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{A_{n,m}}{1+x^{2m}}; & 1 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ \dfrac{A_{n,m}}{1+(xt)^{m/2}}; & 1 \leqslant x,\ t < +\infty. \end{cases}$$

Воспользовавшись, наконец, этими неравенствами, из (2.32) приодим к свойству (2.33) для наших интегралов $D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x)$, ввиду оизвольности $m \geqslant 0$.

Докажем теперь, что для нашей функции $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$ справедли- формулы (2.29), (2.30) и (2.31) леммы. Предварительно отметим, го при $n=0$ эти формулы просто очевидны, так как

$$\varphi^{(0)}(x) \equiv \varphi(x), \quad D_\infty^{-0} \varphi(x) = D_\infty^{0} \varphi(x) \equiv \varphi(x).$$

Установим сначала формулу (2.29), полагая $n \geqslant 1$. С этой целью, тметив, что согласно (2.34), при $t \to +\infty$

$$\varphi^{(n)}(t) = O(t^{-2m}) \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots), \quad (2.35)$$

ассмотрим оператор

$$D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \quad (0 < \alpha < 1)$$

путем интегрирования по частям запишем его в виде

$$D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) = -\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha} \varphi'(t)\, dt.$$

Отсюда уже, по определению оператора $D_\infty^{1/\rho} \varphi(x)$, получим

$$D_\infty^{1/\rho} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} \varphi'(t)\, dt \equiv D_\infty^{-\alpha} \varphi'(x),$$

т. е. формула (2.29) верна также при $n=1$.

Теперь заметим, что в силу (2.85) при любом $n \geqslant 1$ функции

$$x^\alpha \varphi^{(n-1)}(x),\ x^{\alpha(n-1)} \varphi^{(n-1)}(x),\ x^{\alpha n} \varphi^{(n-1)}(x)$$

абсолютно интегрируемы на полуоси $[0, +\infty)$, т. е. входят в клас $L(0, +\infty)$. Поэтому, в силу свойства 4° [2.1 (г)] дробных интеграло Вейля, имеет место тождество

$$D_\infty^{-\alpha} D_\infty^{-\alpha(n-1)} \varphi^{(n-1)}(x) \equiv D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n-1)}(x) \qquad (n \geqslant 1),$$

правая часть которого путем интегрирования по частям и с учето (2.35) запишется в виде

$$D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n-1)}(x) = \frac{1}{\alpha n \Gamma(\alpha n)} \int_x^{+\infty} \varphi^{(n-1)}(t)\, d(t-x)^{\alpha n} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha n\, \Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} (t-x)^{\alpha n} \varphi^{(n)}(t)\, dt.$$

Следовательно справедливо также тождество

$$\frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha} D_\infty^{-\alpha(n-1)} \varphi^{(n-1)}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-1} \varphi^{(n)}(t)\, dt \equiv D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x). \qquad (2.3$$

Наконец, полагая, что формула (2.29) верна для $n-1$, т. е.

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) = D_\infty^{-\alpha(n-1)} \varphi^{(n-1)}(x),$$

из (2.36) получим

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) =$$

$$= \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha} D_\infty^{-\alpha(n-1)} \varphi^{(n-1)}(x) = D_\infty^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x).$$

Итак формула (2.29) справедлива при любом $n > 0$ и, тем самы функция $\varphi(x)$ обладает на $[0, +\infty)$ всеми последовательными непр рывными производными в смысле Вейля $D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$ $(n \geqslant 0)$, подчине ными, в силу (2.33), условиям

$$\sup_{0 < x < +\infty} |(1 + x^{\alpha m}) D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots).$$

Это в свою очередь означает, что каждая функция $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$ вх дит также в класс $C_\alpha^{*(\infty)}$, иначе говоря имеет место включение $C_\alpha^{(\infty)} \subset C_\alpha^{*(\infty)}$

Теперь установим формулу (2.30), полагая опять, что $n\geq 1$, и заметив еще, что для значения $k=0$ она совпадает с (2.29).

Если при данном $n\geqslant 1$, $[\alpha n]=0$, то очевидно, что (2.30) просто совпадает с (2.29). Положим далее, что при данном $n\geqslant 1$, $[\alpha n]\geqslant 1$ и $1\leqslant k\leqslant[\alpha n]$.

Тогда путем интегрирования по частям с учетом (2.35) получим

$$D_\infty^{-k}\varphi^{(n)}(x)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_x^{+\infty}(t-x)^{k-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt=$$

$$=(-1)^k\varphi^{(n-k)}(x),\ 1\leqslant k\leqslant[\alpha n].$$

Но в силу свойства 4° дробных интегралов Вейля имеем

$$D_\infty^{-\alpha n}\varphi^{(n)}(x)=D_\infty^{-(\alpha n-k)}D_\infty^{-k}\varphi^{(n)}(x)$$

и поэтому

$$D_\infty^{-\alpha n}\varphi^{(n)}(x)=(-1)^k D_\infty^{-(\alpha n-k)}\varphi^{(n-k)}(x),\ 1\leqslant k\leqslant[\alpha n].$$

Отсюда и из (2.29) вытекают формулы (2.30).

Теперь мы положим, что $\varphi(x)\in C_\alpha^{*(\infty)}$ и следовательно

$$|D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\leqslant\frac{B_{n,m}}{1+x^{\alpha m}}\ (n,\ m=0,1,2,\cdots),\tag{2.27'}$$

где $B_{n,m}=B_{n,m}(\varphi)$ суть значения верхней грани (2.27).

Тогда, буквально так же, как и при установлении неравенств (2.33) можно убедиться, что

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+x^{\alpha m})D_\infty^{-\alpha}D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|<+\infty\ (n,\ m=0,1,2,\cdots),$$

т. е. что

$$|D_\infty^{-\alpha}D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\leqslant\frac{C_{n,m}}{1+x^{\alpha m}}\quad(n,\ m=0,1,2,\cdots),\tag{2.37}$$

где $C_{n,m}=C_{n,m}(\varphi)$ — постоянные.

Далее заметим, что

$$D_\infty^{-\frac{1}{\rho}}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)}\int\limits_x^{+\infty}(t-x)^{\frac{1}{\rho}-1}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\varphi(t)\,dt=$$

$$=-\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}\int\limits_x^{+\infty}(t-x)^{1/\rho}D_\infty^{1/\rho}\varphi(t)\,dt\right\}=-\frac{d}{dx}D_\infty^{-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}D_\infty^{1/\rho}\varphi(x),\tag{2.38}$$

причем вынос операции дифференцирования за знак интеграла, как легко видеть, допустим.

Но, с другой стороны

$$D_\infty^{-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}D_\infty^{\frac{1}{\rho}}\varphi(x)=D_\infty^{-\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}\frac{d}{dx}D_\infty^{-\alpha}\varphi(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\rho}\right)}\int\limits_x^{+\infty}(t-x)^{1/\rho}dD_\infty^{-\alpha}\varphi(t)=$$

$$= -\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{\frac{1}{\rho}-1}D_{\infty}^{-\alpha}\varphi(t)\,dt = -D_{\infty}^{-\frac{1}{\rho}}D_{\infty}^{-\alpha}\varphi(x), \tag{2.39}$$

так как проинтегрированный член исчезает, в силу (2.37).

Но согласно свойству дробных интегралов Вейля

$$D_{\infty}^{-\frac{1}{\rho}}D_{\infty}^{-\alpha}\varphi(x) = D_{\infty}^{-\left(\frac{1}{\rho}+\alpha\right)}\varphi(x) =$$

$$= D_{\infty}^{-1}\varphi(x) = \int_{x}^{+\infty}\varphi(t)\,dt, \tag{2.40}$$

так как $\frac{1}{\rho}+\alpha=1$.

Из (3.38), (3.39) и (3.40) вытекает, что

$$D_{\infty}^{-\frac{1}{\rho}}D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}\varphi(x) = \frac{d}{dx}\int_{x}^{+\infty}\varphi(t)\,dt = -\varphi(x),$$

т. е. всюду на полуоси $[0, +\infty)$ справедливо тождество

$$\varphi(x) = -D_{\infty}^{-\frac{1}{\rho}}D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}\varphi(x). \tag{2.41}$$

Итак формула (2.31) нашей леммы справедлива при $n=1$ и $k=0$.

Положив теперь, что для данного $n\geqslant 2$ справедлива более общая формула

$$\varphi(x) = (-1)^{n-1}D_{\infty}^{-\frac{n-1}{\rho}}D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x),$$

в силу (3.41) будем иметь также

$$\varphi(x) = (-1)^{n}D_{\infty}^{-\frac{n-1}{\rho}}D_{\infty}^{-\frac{1}{\rho}}D_{\infty}^{\frac{1}{\rho}}D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x) =$$

$$= (-1)^{n}D_{\infty}^{-\frac{n}{\rho}}D_{\infty}^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x), \tag{2.42}$$

т. е. формула (2.31) справедлива при любом $n\geqslant 0$ и $k=0$.

Если $\left[\frac{n}{\rho}\right]$ означает целую часть числа n/ρ, то из (2.42) путем последовательного дифференцирования по x мы приходим к формуле (2.31) леммы.

Нам остается установить еще, что $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{(\infty)}$. С этой целью запишем формулу (2.31) в виде

$$\varphi^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{n-k}}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}-k\right)}\int_{0}^{+\infty}t^{\frac{n}{\rho}-k-1}D_{\infty}^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x+t)\,dt, \tag{2.31'}$$

и заметим, во-первых, что здесь число $n \geqslant 1$ и, тем самым, числа $k \leqslant \left[\frac{n}{\rho}\right]$ могут быть произвольно большими. При этом, так как $\varphi(x) \in C_\alpha^{*(-)}$, то из (2.27′) следует

$$|D_\infty^{n/\rho} \varphi(x+t)| \leqslant \frac{B_{n,m}}{1+(x+t)^{2m}} \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots),$$

откуда и из представления (2.31′) заключаем, что функция $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема на $[0, +\infty)$, и более того, что

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{2m})\varphi^{(k)}(x)| < +\infty \quad (m, k = 0, 1, 2, \cdots).$$

Это значит, что каждая функция $\varphi(x) \in C_\alpha^{*(\infty)}$ входит также в класс $C_\alpha^{(-)}$, иначе говоря имеет место включение $C_\alpha^{*(\infty)} \subset C_\alpha^{(-)}$. Лемма полностью доказана.

(б) Докажем еще следующую лемму.

Лемма 7. 1°. *Если* $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$ $(0<\alpha<1)$, *то операторы* $D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ *могут быть определены также посредством соотношений*

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = D_\infty^{-\alpha}\left\{\frac{d}{dx} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x)\right\} \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{2.25′}$$

2°. *Если* $\varphi(x) \in C_\alpha^{(\infty)}$ $(0<\alpha<1)$, *то функции*

$$\psi_n(x) \equiv \frac{d}{dx} D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

довлетворяют условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+x^{2m})\psi_n(x)| < +\infty \; (n, m = 1, 2, \cdots). \tag{2.43}$$

Доказательство. 1°. Для значения $n=1$ формула (2.25′) совпадает с формулой (2.29) леммы 6.

Полагая теперь, что $n \geqslant 2$, воспользуемся формулой (2.29) для значения $n-1$

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(n-1))}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha(n-1)-1}\varphi^{(n-1)}(t)\,dt,$$

которая после интегрирования по частям запишется в виде

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x) = -\frac{1}{\alpha(n-1)\Gamma(\alpha(n-1))}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha(n-1)}\varphi^{(n)}(t)\,dt,$$

так как проинтегрированный член исчезает как при $t=x$, так и при $t=+\infty$, в силу (2.35).

Отсюда дифференцированием по x получим

$$\frac{d}{dx} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(n-1))}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha(n-1)-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt \equiv$$

$$\equiv D_\infty^{-\alpha(n-1)}\varphi^{(n)}(x).$$

Наконец, применив к обеим частям этого тождества оператор $D_{\infty}^{-\alpha}$, ввиду свойства 4° дробных интегралов Вейля, будем иметь

$$D_{\infty}^{-\alpha}\left\{\frac{d}{dx} D_{\infty}^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x)\right\} = D_{\infty}^{-\alpha} D_{\infty}^{-\alpha(n-1)} \varphi^{(n)}(x) =$$

$$= D_{\infty}^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) = D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$$

согласно формуле (2.29) леммы 6.

2°. Из того же тождества, заменив там $n-1$ через n, получим

$$\psi_n(x) \equiv \frac{d}{dx} D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-\alpha n} \varphi^{(n+1)}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n - 1} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha n - 1} \varphi^{(n+1)}(x+t)\, dt.$$

А затем, пользуясь неравенствами (2.34′), мы приходим к утверждениям (2.43) леммы, поступая точно так же, как это уже было проделано в ходе доказательства леммы 6.

2.3. (а) Для фиксированного значения параметра α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ положим вновь

$$\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha \qquad (\rho \geqslant 1),$$

и на отрезке $[0, l]$ $(0 < l < +\infty)$ введем в рассмотрение операторы

$$D_l^0 \varphi(x) \equiv \varphi(x),$$

$$D_l^{1/\rho} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_l^{-\alpha} \varphi(x), \tag{2.44}$$

$$D_l^{n/\rho} \varphi(x) \equiv D_l^{1/\rho} D_l^{\frac{n-1}{\rho}} \varphi(x) \quad (n=2, 3, \cdots),$$

т. е. операторы последовательного дифференцирования функции $\varphi(x)$ порядка $\frac{n}{\rho}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ в смысле Римана-Лиувилля с концом в точке $x = l$.

Поскольку, согласно (2.5),

$$D_l^1 \varphi(x) \equiv \varphi'(x),$$

то в случае $\alpha = 0$, когда $\rho = 1$, следует положить

$$D_l^n \varphi(x) \equiv \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.44′}$$

Определим теперь класс $C^{(\infty)}[0, l]$ как множество функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0, l]$ всеми последовательными производными

$$D_l^n \varphi(x) = \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

подчиненными условиям

$$\varphi^{(n)}(l) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{2.45}$$

Ввиду (2.45), очевидно, что каждую функцию $\varphi(x) \in C^{(\infty)}[0, l]$ можно продолжить на всю полуось $[0, +\infty)$, положив ее равной нулю на $[l, +\infty)$. В результате мы получим функцию $\varphi(x)$, определенную и бесконечно дифференцируемую на всей полуоси $[0, +\infty)$ и входящую в любой из классов $C_\alpha^{(\infty)}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ и, тем самым, в любой из классов $C_\alpha^{*(\infty)}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

Таким образом, из леммы 6 непосредственно будет следовать

Лемма 8. *Если $\varphi(x) \in C^{(\infty)}[0, l]$, то при любом $\alpha (0 \leqslant \alpha < 1)$ справедливы формулы*

$$D_l^{n/\rho} \varphi(x) = D_l^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.46}$$

$$D_l^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^k D_l^{-(\alpha n - k)} \varphi^{(n-k)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; \; k = 0, 1, \cdots, [\alpha n]), \tag{2.47}$$

$$\varphi^{(k)}(x) = (-1)^{n-k} D_l^{-\left(\frac{n}{\rho} - k\right)} D_l^{\frac{n}{\rho}} \varphi(x) \quad \left(n = 0, 1, 2, \cdots; \; k = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n}{\rho}\right]\right). \tag{2.48}$$

(б) В заключение приведем взаимные оценки чисел

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |\varphi^{(n)}(x)| \quad \text{и} \quad \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |D_l^{n/\rho} \varphi(x)| \; (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Лемма 9. *Если $\varphi(x) \in C^{(\infty)}[0, l]$, то при любом $\alpha (0 \leqslant \alpha < 1)$ имеют место оценки*

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} |D_l^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A_0 \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |\varphi^{(n-[\alpha n])}(x)| \tag{2.49}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant l} \left|\varphi^{\left(\left[\frac{n}{\rho}\right]\right)}(x)\right| \leqslant A_0 \max_{0 \leqslant x \leqslant l} |D_l^{n/\rho} \varphi(x)|, \tag{2.50}$$

где

$$A_0 = \max\{1, l\} \max_{1 \leqslant s \leqslant 2} \Gamma^{-1}(s) > 1.$$

Доказательство. В случае, когда $\rho = 1$ (т. е. когда $\alpha = 0$) неравенства (2.49) и (2.50) очевидны, в силу (2.44′). Поэтому будем полагать, что $\rho > 1$, т. е. что $0 < \alpha < 1$. Далее, поскольку при $n = 0$ эти неравенства также очевидны, то установим их справедливость для $n \geqslant 1$.

Напишем формулу (2.47) леммы 8 для $k = [\alpha n]$

$$D_l^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]} D_l^{-(\alpha n - [\alpha n])} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x), \tag{2.47′}$$

заметив при этом, что когда для данного $n \geqslant 1$, $[\alpha n] = \alpha n$ — целое число, то она принимает вид

$$D_l^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x),$$

откуда неравенство (2.49) следует непосредственно. В общем же случае из (2.47′) получим оценку

$$|D_l^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int_x^l (t-x)^{\alpha n-[\alpha n]-1}|\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{l^{\alpha n-[\alpha n]}}{\Gamma(1+\alpha n-[\alpha n])}\max_{0\leqslant x\leqslant l}|\varphi^{(n-[\alpha n])}(x)|,$$

откуда и следует (2.49).

Чтобы установить неравенство (2.50) напишем формулу (2.48) леммы 8 для $k=\left[\frac{n}{\rho}\right]=[(1-\alpha)n]$

$$\varphi^{\left(\left[\frac{n}{\rho}\right]\right)}(x)=(-1)^{n-\left[\frac{n}{\rho}\right]}D_l^{-\left(\frac{n}{\rho}-\left[\frac{n}{\rho}\right]\right)}D_l^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x). \tag{2.48'}$$

Заметив, что, если для данного $n\geqslant 1$, $\left[\frac{n}{\rho}\right]=\frac{n}{\rho}$ — целое число, то формула (2.48′) принимает вид

$$\varphi^{\left(\left[\frac{n}{\rho}\right]\right)}(x)=(-1)^{n-\left[\frac{n}{\rho}\right]}D_l^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x),$$

и тогда наше неравенство (2.50) очевидно.

В общем же случае из (2.48′) получим

$$|\varphi^{\left(\left[\frac{n}{\rho}\right]\right)}(x)|\leqslant \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}-\left[\frac{n}{\rho}\right]\right)}\int_x^l (t-x)^{\frac{n}{\rho}-\left[\frac{n}{\rho}\right]-1}|D_l^{\frac{n}{\rho}}\varphi(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{l^{n/\rho-[n/\rho]}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{\rho}-\left[\frac{n}{\rho}\right]\right)}\max_{0\leqslant x\leqslant l}|D_l^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x)|,$$

откуда вновь следует (2.50).

§ 3. Новые классы бесконечно дифференцируемых функций

3.1. (а) Пусть, как обычно

$$0\leqslant\alpha<1,\ \frac{1}{\rho}=1-\alpha \tag{3.1}$$

и по принятому нами определению [2.2 (а)] $C_\alpha^{*(\infty)}$ означает класс функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0,+\infty)$ всеми последовательными производными в смысле Вейля $D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ $(n=0,1,2,\cdots)$, непрерывными на $[0,+\infty)$ и удовлетворяющими условиям

$$\sup_{0\leqslant x<+\infty}|(1+x^{2m})D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|<+\infty\quad(m,n=0,1,2,\cdots). \tag{3.2}$$

Теперь для произвольной последовательности положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$ и для любого α $(0\leqslant\alpha<1)$ обозначим через $C_\alpha^*\{[0,+\infty);M_n\}$

совокупность функций из класса $C_\alpha^{*(\infty)}$, подчиненных условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| < AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{3.3}$$

где $A = A(\varphi)$ и $B = B(\varphi)$ — постоянные, зависящие, вообще говоря, от самой функции $\varphi(x)$.

Заметим, что, поскольку при $\alpha = 0$ (т. е. при $\rho = 1$)

$$D_\infty^n \varphi(x) \equiv \varphi^{(n)}(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{3.4}$$

то, таким образом, класс $C_0^*\{[0, +\infty); M_n\}$ представляет собой совокупность функций, бесконечно дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \cdots). \tag{3.3'}$$

Как в случае класса $C_0^*\{[0, +\infty); M_n\}$, так и для классов $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ вообще можно поставить задачу, аналогичную известной проблеме Ж. Адамара:

Какова должна быть последовательность положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для любой пары функций $\varphi(x)$ и $g(x)$ класса $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ из равенств

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = D_\infty^{n/\rho} g(0) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.5}$$

следовало бы, что

$$\varphi(x) \equiv g(x), \quad 0 \leqslant x < +\infty. \tag{3.6}$$

Поскольку каждый из классов $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ аддитивен, т. е. вместе с любыми двумя функциями $\varphi(x)$ и $g(x)$ туда входят также и функции $\varphi(x) \pm g(x)$, этот вопрос может быть сформулирован и следующим образом:

Указать условие, которому должна удовлетворять последовательность чисел $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для всякой функции $\varphi(x) \in C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ из равенства нулю функции $\varphi(x)$ и всех ее обобщенных производных $D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ в точке $x = 0$, т. е. из равенств

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha n - 1} \varphi^{(n)}(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.7}$$

следовало бы, что

$$\varphi(x) \equiv 0, \ 0 \leqslant x < +\infty. \tag{3.8}$$

Такого рода классы $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ впредь условимся называть *α-квазианалитическими.*

Заметим, что, поскольку в случае $\alpha = 0$ согласно (3.4)

$$D_\infty^n \varphi(0) = \varphi^{(n)}(0) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

то поставленный нами вопрос в качестве крайнего случая, когда $\alpha = 0$, содержит в себе проблему Адамара для класса $C_0^*\{[0, +\infty); M_n\}$.

Поэтому 0-квазианалитические классы—это ни что иное, как классы $C_0^*\{[0,+\infty); M_n\}$, квазианалитические в обычном смысле.

Как и в классическом случае класса $C_0^*\{[0,+\infty); M_n\}$, так и в общем случае решение задачи о α-квазианалитичности классов $C_\alpha^*\{[0,+\infty); M_n\}$ формулируется в терминах функции А. Островского

$$T(r)=\sup_{n\geq 1}\frac{r^n}{M_n},\quad r\in(0,+\infty), \tag{3.9}$$

ассоциированной с последовательностью $\{M_n\}_1^\infty$.

Как известно [8], в случае, когда

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{M_n}=+\infty, \tag{3.10}$$

функция $T(r)$ непрерывна на $(0,+\infty)$ и, монотонно возрастая, стремится к бесконечности вместе с r. Более того, в этом случае ее можно определить также формулой

$$T(r)=\max_{n\geq 1}\frac{r^n}{M_n}. \tag{3.9'}$$

В случае же, когда

$$\underline{\lim}_{n\to+\infty}\sqrt[n]{M_n}<c<+\infty, \tag{3.10'}$$

$$T(r)=+\infty \quad \text{при} \quad r>c.$$

Но прежде чем перейти к непосредственному решению этой задачи, приведем одну лемму.

(б) Пусть $\{M_n\}_1^\infty$ — последовательность положительных чисел, подчиненных условию (3.10) и, следовательно, таких, что функция $T(r)$ определяется по формуле (3.9′).

Поскольку функция $T(r)$ монотонно возрастает к $+\infty$ вместе с r, то можно указать значение $r_0\geq 1$ так, чтобы имели $\log T(r)\geq 0$ при $r\geq r_0$.

Введем в рассмотрение функцию

$$p(r)=\begin{cases}\log T(r_0), & \text{при} \quad r\in[0,r_0],\\ \log T(r), & \text{при} \quad r\in[r_0,+\infty].\end{cases} \tag{3.11}$$

Таким образом, функция $p(r)>0$ непрерывна, монотонно возрастает на полуоси $(0,+\infty)$ и стремится к $+\infty$ вместе с r.

Но, более того, будем иметь также

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{p(r)}{\log r}=+\infty. \tag{3.12}$$

В самом деле, так как

$$T(r)\geq\frac{r^n}{M_n}\quad(n=1,2,\cdots),$$

то очевидно

$$\varliminf_{r\to+\infty} \frac{\log T(r)}{\log r} \geqslant n \quad (n=1,\ 2,\cdots),$$

откуда и следует (3.12), в силу определения (3.11) функции $p(r)$ и произвольности $n \geqslant 1$.

Вспомним далее определение [1.2 (a)] кривой

$$L_\rho(\nu) \equiv L_\rho(0;\ \nu) = \left\{\zeta;\ \mathrm{Re}\,\zeta^\rho = \nu,\ |\arg\zeta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho}\right\} \left(\rho > \frac{1}{2},\ \nu > 0\right), \tag{3.13}$$

являющейся границей области

$$D_\rho(\nu) \equiv D_\rho(0;\ \nu) = \left\{\zeta;\ \mathrm{Re}\,\zeta^\rho > \nu,\ |\arg\zeta| < \frac{\pi}{2\rho}\right\}. \tag{3.14}$$

Докажем следующее предложение.

Лемма 10. *При любом* $\rho > \frac{1}{2}$, $\nu \geqslant 0$ *и* $\beta > 0$ *справедливы оценки*

$$\max_{\zeta\in L_\rho(\nu)} \{|\zeta|^{\beta n} \exp\{-p(|\zeta - \nu^{1/\rho}|^\beta)\}\} \leqslant A_1 B_1^n M_n \quad (n=1,\ 2,\cdots), \tag{3.15}$$

где $A_1 = A_1(\nu;\ \beta)$ *и* $B_1 = B_1(\nu;\ \beta)$ — *постоянные.*

Доказательство. Заметим сначала же, что по определению (3.11) самой функции $p(r)$ при всех $n \geqslant 1$

$$\exp\{-p(r)\} = \frac{1}{T(r)} \leqslant \frac{M_n}{r^n},\ r \geqslant r_0. \tag{3.16}$$

Далее, отметив, что $L_\rho(\nu)$ — это симметричная относительно вещественной оси $\mathrm{Im}\,\zeta = 0$ кривая, проходящая через точку $\zeta = \nu^{1/\rho}$, представим ее в виде суммы дуг

$$L_\rho(\nu) = L'_\rho(\nu) + L^*_\rho(\nu),$$

где

$$L'_\rho(\nu) = \{\zeta;\ \zeta\in L_\rho(\nu),\ |\zeta - \nu^{1/\rho}| < r_0\},$$

$$L^*_\rho(\nu) = \{\zeta;\ \zeta\in L_\rho(\nu),\ |\zeta - \nu^{1/\rho}| \geqslant r_0\}. \tag{3.17}$$

Так как $p(r) \geqslant 0$, $r \in [0, +\infty)$, то очевидно, что при всех $n \geqslant 1$

$$\max_{\zeta\in L'_\rho(\nu)} \{|\zeta|^{\beta n} \exp\{-p(|\zeta - \nu^{1/\rho}|^\beta)\}\} \leqslant (\nu^{1/\rho} + r_0)^{\beta n}. \tag{3.18}$$

С другой стороны, в силу (3.16) и определения $L^*_\rho(\nu)$, состоящей из двух неограниченных кривых, имеем еще

$$\max_{\zeta\in L^*_\rho(\nu)} \{|\zeta|^{\beta n} \exp\{-p(|\zeta - \nu^{1/\rho}|^\beta)\}\} \leqslant$$

$$\leqslant M_n \max_{\zeta\in L^*_\rho(\nu)} \left\{\left|\frac{\zeta}{\zeta - \nu^{1/\rho}}\right|^{\beta n}\right\} \quad (n \geqslant 1).$$

Но очевидно, что

$$\max_{\zeta\in L_\rho^*(\nu)}\left\{\left|\frac{\zeta}{\zeta-\nu^{1/\rho}}\right|^\beta\right\}=C(\nu;\beta)<+\infty,$$

и поэтому будем иметь

$$\max_{\zeta\in L_\rho^*(\nu)}\{|\zeta|^{\beta n}\exp\{-p(|\zeta-\nu^{1/\rho}|^\beta)\}\}\leqslant C^n(\nu;\beta)M_n,\quad n\geqslant 1. \tag{3.19}$$

Из (3.18) и (3.19), следует, что при всех $n\geqslant 1$

$$\max_{\zeta\in L_\rho(\nu)}\{|\zeta|^{\beta n}\exp\{-p(|\zeta-\nu^{1/\rho}|^\beta)\}\}\leqslant$$

$$\leqslant\max\{(\nu^{1/\rho}+r_0)^n,\ C^n(\nu;\beta)M_n\}\quad(n\geqslant 1),$$

откуда при подходящем выборе постоянных $A=A(\nu;\beta)>0$ и $B=B(\nu;\beta)>0$ будет следовать оценка (3.15) леммы, так как $M_n>1$ при $n\geqslant n_0$, ввиду условия (3.10).

3.2. Приведем теперь доказательство теоремы об α-квазианалитичности классов $C_\alpha^*\{[0,+\infty);M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$. Для крайнего значения параметра $\alpha=0$ эта теорема сводится к известной теореме Данжуа—Карлемана о классах функций, квазианалитических в смысле Адамара.

Теорема 3. *Для того чтобы класс $C_\alpha^*\{[0,+\infty);M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ был α-квазианалитическим необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty, \tag{3.20}$$

где, как обычно,

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{M_n}\cdot$$

Доказательство. 1°. Необходимость. Нам необходимо установить, что если

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr<+\infty, \tag{3.21}$$

то существует нетривиальная функция $\varphi(x)$ из класса $C_\alpha^*\{[0,+\infty);M_n\}$, удовлетворяющая условиям

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots), \tag{3.22}$$

где $\rho=\dfrac{1}{1-\alpha}\cdot$

С этой целью, заметим сначала же, что

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{M_n}=+\infty.$$

так как в противном случае, вопреки нашему предположению (3.21), имели бы $T(r) = +\infty$ при $r > r_1$.

Поэтому при условии (3.21) функция $T(r)$ определится как

$$T(r) = \max_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}.$$

Построим непрерывную, не убывающую на полуоси $[0, +\infty)$ функцию $p_0(r) > 0$, положив

$$p_0(r) = p(r) + 2\log\left(1 + \frac{r}{r_0}\right), \quad r \geqslant 0, \tag{3.11'}$$

где функция $p(r)$ определена согласно формуле (3.11).

Тогда, в силу (3.21), будем иметь

$$\int_1^{+\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr < +\infty, \tag{3.23}$$

где

$$\gamma = \frac{1}{1+\alpha} = \frac{\rho}{2\rho - 1} \qquad \left(\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1\right). \tag{3.23'}$$

Но при условии (3.23) согласно теореме А (2°) [1.1 (a)] существует функция $F(z) \not\equiv 0$, аналитическая в замкнутой угловой области

$$\Delta(\gamma;\ 0) \equiv \Delta_\gamma = \left\{ z;\ |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma},\ 0 < |z| < +\infty \right\}$$

и удовлетворяющая неравенству

$$|F(re^{i\varphi})| \leqslant e^{-p_0(r)} \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\gamma},\ 0 \leqslant r < +\infty \right). \tag{3.24}$$

Заметим теперь, что дополнительная к Δ_γ угловая область

$$\Delta^*(\gamma;\ 0) \equiv \Delta_\gamma^* = \left\{ z;\ \frac{\pi}{2\gamma} < |\arg z| \leqslant \pi,\ 0 < |z| < +\infty \right\}$$

имеет раствор $2\pi - \dfrac{\pi}{\gamma} = \dfrac{\pi}{\rho}$.

Поэтому, если ввести в рассмотрение функцию

$$F^*(z) = F(-z),$$

то она уже будет аналитична внутри и непрерывна в замкнутой угловой области

$$\Delta_\rho^* = \left\{ z;\ \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leqslant \pi, \quad 0 < |z| < +\infty \right\},$$

дополнительной к

$$\Delta_\rho = \left\{ z;\ \ |\arg z| < \frac{\pi}{2\rho},\ 0 < |z| < +\infty \right\},$$

причем, в силу (3.24)

$$|F^*(re^{i\varphi})| \leqslant e^{-p_0(r)} \left(\frac{\pi}{2\rho} < |\varphi| \leqslant \pi,\ 0 \leqslant r < +\infty\right). \qquad (3.24$$

Наконец, для фиксированного значения $\nu > 0$ определим функцию

$$F_\nu(z) = F^*(z - \nu^{1/\rho}), \qquad (3.2$$

аналитическую внутри и непрерывную в замкнутой угловой области

$$\Delta_\rho^*(\nu) = \left\{z;\ \frac{\pi}{2\rho} < |\arg(z - \nu^{1/\rho})| \leqslant \pi,\quad 0 < |z - \nu^{1/\rho}| < +\infty\right\},$$

раствора

$$2\pi - \frac{\pi}{\rho} = \frac{\pi}{\gamma},\quad \gamma = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Очевидно при этом что, имеет место включение

$$\Delta_\rho^* \equiv \Delta_\rho^*(0) \subset \Delta_\rho^*(\nu).$$

Из определения (3.25) функции $F_\nu(z)$, в силу неравенства (3.24′) приходим к оценке

$$|F_\nu(z)| \leqslant \exp\{-p_0(|z - \nu^{1/\rho}|)\},\quad z \in \overline{\Delta}_\rho^*(\nu). \qquad (3.2$$

Ввиду того, что согласно (3.12)

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{p_0(|z - \nu^{1/\rho}|)}{\log|z|} = +\infty,$$

из (3.26), в частности, следует также, что, если $re^{i\varphi} \in \overline{\Delta}_\rho^*(\nu)$, то

$$\max_\varphi |F_\nu(re^{i\varphi})| = O(r^{-\omega}),\ r \to +\infty \qquad (3.2$$

для любого $\omega > 1$.

Таким образом, функция $F_\nu(z) \not\equiv 0$ удовлетворяет условиям теоремы 1 в угловой области $\Delta_\rho^*(\nu) \supset \Delta_\rho^*$. Поэтому, согласно этой теореме, она допускает интегральное представление

$$F_\nu(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho - 1} \varphi(t)\, dt,\ z \in \Delta_\rho^*, \qquad (3.2$$

где

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} e^{-t\zeta^\rho} F_\nu(\zeta)\, d\zeta,\ t \in [0, +\infty), \qquad (3.2$$

причем $L_\rho = L_\rho(0)$ — граница угловой области $\Delta_\rho^* = \Delta_\rho^*(0)$, пробегаема в положительном направлении. Очевидно, что $\varphi(t) \not\equiv 0$.

Мы докажем теперь, что $\varphi(t)$ является искомой функцией класс $C_\alpha^*\{[0, +\infty);\ M_n\}$, удовлетворяющей условиям (3.23).

С этой целью покажем сначала, что функция $\varphi(t)$ допускает та же представление

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho(\nu)} e^{-t\zeta^\rho} F_\nu(\zeta)\,d\zeta,\quad t\in[0,\ +\infty), \tag{3.29'}$$

де $L_\rho(\nu)$ — граница взаимно дополнительных областей $D_\rho(\nu)$ и $D^*_\rho(\nu)$.

Чтобы убедиться в этом заметим, во-первых, что функция $e^{-t\zeta^\rho}$ налитична в угловой области $\Delta_\rho \supset D_\rho(\nu)$, причем

$$|e^{-t\zeta^\rho}| = \begin{cases} <1, & \text{при } \zeta\in\Delta_\rho,\ t\in[0,\ +\infty),\\ = e^{-\nu t}, & \text{при } \zeta\in L_\rho(\nu),\ t\in[0,\ +\infty). \end{cases} \tag{3.30}$$

Во-вторых, отметим, что согласно лемме 1 $\Delta_\rho(\nu)\subset D_\rho(\nu)$, причем в свою очередь $D_\rho(\nu)\subset\Delta_\rho$.

Из сказанного вытекает, что имеют место включения

$$\Delta^*_\rho \subset D^*_\rho(\nu) \subset \Delta^*_\rho(\nu), \tag{3.31}$$

ри этом границей для открытой области $G_\rho(\nu) = D^*_\rho(\nu) - \overline{\Delta}^*_\rho$ служит овокупность кривых $L_\rho = L_\rho(0)$ и $L_\rho(\nu)$.

С другой стороны, поскольку функция $F_\nu(z)$ аналитична и удовлетворяет условию (3.27) в области $\overline{\Delta}^*_\rho(\nu)$, а в силу (3.31) имеет место ключение $\overline{G}_\rho(\nu)\subset\Delta^*_\rho(\nu)$, то это условие выполняется, в частности, и в амкнутой области $\overline{G}_\rho(\nu)$.

Из сказанного выше и из оценки (3.30) вытекает, что в представлении (3.29') функции $\varphi(t)$ контур интегрирования L_ρ можно заменить онтуром $L_\rho(\nu)$ согласно теореме Коши.

Итак, формула (3.29') справедлива, причем поскольку $L_\rho(\nu)\subset\Delta^*_\rho(\nu)$, о, в силу (3.27), при $re^{i\varphi}\in L_\rho(\nu)$

$$\max_{\varphi}|F_\nu(re^{i\varphi})| = O(r^{-\omega}),\quad r\to+\infty$$

ри любом $\omega>1$. Отсюда очевидно следует, что функция $\varphi(t)$ бесконечно дифференцируема на полуоси $[0,\ +\infty)$, причем ее производные допускают представление

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho(\nu)} e^{-t\zeta^\rho}\zeta^{\rho n} F_\nu(\zeta)\,d\zeta\ (n=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{3.32}$$

де все интегралы абсолютно и равномерно сходятся на полуоси $\leqslant t<+\infty$, допуская, в силу (3.30), оценки вида

$$|\varphi^{(n)}(t)|\leqslant \frac{e^{-\nu t}}{2\pi}\int\limits_{L_\rho(\nu)} |\zeta|^{\rho n}\,|F_\nu(\zeta)|\,|d\zeta|\quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{3.33}$$

тсюда вытекает конечность величин

$$\sup_{0\leqslant t<+\infty} |(1+t^{\alpha m})\,\varphi^{(n)}(t)| < +\infty\quad (n,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

это значит [2.2 (а)], что функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $C_\alpha^{(\infty)}$, следовательно, согласно лемме 6, классу $C_\alpha^{*(\infty)}$.

Покажем теперь, что, более того, функция $\varphi(t)$ принадлеж
также классу $C^{*}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$.

С этой целью отметим, во-первых, что, как было установл
выше [2.1 (г)]

$$D_{\infty}^{1/\rho}\ e^{-t\zeta^\rho} = -\zeta e^{-t\zeta^\rho}\left(|\arg\zeta| \leqslant \frac{\pi}{2\rho},\ \rho \geqslant 1\right).$$

Поэтому имеем вообще

$$D_{\infty}^{n/\rho}\ e^{-t\zeta^\rho} = (-1)^n \zeta^n\ e^{-t\zeta^\rho} \quad (3.$$

при $\zeta \in L_\rho(\nu)$ и $t \in (0, +\infty)$.

Применив оператор $D_{\infty}^{n/\rho}$ к обеим частям формулы (3.29′), мы
лучим в силу (3.34)

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(t) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho(\nu)} e^{-t\zeta^\rho}\zeta^n F_\nu(\zeta)\,d\zeta\ (n=1, 2, \cdots), \quad (3.$$

причем легко видеть, что ввод операторов $D_{\infty}^{n/\rho}$ под знак интегр
допустим.

Из (3.35) приходим к оценкам

$$|D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(t)| \leqslant \frac{e^{-\nu t}}{2\pi}\int\limits_{L_\rho(\nu)} |\zeta|^n\,|F_\nu(\zeta)|\,|d\zeta|\ (n=1, 2, \cdots),$$

или, в силу включения $L_\rho(\nu) \subset \bar{\Delta}_\rho(\nu)$, неравенства (3.26) и определе
(3.11′) функции $p_0(r)$, к оценкам

$$\sup_{0<t<+\infty} |D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(t)| \leqslant C_1(\nu)\,e^{-\nu t}\max_{\zeta\in L_\rho(\nu)}\{|\zeta|^n \exp\{-p(|\zeta - \nu^{1/\rho}|)\}\}$$
$$(n=1, 2, \cdots), \quad (3.$$

где

$$C_1(\nu) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_\rho(\nu)}\frac{|d\zeta|}{(1+r_0^{-1}|\zeta|)^2}.$$

Поскольку легко видеть, что величина $C_1(\nu)$ конечна, то из (3.36),
гласно лемме 10 (положив там $\beta = 1$), получим также оценки вида

$$\sup_{0<t<+\infty}|e^{\nu t}D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(t)| \leqslant AB^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Отсюда, в частности, следует, что функция $\varphi(t)$ входит в кл
$C^{*}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$.

Таким образом, для завершения доказательства необходимо
остается установить, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет также услови
(3.22).

С этой целью заметим, что из (3.29′) и (3.35) вытекает

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0) = \frac{(-1)^n}{2\pi i}\int\limits_{L_\rho(\nu)}\zeta^n F_\nu(\zeta)\,d\zeta \quad (n=0, 1, 2, \cdots), \quad (3.$$

причем $D_{\infty}^{0/\rho}\varphi(0) = \varphi(0)$.

Но функция $F_\varepsilon(\zeta)$ аналитична внутри и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta}_\varepsilon^*(\nu)$, причем согласно (3.27) для любого $\omega > 1$ при $\zeta \in \overline{\Delta}_\varepsilon^*(\nu)$

$$F_\varepsilon(\zeta) = O(|\zeta|^{-\omega}), \quad \zeta \to \infty.$$

Поскольку $\overline{D}_\varepsilon^*(\nu) \subset \overline{\Delta}_\varepsilon^*(\nu)$, то, замкнув контур $L_\varepsilon(\nu)$ слева, согласно теореме Коши получим, что все интегралы (3.37) равны нулю. Таким образом, необходимость условия (3.20) теоремы полностью доказана.

2°. Достаточность. Теперь надо установить, что при условии (3.20) каждая функция $\varphi(x) \in C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$, удовлетворяющая условиям (3.22), равна тождественно нулю $\varphi(x) \equiv 0$ на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Пусть функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ и, следовательно, согласно лемме 6, классу $C_\alpha^{(*)}$. Тогда очевидно, что функция $\varphi(t)$ на полуоси $[0, +\infty)$ непрерывна и ограничена, причем в случае, когда $0 < \alpha < 1$, одновременно будем иметь

$$\varphi(t) \in L_1(0, +\infty) \quad \text{и} \quad \varphi(t) \in L_2(0, +\infty). \tag{3.38}$$

Рассмотрим преобразование с ядром Миттаг-Леффлера функции $\varphi(t)$

$$\Phi_\rho(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho - 1} \varphi(t)\, dt, \quad z \in \Delta_\rho^*, \tag{3.39}$$

являющееся, согласно лемме 4, аналитической функцией в области Δ_ρ^*, непрерывной в замкнутой области $\overline{\Delta}_\rho^*$ при $\rho > 1$ (т. е. при $0 < \alpha < 1$), кроме, быть может, точки $z = \infty$.

Полагая далее, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = D_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

докажем, что функция $\Phi_\rho(z)$ допускает также представления вида

$$\Phi_\rho(z) = \frac{(-1)^n}{z^n} \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho - 1} D_\infty^{n/\rho} \varphi(t)\, dt, \quad z \in \Delta_\rho^* \tag{3.40}$$

при любом $n \geqslant 1$.

С этой целью случаи $\alpha = 0$ $(\rho = 1)$ и $0 < \alpha < 1$ $(\rho > 1)$ целесообразно рассмотреть отдельно.

Если $\alpha = 0$ $(\rho = 1)$, то из (3.39) имеем

$$\Phi_1(z) = \int_0^{+\infty} e^{zt} \varphi(t)\, dt, \quad z \in \Delta_1^*, \tag{3.39'}$$

причем, поскольку при $\rho = 1$

$$D_\infty^n \varphi(x) = \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

то функция $\varphi(x) \in C_0^*\{[0, +\infty); M_n\}$ удовлетворяет условиям

$$\sup_{0 \le x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{3.41}$$

$$\varphi(0) = \varphi^{(n)}(0) = 0.$$

Из (3.39′) путем n-кратного интегрирования по частям мы приходим к формуле

$$\Phi_1(z)=\frac{(-1)^n}{z^n}\int_0^{+\infty} e^{zt}\varphi^{(n)}(t)\,dt,\ \ z\in\Delta_1^*,$$

т. е. к требуемой формуле (3.40) для случая $\rho=1$, если учтем условия (3.41), а также, что

$$\lim_{t\to+\infty} e^{zt}=0,\ \ z\in\Delta_1^*=\{z;\ \operatorname{Re} z<0\}.$$

Положим теперь, что $0<\alpha<1$ $(\rho>1)$ и заметим, что функция

$$\mathbf{E}_\rho(t,\ z)\equiv E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)t^{\frac{1}{\rho}-1} \tag{3.42}$$

удовлетворяет уравнению с дробной производной [2.1 (в)]

$$D_0^{1/\rho}\mathbf{E}_\rho(t;\ z)\equiv\frac{d}{dt}D_0^{-\alpha}\mathbf{E}_\rho(t;\ z)=z\,\mathbf{E}_\rho(t;\ z), \tag{3.43}$$

где

$$D_0^{-\alpha}\mathbf{E}_\rho(t;\ z)\equiv$$

$$\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\mathbf{E}_\rho(\tau;\ z)\,d\tau=E_\rho(zt^{1/\rho};\ 1). \tag{3.44}$$

В силу (3.42) и (3.43) функцию $\Phi_\rho(z)$ можно записать также в виде

$$\Phi_\rho(z)=\frac{1}{z}\int_0^{+\infty}\varphi(t)\,d\,\{D_0^{-\alpha}\mathbf{E}_\rho(t;\ z)\},\ \ z\in\Delta_\rho^*.$$

Отсюда интегрированием по частям получим

$$\Phi_\rho(z)=\frac{-1}{z}\int_0^{+\infty}\varphi'(t)\,D_0^{-\alpha}\mathbf{E}_\rho(t;\ z)\,dt,\ \ z\in\Delta_\rho^*, \tag{3.45}$$

ввиду того, что проинтегрированный член

$$\varphi(t)\,D_0^{-\alpha}\mathbf{E}_\rho(t;\ z)=\varphi(t)\,\mathbf{E}_\rho\ (zt^{1/\rho};\ 1)$$

исчезает на концах промежутка $[0,+\infty)$, так как $\varphi(0)=0$ и при $t\to+\infty$.

$$E_\rho(zt^{1/\rho};\ 1)=O(t^{-\frac{1}{\rho}}),\ \ z\in\Delta_\rho^*. \tag{3.46}$$

Для продолжения обозначим на время

$$f_1(t)=\mathbf{E}_\rho(t;\ z)\ \text{ и }\ f_2(t)=\varphi'(t)$$

и заметим, что в силу свойства (1.51) [1.3 (б)] функции Миттаг-Леффлера $f_1(t)\in L(0,+\infty)$, кроме того очевидно имеем также $f_2(t)\in L(0,+\infty)$.

Далее функции

$$D_0^{-\alpha} f_1(t) = E_\rho(zt^{1/\rho};\ 1),\ z \in \Delta_\rho^*,$$

$$D_\infty^{-\alpha} f_2(t) = D_\infty^{-\alpha}\varphi'(t) = D_\infty^{1/\rho}\varphi(t)$$

непрерывны и ограничены на $[0, +\infty)$, в силу (3.46) и ввиду того, что $\varphi(x) \in C_\alpha^*\{[0, +\infty);\ M_n\}$ и, следовательно, согласно лемме 6, имеем вообще

$$|D_\infty^{-\alpha n}\varphi^{(n)}(t)| = |D_\infty^{n/\rho}\varphi(t)| < AB^n\ M_n\ (n=1, 2, \cdots). \tag{3.47}$$

Из сказанного вытекает, что наши функции удовлетворяют условиям

$$f_1(t)\ D_\infty^{-\alpha} f_2(t) \in L(0, +\infty),\ f_2(t)\ D_0^{-\alpha} f_1(t) \in L(0, +\infty) \tag{3.48}$$

и тем самым условиям, обеспечивающим применение к интегралу (3.45) обобщенной формулы интегрирования по частям (2.21) [2.1 (г)].

В результате из (3.45) мы приходим к формуле (3.40) для $n=1$

$$\Phi_\rho(z) = \frac{-1}{z}\int_0^{+\infty} \mathrm{E}_\rho(t;\ z)\ D_\infty^{1/\rho}\varphi(t)\,dt,\quad z \in \Delta_\rho^*, \tag{3.40'}$$

так как, согласно формуле (2.29) леммы 6, $D_\infty^{-\alpha}\varphi'(t) = D_\infty^{1/\rho}\varphi(t)$.

Чтобы доказать формулу (3.40) для любого $n>1$, проводим полную индукцию. Полагая, что она верна для $n-1$, и пользуясь тождеством (3.43), будем иметь

$$\Phi_\rho(z) = \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}\int_0^{+\infty} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\ d\{D_0^{-\alpha}\mathrm{E}_\rho(t;\ z)\},\ z \in \Delta_\rho^*.$$

Отсюда интегрированием по частям получим

$$\Phi_\rho(z) = \frac{(-1)^n}{z^n}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}\{D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\}\ D_0^{-\alpha}\mathrm{E}_\rho(t;\ z)\,dt, \tag{3.49}$$

ввиду того, что и в этом случае проинтегрированный член

$$D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\ D_0^{-\alpha}\mathrm{E}_\rho(t;\ z) = D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)\ E_\rho(zt^{1/\rho};\ 1)$$

исчезает на концах промежутка $[0, +\infty)$, в силу (3.46) и (3.47), а также условия $D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(0) = 0$.

Наконец, положим

$$f_1(t) = \mathrm{E}_\rho(t;\ z) \quad \text{и} \quad f_2^*(t) = \frac{d}{dt}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(t)$$

и заметим, что согласно лемме 7

$$f_2^*(t) \in L(0, +\infty),\ D_\infty^{-\alpha} f_2^*(t) = D_\infty^{n/\rho}\varphi(t),$$

причем функции

$$D_0^{-\alpha} f_1(t) = E_\rho(zt^{1/\rho};\ 1) \text{ и } D_\infty^{-\alpha} f_2^*(t)$$

непрерывны и ограничены на $[0, +\infty)$, в силу (3.46) и (3.47).

Поэтому, применив к интегралу (3.49) формулу интегрировании по частям (2.21), приходим к представлению (3.40) для любого $n \geqslant 1$.

Докажем теперь, что

$$\Phi_\rho(z) = 0,\quad z \in \overset{*}{\Delta}_\rho. \tag{3.50}$$

С этой целью рассмотрим угловую область

$$\overset{*}{\Delta}_\rho(-1) = \left\{z;\ \frac{\pi}{2\rho} < |\arg(z+1)| \leqslant \pi,\ 0 < |z+1| < +\infty\right\},$$

раствора $2\pi - \frac{\pi}{\rho} = \frac{\pi}{\gamma}$, где $\gamma = \frac{1}{1+\alpha}$, получающуюся линейным переносом $z' = z - 1$ области $\overset{*}{\Delta}_\rho$.

Из очевидной оценки

$$|E_1(tz;\ 1)| < e^{-t};\ z \in \overline{\overset{*}{\Delta}}_1(-1),\ 0 \leqslant t < +\infty$$

и из оценки (1.32) леммы 2 вытекает, что при любом $\rho > 1$

$$\left|E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\right| \leqslant \frac{M|z|^{\rho-1}}{(1+t^{1/\rho})^2};\ z \in \overline{\overset{*}{\Delta}}_\rho(-1),\ 0 < t < +\infty,$$

где $M > 0$ не зависит от z и t.

Отсюда следует, что при любом $\rho > 1$

$$\int_0^{+\infty} \left|E_\rho\left(zt^{1/\rho};\ \frac{1}{\rho}\right)\right| t^{\frac{1}{\rho}-1}\, dt \leqslant M_1 |z|^{\rho-1},\ z \in \overline{\overset{*}{\Delta}}_\rho(-1), \tag{3.51}$$

где $M_1 > 0$ не зависит от z.

Поскольку очевидно $\overline{\overset{*}{\Delta}}_\rho(-1) \subset \overset{*}{\Delta}_\rho$, то из представлений (3.40) нашей функции $\Phi_\rho(z)$, в силу (3.47) и (3.51) вытекают неравенства

$$|\Phi_\rho(z)| < AM_1|z|^{\rho-1} \frac{M_n}{\left(\frac{|z|}{B}\right)^n}\quad (n = 1, 2, \cdots;\ z \in \overline{\overset{*}{\Delta}}_\rho(-1))$$

и, следовательно, ввиду определения функции $T(r)$, и неравенство

$$|\Phi_\rho(z)| \leqslant A_1 \frac{|z|^{\rho-1}}{T\left(\frac{|z|}{B}\right)},\quad z \in \overline{\overset{*}{\Delta}}_\rho(-1), \tag{3.52}$$

где $A_1 > 0$ не зависит от z.

Чтобы установить тождество (3.50), различим два случая.

В случае, когда

$$\varliminf_{n\to+\infty} \sqrt[n]{M_n} < r_0 < +\infty\quad (r_0 > 1)$$

как известно [3.1 (а)], будем иметь $T(r) = +\infty$, $r \geqslant r_0 > 1$ и условие (3.20) теоремы, очевидно, выполняется.

Но тогда из неравенства (3.52) будет следовать, что $\Phi_\rho(z) \equiv 0$ в части области $\overline{\Delta}_\rho^*(-1)$, лежащей вне круга $|z| \leqslant r_0$, и, следовательно, во всей области Δ_ρ^*.

В случае же, когда

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{M_n} = +\infty$$

функция $T(r)$ непрерывна и монотонно возрастающая на всей полуоси $(0, +\infty)$. Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = \Phi_\rho(-1-z), \tag{3.53}$$

аналитическую уже в замкнутой угловой области $\overline{\Delta}_\gamma$, раствора π/γ $\left(\gamma = \dfrac{1}{1+\alpha}\right)$ и в силу (3.52) удовлетворяющую там неравенству

$$|F(z)| \leqslant A_1 \frac{|z+1|^{\rho-1}}{T(B^{-1}|z+1|)}, \quad z \in \overline{\Delta}_\gamma. \tag{3.52'}$$

Так как функция $T(r)$ возрастающая и стремится к $+\infty$ быстрее любой степени r, то из (3.52′), во-первых, следует, что

$$\max_{z\in\overline{\Delta}_\gamma} \{|F(z)|\} < A_2 < +\infty. \tag{3.54}$$

Во-вторых, выбирая $r_0 \geqslant 2$ таким образом, чтобы

$$P(r) \equiv A_1 \frac{(r+1)^{\rho-1}}{T\left(\dfrac{r-1}{B}\right)} \leqslant 1, \quad r > r_0 \tag{3.55}$$

и определив неотрицательную функцию

$$p(r) = \begin{cases} 0, & r \in [0, r_0], \\ -\log P(r), & r \in [r_0, +\infty) \end{cases} \tag{3.55'}$$

из (3.52′) и (3.55) приходим к неравенству

$$|F(re^{i\varphi})| \leqslant A_2 e^{-p(r)} \quad \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\gamma},\ 0 \leqslant r < +\infty\right). \tag{3.56}$$

С другой стороны, как следует из (3.55) и (3.55′),

$$\int_{r_0}^{+\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = -\int_{r_0}^{+\infty} \frac{\log[A_1(1+r)^{\rho-1}]}{r^{1+\gamma}}\, dr +$$

$$+ \int_{r_0}^{+\infty} \frac{\log T\left(\dfrac{r-1}{B}\right)}{r^{1+\gamma}}\, dr, \quad \gamma = \frac{1}{1+\alpha},$$

причем первый интеграл правой части сходится, а второй, очевидно, расходится одновременно с интегралом (3.20).

Итак, наша функция $F(z)$ удовлетворяет неравенству (3.56), причем

$$\int^{\infty} \frac{p(r)}{r^{1+\gamma}} dr = +\infty.$$

Отсюда, согласно теореме A (1°), вытекает тождество $F(z) \equiv 0$, $z \in \overline{\Delta}_\gamma$, и следовательно, в силу (3.53), и тождество $\Phi_\rho(z) \equiv 0$, $z \in \overline{\Delta}^*_\rho(-1)$. Наконец, поскольку $\Phi_\rho(z)$ аналитична во всей области $\Delta^*_\rho \supset \overline{\Delta}^*_\rho\ (-1)$, то отсюда следует требуемое тождество (3.50).

Из (3.38) и тождества (3.50) согласно лемме 5 вытекает, что $\varphi(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x < +\infty$. Этим и завершается доказательство достаточности условия (3.20).

Итак, теорема полностью доказана.

3.3. (a) По определению [2.2 (a)] класс C^∞_α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ — это совокупность функций, бесконечно дифференцируемых на полуоси $[0 + \infty)$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} |(1 + x^{2m})\, \varphi^{(n)}(x)| < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots).$$

Теперь для данной последовательности положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$ обозначим через $C_\alpha\ \{[0, +\infty);\ M_n\}$ подмножество функций $\varphi(x)$ из класса $C^{(\infty)}_\alpha$, для которых

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} |(1 + \alpha x^2)\, \varphi^{(n)}(x)| < AB^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{3.57}$$

где постоянные $A = A(\varphi) > 0$ и $B = B(\varphi) > 0$ могут зависеть от выбора функции $\varphi(x)$.

Заметим, что в крайнем случае, когда $\alpha = 0$, класс $C_0\ \{[0, +\infty);\ M_n\}$ совпадает с множеством бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant A \cdot B^n M_n \qquad (n = 1, 2, \cdots), \tag{3.57'}$$

т. е. с классом, для которого в свое время ставилась проблема Адамара.

Как в случае классов $C^*_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}$, так и для классов $C_\alpha\ \{[0, +\infty);\ M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ мы будем ставить вопрос:

Какова должна быть последовательность чисел $\{M_n\}_1^\infty$, *чтобы для любой пары функций* $\varphi(x)$ *и* $g(x)$ *из класса* $C_\alpha\ \{[0, +\infty);\ M_n\}$ *из равенств*

$$D^{n/\rho}_\infty \varphi(0) = D^{n/\rho}_\infty g(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.58}$$

следовало бы, что

$$\varphi(x) \equiv g(x) \quad (0 \leqslant x < +\infty). \tag{3.59}$$

Как и в случае классов $C^*_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}$, для этого достаточно установить критерий для последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, обеспечивающий выполнение тождества $\varphi(x) \equiv 0$ $(0 \leqslant x < +\infty)$ для каждой функции $\varphi(x) \in C_\alpha\ \{[0, +\infty);\ M_n\}$, удовлетворяющей условиям

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0)=\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_{0}^{+\infty}x^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(x)\,dx=0\quad(n=0,1,2,\cdots),\tag{3.60}$$

где, как обычно, $\frac{1}{\rho}=1-\alpha$ $(\rho>1)$.

И в этом случае такого рода классы $C_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ будем называть *α-квазианалитическими*.

При этом очевидно, что 0-квазианалитические классы $C_0\{[0,+\infty);\ M_n\}$, как и классы $C_0^*\{[0,+\infty);\ M_n\}$—это классы, квазианалитические в обычном смысле.

Критерий α-квазианалитичности классов $C_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$ также формулируется в терминах функции

$$T(r)=\sup_{n\geqslant1}\frac{r^n}{M_n}$$

и, чтобы установить его нам придется существено использовать теорему 3 о α-квазианалитичности классов $C_\alpha^*\{[0,+\infty);\ M_n\}$.

(б) Докажем теперь следующую теорему относительно α-квазианалитичности классов $C_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$, которая в крайнем случае, когда значение параметра $\alpha=0$, также сводится к классической теореме Данжуа—Карлемана.

Теорема 4. *Для того чтобы класс $C_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$ был α-квазианалитическим необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty.\tag{3.61}$$

Доказательство. 1°. Необходимость. Докажем, что, если

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr<+\infty,\tag{3.62}$$

то существует нетривиальная функция $\varphi(x)$ из класса $C_\alpha\{[0,+\infty);\ M_n\}$, удовлетворяющая условиям (3.60)

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0)=0\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

С этой целью заметим, что поскольку $\rho=\frac{1}{1-\alpha}$, то из (3.62) следует, что

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{\log T(r^\rho)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr<+\infty.$$

Поэтому, если $p(r)$ — функция, определенная согласно формуле (3.11), то

$$\int_1^{+\infty} \frac{p(r^\rho)}{r^{1+\gamma}}\, dr < +\infty, \quad \gamma = \frac{1}{1+\alpha}. \tag{3.62'}$$

Определим теперь неубывающую на $[0, +\infty)$ функцию $q_0(r)$, положив

$$q_0(r) = p_0(r^\rho), \quad r \in [0, +\infty),$$

где $p_0(r)$ — функция, определенная уже согласно (3.11′).

Таким образом, будем иметь

$$q_0(r) = \begin{cases} p(r_0) + 2\log(1 + r_0^{-1} r^\rho), & r \in [0, r_0^{1/\rho}], \\ p(r^\rho) + 2\log(1 + r_0^{-1} r^\rho), & r \in [r_0^{1/\rho}, +\infty), \end{cases} \tag{3.63}$$

откуда и из (3.62′) заключаем, что

$$\int_1^{+\infty} \frac{q_0(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr < +\infty, \quad \gamma = \frac{1}{1+\alpha}.$$

Но тогда, поступая так же, как и в ходе доказательства теоремы 3, мы можем утверждать, что для любого $\nu > 0$ существует функция $F_\nu(z) \not\equiv 0$, аналитическая в области $\overline{\Delta}_\rho^*(\nu) \supset \Delta_\rho^*$ и удовлетворяющая там неравенству

$$|F_\nu(z)| \leqslant \exp\{-q_0(|z - \nu^{1/\rho}|)\} =$$

$$= \exp\{-p_0(|z - \nu^{1/\rho}|^\rho)\}, \quad z \in \overline{\Delta}_\rho^*(\nu). \tag{3.64}$$

Эта функция, согласно теореме 1, допускает представление

$$F_\nu(z) = \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zx^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) x^{\frac{1}{\rho}-1} \varphi_\nu(x)\, dx, \quad z \in \Delta_\rho^*,$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho^*(\nu)} e^{-x\zeta^\rho} F_\nu(\zeta)\, d\zeta, \quad x \in [0, +\infty). \tag{3.65}$$

Очевидно, что функция $\varphi(x)$ не тривиальна, бесконечно дифференцируема на полуоси $[0, +\infty)$, причем для ее производных имеют место представления (3.32) и оценки (3.33), т. е.

$$\varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_{L_\rho(\nu)} e^{-x\zeta^\rho} \zeta^{\rho n} F_\nu(\zeta)\, d\zeta \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

и

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant \frac{e^{-\nu x}}{2\pi} \int_{L_\rho(\nu)} |\zeta|^{\rho n} |F_\nu(\zeta)|\, |d\zeta| \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.66}$$

Точно так же, как и в теореме 3, отсюда мы получим, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

т. е. условиям (3.60).

Из оценок (3.66), очевидно, вытекает, что $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{(\infty)}$, т. е.

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+x^{2m})\varphi^{(n)}(x)|<+\infty \quad (n, m=0,1,2,\cdots).$$

Но более того: из оценок (3.66), (3.65), (3.64) и (3.63) получим также, что на полуоси $[0,+\infty)$

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant C_2 e^{-\nu x}\max_{\zeta\in L_\rho(\nu)}\{|\zeta|^{\rho n}\exp\{-p(|\zeta-\nu^{1/\rho}|^{\rho})\}\}, \tag{3.66'}$$

где очевидно

$$C_2(\nu)=\frac{1}{2\pi}\int_{L_\rho(\nu)}\frac{|d\zeta|}{(1+r_0^{-1}|\zeta|)^2}<+\infty.$$

На основании леммы 10 (при $\beta=\rho$) из (3.66′) вытекают далее неравенства

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant e^{-\nu x}AB^n M_n;\ x\in[0,+\infty) \quad (n=1,2,\cdots), \tag{3.67}$$

где $\nu>0$ — произвольно, а постоянные $A>0$ и $B>0$, разумеется, зависят от ν.

Заменив в (3.67) параметр ν через 2ν и заметив еще, что

$$\max_{0<x<+\infty}\{(1+\alpha x^2)e^{-\nu x}\}\leqslant 1+4\alpha(e\nu)^{-2},$$

из неравенств (3.67) заключаем, что для любого $\nu>0$

$$\sup_{0<x<+\infty}|e^{\nu x}(1+\alpha x^2)\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^n M_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{3.67'}$$

где $A=A(\nu)>0$ и $B=B(\nu)>0$ также зависят от ν.

Наконец, из (3.67′), в частности, вытекает, что

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+\alpha x^2)\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^n M_n \quad (n=1,2,\cdots),$$

т. е. что $\varphi(x)\in C_\alpha\{[0,+\infty);M_n\}$.

Этим и завершается доказательство необходимости условия (3.61) теоремы.

2°. *Достаточность.* Докажем теперь, что при выполнении условия (3.61) теоремы, класс $C_\alpha\{[0,+\infty);M_n\}$ будет α-квазианалитическим, т. е. любая функция $\varphi(x)$ этого класса, для которой $D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0)=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$, тождественно равна нулю на всей полуоси $[0,+\infty)$.

Заметим сначала, что при $\alpha=0$ условия (3.20) и (3.61) теорем 3 и 4 совпадают, принимая вид

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^2}dr=+\infty.$$

Классы же $C_0^*\{[0, +\infty); M_n\}$ и $C_0\{[0, +\infty); M_n\}$ также совпадают с классом бесконечно дифференцируемых на $[0, +\infty)$ функций, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0 \le x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant A B^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots).$$

То обстоятельство, что при $\alpha = 0$ условие (3.61) достаточно, было установлено уже нами в теореме 3.

По этой причине ниже мы положим, что $0 < \alpha < 1$ $(\rho > 1)$.

Итак, допустим, что $\varphi(x) \in C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0 < \alpha < 1)$ и воспользуемся формулой (2.30) леммы 6, согласно которой

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = (-1)^k D_\infty^{-(\alpha n - k)} \varphi^{(n-k)}(x) \; (n = 1, 2, \cdots; \; k=0, 1, \cdots, [\alpha n]).$$

Для значения $k = [\alpha n]$ эти формулы запишутся в виде

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]} D_\infty^{-(\alpha n - [\alpha n])} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x) =$$

$$= \frac{(-1)^{[\alpha n]}}{\Gamma(\alpha n - [\alpha n])} \int\limits_x^{+\infty} (t - x)^{\alpha n - [\alpha n] - 1} \varphi^{(n-[\alpha n])}(t) \, dt \; (n=1, 2, \cdots), \tag{3.68}$$

причем, если для данного $n \geqslant 1$ αn — целое, т. е. $[\alpha n] = \alpha n$, то их следует заменить формулами

$$D_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x). \tag{3.68'}$$

Покажем теперь, что

$$\sup_{0 \le x < +\infty} |D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant A_1 B_1^n M_{n-[\alpha n]} \; (n=1,2,\cdots), \tag{3.69}$$

где $A_1 > 0$ и $B_1 > 0$ — подходящим образом выбранные постоянные.

Для этого заметим, что поскольку $\varphi(x) \in C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$, то по определению (3.57) будем иметь

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant A \frac{B^n M_n}{1 + \alpha x^2}; \; x \in [0, +\infty) \; (n = 1, 2, \cdots). \tag{3.57'}$$

Поэтому, если для данного $n \geqslant 1$ число $\alpha n = [\alpha n]$ — целое, то оценка (3.69) непосредственно следует из формулы (3.68′).

Если же αn — не целое число, то, положив $\alpha n = [\alpha n] + \theta_n$ $(0 < \theta_n < 1)$, из (3.68) и (3.57′) получим неравенство

$$|D_\infty^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant A \frac{B^{n-[\alpha n]} M_{n-[\alpha n]}}{\Gamma(\theta_n)} \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{\theta_n - 1}}{1 + \alpha t^2} dt, \; x \in [0, +\infty). \tag{3.70}$$

Однако, пользуясь значением и оценкой интеграла Эйлера

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^{\theta_n/2 - 1}}{1 + x} dx = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi \theta_n}{2}} \leqslant \frac{\pi}{\theta_n} \; (0 < \theta_n < 1),$$

получим

$$\frac{1}{\Gamma(\theta_n)}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\theta_n-1}}{1+\alpha t^2}dt=\frac{\alpha^{-\frac{\theta_n}{2}}}{2\Gamma(\theta_n)}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{\theta_n}{2}-1}}{1+x}dx<\frac{\pi}{2\alpha\Gamma(1+\theta_n)}.$$

Отсюда и из (3.70) приходим к неравенствам (3.69), поскольку

$$\min_{0<s<1}\Gamma(1+s)=G_0>0$$

и

$$B^{n-[\alpha n]}=B^{(1-\alpha)n+\theta_n}\leqslant C_1B_1^n,$$

где $B_1=B^{1-\alpha}$ и $C_1=\max\{1, B\}$.

Итак, неравенства (3.69) установлены для любого $n\geqslant 1$.

С другой стороны, так как $\varphi(x)\in C_\alpha^{(*)}$ и, следовательно, согласно лемме 6, $\varphi(x)\in C_\alpha^{*(*)}$, то неравенства (3.69) означают, что $\varphi(x)\in C_\alpha^*\{[0,+\infty);\ M_n^*\}$, где

$$M_n^*=M_{n-[\alpha n]}\ (n=1,2,\cdots).\tag{3.71}$$

Введем, наконец, в рассмотрение функцию

$$T^*(r)=\sup_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{M_n^*}=\sup_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{M_{n-[\alpha n]}}\tag{3.72}$$

и заметим, что последовательность $\{n-[\alpha n]\}_1^\infty$ пробегает весь натуральный ряд чисел, ввиду чего

$$T(r)=\sup_{n\geqslant 1}\frac{r^n}{M_n}\equiv\sup_{n\geqslant 1}\frac{r^{n-[\alpha n]}}{M_{n-[\alpha n]}}.\tag{3.73}$$

Из (3.73) следует

$$T(r^\rho)=\sup_{n\geqslant 1}\frac{r^{\rho\{n-[\alpha n]\}}}{M_n^*}=\sup_{n\geqslant 1}\frac{r^{n+\rho\theta_n}}{M_n^*},$$

где $\theta_n=\alpha n-[\alpha n]$, т. е. $0\leqslant\theta_n<1$.

Отсюда и из (3.72) вытекает неравенство

$$T(r^\rho)\leqslant r^\rho\,T^*(r),\ r\geqslant 1$$

и, следовательно, неравенство

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T^*(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}dr\geqslant-\rho\int_1^{+\infty}\frac{\log r}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}dr+$$

$$+\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r^\rho)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}dr.\tag{3.74}$$

Наконец, так как

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r^\rho)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}dr=(1-\alpha)\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}dr=+\infty,$$

согласно условию (3.61) теоремы, а первый интеграл, стоящий в правой части неравенства (3.74), сходится, то будем иметь

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T^*(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\varepsilon}}} dr = +\infty.$$

Итак, функция $\varphi(x) \in C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n^*\}$ удовлетворяет условиям $D_*^{n/p}\varphi(0) = 0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, причем для соответствующей функции $T^*(r)$ выполняется условие (3.20) теоремы 3. Отсюда и следует, что $\varphi(x) \equiv 0$ $(0 \leqslant x < +\infty)$, согласно теореме 3. Таким образом, доказательство теоремы завершено.

3.4. (a) Понятие α-квазианалитичности можно ввести и для классов функций, бесконечно дифференцируемых на конечном отрезке.

Определим следующие два класса бесконечно дифференцируемых функций на $[0, l]$ $(0 < l < +\infty)$, ассоциированных с данной последовательностью положительных чисел $\{M_n\}_1^\infty$.

Класс $C_\alpha\{[0, l]; M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$ функций $\varphi(x)$, обладающих на $[0, l]$ всеми последовательными производными в смысле Римана-Лиувилля с концом в точке $x = l$

$$D_l^{n/p}\varphi(x) \qquad (n=0, 1, 2, \cdots),$$

непрерывными на $[0, l]$ и удовлетворяющими условиям

$$|D_l^{n/p}\varphi(x)| \leqslant AB^n M_n; \ x \in [0, l] \ (n = 1, 2 \cdots), \tag{3.75}$$

где, как всегда, $1/p = 1 - \alpha$.

Класс $C\{[0, l]; M_n\}$ функций $\varphi(x)$, бесконечно дифференцируемых на $[0, l]$ и удовлетворяющих условиям

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n; \ x \in [0, l] \ (n=1, 2, \cdots). \tag{3.76}$$

При этом, как обычно, постоянные $A = A(\varphi) > 0$ и $B = B(\varphi) > 0$, вообще говоря, зависят от индивидуальной функции соответствующего класса.

Каждый из определенных выше классов будем называть *α-квазианалитическим*, если для любой пары функций $\varphi(x)$ и $g(x)$, принадлежащих данному классу, из совпадения чисел

$$\varphi^{(n)}(l) = g^{(n)}(l), \ D_l^{n/p}\varphi(0) = D_l^{n/p}g(0) \ (n = 0, 1, 2 \cdots), \tag{3.77}$$

вытекает тождество

$$\varphi(x) \equiv g(x), \ 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Очевидно, что, ввиду аддитивности наших классов, вопрос их α-квазианалитичности может быть сформулирован таким образом:

Указать условия для последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы для каждой функции $\varphi(x)$ из класса $C\{[0, l]; M_n\}$ либо из класса $C_\alpha^*\{[0, l]; M_n\}$ из равенства нулю чисел

$$\varphi^{(n)}(l) = D_l^{n/p}\varphi(0) = 0 \ (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{3.78}$$

вытекало бы, что

$$\varphi(x) \equiv 0, \ 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Как и в предыдущем пункте мы сначала установим условие α-квазианалитичности классов $C_\alpha^*\{[0, l]; M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$, а затем лишь приведем решение задачи для класса $C\{[0, l]; M_n\}$. При этом мы существенно будем опираться на результаты теорем 3 и 4.

Теорема 5. *Для α-квазианалитичности класса* $C_\alpha^*\{[0, l]; \mu_n\}$ $(0 < \alpha < 1)$ *условие*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty \tag{3.79}$$

достаточно, а при дополнительном требовании, что

$$r^{-\frac{1}{1+\alpha}} \log T(r) \downarrow 0 \text{ при } r \uparrow +\infty \tag{3.80}$$

оно и необходимо.

Доказательство. 1°. Достаточность. Пусть функция $\varphi(x) \in C_\alpha^*\{[0, l]; M_n\}$ удовлетворяет условиям (3.78). Это значит [2.3 (a)], что функция $\varphi(x)$ входит также и в класс $C_\alpha^{(\infty)}$ и поэтому, согласно лемме 8, будем иметь

$$D_l^{n/\rho} \varphi(x) = D_l^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

и, в частности,

$$D_l^{n/\rho} \varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int\limits_0^l x^{\alpha n - 1} \varphi^{(n)}(x)\, dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.78'}$$

Но тогда определение функции $\varphi(x)$ можно распространить на всю полуось $[0, +\infty)$, положив $\varphi(x) \equiv 0$ при $x \in [l, +\infty)$. Ввиду того, что $\varphi^{(n)}(l) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, мы таким образом получим функцию $\varphi_*(x)$, для которой

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi_*(x) = \begin{cases} D_l^{n/\rho} \varphi(x), & x \in [0, l] \\ 0, & x \in [l, +\infty) \end{cases} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Отсюда следует, что эта функция $\varphi_*(x)$ входит также и в класс $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$, причем

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi_*(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha n - 1} \varphi_*^{(n)}(x)\, dx =$$

$$= D_l^{n/\rho} \varphi(0) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots).$$

Но тогда, ввиду условия (3.79) и согласно теореме 3, заключаем, что $\varphi_*(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x < +\infty$, т. е. $\varphi(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$.

2°. Необходимость. Нужно установить, что, если условие (3.79) не выполняется, т. е., если

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr < +\infty, \tag{3.81}$$

то при дополнительном требовании (3.80) существует нетривиальная функция $\varphi(x) \in C_\pi^*\{[0, l]; M_n\}$, удовлетворяющая условиям (3.78).

Это делается тем же способом, что и в соответствующем месте доказательства теоремы 3. Ввиду этого мы лишь отметим основные моменты, опуская подробности.

Построим неубывающую на $[0, +\infty)$ функцию $p_0(r) \geqslant 0$, положив

$$p_0(r) = p(r) + 2\log(1 + r_0^{-1} r), \ r > 0,$$

где функция $p(r)$ вновь определяется согласно (3.11).

Тогда из (3.80) и (3.81) следует, что

$$r^{-\gamma} p_0(r) \downarrow 0, \ r \uparrow +\infty; \ \int_1^{+\infty} \frac{p_0(r)}{r^{1+\gamma}} dr < +\infty, \tag{3.82}$$

где $\gamma = \frac{1}{1+\alpha} \left(\frac{1}{2} < \gamma \leqslant 1\right)$.

Но в условиях (3.82), согласно теореме Б, существует целая функция $f(z) \not\equiv 0$ порядка

$$\rho = \frac{1}{1-\alpha} = \max\left\{\gamma, \frac{\gamma}{2\gamma - 1}\right\}$$

и типа l, удовлетворяющая неравенству

$$|f(re^{i\varphi})| \leqslant \exp\{-p_0(r)\} \left(|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2\gamma}, \ 0 \leqslant r < +\infty\right) \tag{3.83}$$

в угловой области $\overline{\Delta}_\gamma$ раствора π/γ.

Далее, для фиксированного значения $\nu > 0$ рассматриваем целую функцию

$$f_\nu(z) = f(-z + \nu^{1/\rho}),$$

также имеющую порядок ρ и тип l, удовлетворяющую неравенству

$$|f_\nu(z)| \leqslant \exp\{-p_0(|z - \nu^{1/\rho}|)\}, \ z \in \overline{\Delta}_\rho^*(\nu)$$

в угловой области $\overline{\Delta}_\rho^*(\nu) \supset \Delta_\rho^*$.

Таким образом, функция $f_\nu(z)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, и, ввиду этого, она допускает интегральное представление

$$f_\nu(z) = \int_0^l E_\rho\left(zx^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) x^{\frac{1}{\rho}-1} \varphi(x)\, dx, \tag{3.84}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\rho} e^{-x\zeta^\rho} f_\nu(\zeta)\, d\zeta, \ x \in [0, +\infty). \tag{3.85}$$

Точно так же, как и в теореме 3, доказывается, что функцию $\varphi(x)$ можно представить также и в виде

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\varphi(\cdot)} e^{-x\zeta^{\rho}} f(\zeta)\, d\zeta, \quad x \in [0, +\infty). \tag{3.85'}$$

Очевидно, что $\varphi(x) \not\equiv 0$, причем согласно теореме 2 мы имеем

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad x \in [l, +\infty). \tag{3.86}$$

Как уже было установлено в теореме 3 функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ и удовлетворяет условиям

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

Но из (3.86) следует, что

$$D_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = \begin{cases} D_l^{n/\rho} \varphi(x), & \text{при } x \in [0, l], \\ 0, & \text{при } x \in [l, +\infty), \end{cases}$$

откуда получим

$$|D_l^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant \sup_{0<x<+\infty} |D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A B^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots),$$

а также

$$D_l^{n/\rho} \varphi(0) = D_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots).$$

Таким образом, $\varphi(x)$ будет искомой нетривиальной функцией из класса $C_\alpha^*\{[0, l]; M_n\}$, подчиненной всем условиям (3.78), так как, ввиду бесконечной дифференцируемости функции $\varphi(x)$, из (3.86) следует также, что $\varphi^{(n)}(x) \equiv 0$, $x \in [l, +\infty)$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$. Теорема полностью доказана.

(б) Установим, наконец, критерий α-квазианалитичности для класса $C\{[0, l]; M_n\}$.

Теорема 6. *Для α-квазианалитичности класса $C\{[0, l]; M_n\}$ условие*

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty \tag{3.87}$$

достаточно, а при дополнительном требовании

$$r^{-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \log T(r) \downarrow 0 \quad \text{при} \quad r \uparrow +\infty \tag{3.88}$$

оно и необходимо.

Доказательство. 1°. Достаточность. Пусть функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $C\{[0, l]; M_n\}$ и удовлетворяет условиям (3.78). Тогда, поскольку $\varphi^{(n)}(l) = 0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$, то можно распространить определение функции $\varphi(x)$ на всю полуось $[0, +\infty)$, положив ее равной нулю на $[l, +\infty)$ и сохранив при этом ее бесконечную дифференцируемость на всей полуоси $[0, +\infty)$.

В результате мы получим функцию $\varphi_*(x)$ на $[0, +\infty)$, удовлетворяющую условиям

$$|\varphi_*^{(n)}(x)| \leqslant \begin{cases} AB^n M_n; & x \in [0, l] \\ 0 \quad ; & x \in [l, +\infty), \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{3.89}$$

причем очевидно

$$D_-^{n/\rho}\varphi_*(0) = D_l^{n/\rho}\varphi(0) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots). \tag{3.90}$$

Но из (3.89) следует также, что

$$\sup_{0 \leqslant x < +\infty} |(1 + \alpha x^2)\varphi_*^{(n)}(x)| \leqslant (1 + \alpha l^2)\ AB^n M_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

а это значит, что $\varphi_*(x) \in C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$.

Но тогда из условий (3.87) и (3.90) согласно теореме 4 следует, что $\varphi_*(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x < +\infty$, т. е. что $\varphi(x) \equiv 0$, $0 \leqslant x \leqslant l$.

2°. Необходимость. Нужно доказать, что, если (3.87) не имеет места, т. е., если

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1 + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr < +\infty, \tag{3.91}$$

то при дополнительном требовании (3.88) теоремы существует нетривиальная функция $\varphi(x) \in C\{[0, l]; M_n\}$; удовлетворяющая условиям (3.78).

С этой целью заметим, что условия (3.88) и (3.91) можно записать также в виде

$$r^{-\frac{1}{1+\alpha}} \log T(r^\rho) \downarrow 0, \quad r \uparrow +\infty, \tag{3.88'}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r^\rho)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr < +\infty. \tag{3.91'}$$

Но тогда, определив функцию $q_0(r)$, как в теореме 4, согласно формуле (3.63) будем иметь

$$r^{-\gamma} q_0(r) \downarrow 0,\ r \uparrow +\infty \ \text{и} \int_1^{+\infty} \frac{q_0(r)}{r^{1+\gamma}} dr < +\infty, \tag{3.92}$$

где $\gamma = \dfrac{1}{1+\alpha}$.

А в силу условий (3.92), как и в теореме 5, вновь можно воспользоваться теоремой Б и теоремой 2, утверждая, что для любого $\nu > 0$ существует целая функция $f_\nu(z) \not\equiv 0$ порядка ρ и типа l, для которой справедливы оценки

$$|f_\nu(z)| \leqslant \exp\{-q_0(|z - \nu^{1/\rho}|)\} =$$

$$= \exp\{-p_0(|z - \nu^{1/\rho}|^\rho)\}, \quad z \in \overline{\Delta}_\rho(\nu))$$

и представление (3.84)—(3.85), где функция $\varphi(x) \not\equiv 0$ бесконечно дифференцируема на $[0, +\infty)$, причем

$$\varphi^{(n)}(l)=\varphi^{(n)}(x)\equiv 0;\ x\in[l,+\infty)\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

Далее точно так же, как и в теореме 4, убеждаемся, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет и второму из условий (3.88)

$$D_l^{n\varphi}\varphi(0)=0\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

Наконец, как и в теореме 4, воспользовавшись леммой 10 (при $\beta=\rho$), приходим к заключению, что

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant e^{-\nu x}AB^nM_n;\ x\in[0,+\infty)\ (n=1,2,\cdots)$$

и, значит, к неравенствам

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^nM_n;\ x\in[0,l]\ (n=1,2,\cdots).$$

Таким образом, $\varphi(x)$ и будет искомой функцией класса $C\{[0,l];M_n\}$. Теорема доказана.

(в) В заключение статьи сделаем следующее важное замечание.

В теоремах 4 и 6 утверждается α-квазианалитичность классов $C_\alpha\{[0,+\infty);M_n\}$ и $C\{[0,l];M_n\}$ при одном и том же условии

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty. \tag{3.93}$$

Поскольку $0<\frac{1-\alpha}{1+\alpha}<1$ при $0<\alpha<1$, то таким образом в α-квазианалитических классах $C_\alpha\{[0,+\infty);M_n\}$ и $C\{[0,l];M_n\}$ функция $T(r)$ может иметь значительно более медленный рост, чем в классах $C_0\{[0,+\infty);M_n\}$ и $C\{[0,l];M_n\}$, квазианалитических в обычном смысле. А это значит, что в этих классах для последовательных производных функций допускается значительно более быстрый рост, чем в классах, квазианалитических в смысле Данжуа—Карлемана.

В самом деле, например, если

$$M_n=(n^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\log n\cdots\log_p n)^n,\ n\geqslant N_p\ (p\geqslant 1),$$

то легко видеть, что условие (3.93) выполняется и, таким образом, соответствующие классы $C_\alpha\{[0,+\infty);M_n\}$ и $C\{[0,l];M_n\}$ α-квазианалитичны согласно теоремам 4 и 6.

Между тем, так как $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}>1$ при $0<\alpha<1$, то указанные классы заведомо неквазианалитичны в смысле Данжуа—Карлемана.

Таким образом, для значений $0<\alpha<1$ параметра α, α-квазианалитичные классы $C_\alpha\{[0,+\infty);M_n\}$ и $C\{[0,l];M_n\}$ существенно шире по сравнению с соответствующими обычными квазианалитическими классами $C_0\{[0,+\infty);M_n\}$ и $C\{[0,l];M_n\}$, совпадая с последними лишь в крайнем случае, когда значение параметра $\alpha=0$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 15.I.1968

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ

ԴԱՆԺՈՒԱ–ԿԱՌԼԵՄԱՆԻ ՔՎԱԶԻԱՆԱԼԻՏԻԿ ԴԱՍԵՐԻ ԸՆԴԼԱՅՆՈՒՄԸ

Ամփոփում

$I=(a, b)$ միջակայքում անվերջ դիֆերենցելի և

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^nM_n \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ldots), \tag{1}$$

որտեղ $A=A(\varphi)>0$ և $B=B(\varphi)>0$ հաստատուններ են, պայմաններին բավարարող $\varphi(x)$ ֆունկցիաների $C\{M_n\}$ դասի քվազիանալիտիկության Ժ. Հադամարի պրոբլեմի լուծումը տրվել է Դանժուայի կողմից, իսկ վերջնական տեսքով՝ Կառլեմանի։

Կառլեմանի թեորեմը Ա. Օստրովսկու ձևակերպմամբ պնդում է հետևյալը։

Որպեսզի $C\{M_n\}$ դասը լինի քվազիանալիտիկ, այսինքն որպեսզի այդ դասի յուրաքանչյուր $\varphi(x)$ ֆունկցիայի համար $\varphi^{(n)}(x_0)=0$, $x_0\in I$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ldots)$ հավասարություններից հետևի, որ $\varphi(x)\equiv 0$, $x\in I$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln T(r)}{r^2}\,dr,\quad T(r)=\sup_{n\geq 1}\frac{r^n}{M_n} \tag{2}$$

ինտեգրալը լինի տարամետ։

Այս թեորեմի կապակցությամբ բնականորեն ծագում է հետևյալ հարցը։

Եթե *(2)* ինտեգրալը զուգամետ է և, այսպիսով, $C\{M_n\}$ դասը քվազիանալիտիկ չէ $[0,+\infty)$-ում կամ $[0,l]$-ում, ապա $\varphi^{(n)}(x_0)$ արժեքների հաջորդականության փոխարեն որ տվյալներն են, որ այդ դասի ֆունկցիաները որոշում են միակ ձևով։

Ներկա հոդվածում ներմուծվում է α-քվազիանալիտիկության գաղափարը, որը, մասնավորապես, ընդգրկում է նաև քվազիանալիտիկության կլասիկ գաղափարը և տրվում է դրված խնդրի լրիվ լուծումը։

1⁰. Ինչպես Հադամարի պրոբլեմի սկզբնական լուծումը, այնպես էլ α-քվազիանալիտիկության խնդրի լուծումը, տարվում է այն Վատսոնի պրոբլեմին հանգեցնելու մեթոդով։ Նման հանգեցումը հաջողվում է իրականացնել միայն Միտտագ-Լեֆլերի

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{k=0}\frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})} \tag{3}$$

կորիզներով ֆունկցիաների ներկայացման և ինտեգրալ ձևափոխությունների ապարատի օգնությամբ։

Այստեղ էական դեր են խաղում հետևյալ երկու թեորեմները (§1)

Թեորեմ 1. Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է

$$\Delta_\rho^*=\left\{z;\ \frac{\pi}{2\rho}<|\arg z|\leqslant\pi,\quad 0\leqslant|z|<+\infty\right\} \qquad (\rho>{}^1\!/_2)$$

տիրույթի ներսում և անընդհատ է փակ տիրույթում, ընդ որում $z=\infty$ կետի շրջակայքում

$$\max_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\left\{|f(re^{i\varphi})|\right\}=O(r^{-\omega})\qquad(\omega>1). \tag{4}$$

Այդ դեպքում տեղի ունի հետևյալ ինտեգրալ ներկայացումը

$$f(z)=\int_0^{+\infty}E_\rho(zt^{1/\rho};1/\rho)t^{1/\rho-1}\varphi(t)dt,\quad z\in\Delta_\rho^*, \tag{5}$$

որտեղ

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}e^{-t\zeta^\rho}f(\zeta)d\zeta,\qquad t\in[0,+\infty), \tag{6}$$

իսկ L_ρ-ն Δ_ρ^* տիրույթի եզրն է շրջանցված դրական ուղղությամբ:

Թեորեմ 2. Եթե $f(z)$-ը $\rho>{}^1/_2$ կարգի և $\sigma(0<\sigma<+\infty)$ տիպի ամբողջ ֆունկցիա է, որը բավարարում է 1 թեորեմի *(4)* պայմանին, երբ $\omega>\max\left\{1,\frac{1}{\rho}\right\}$, ապա *(5)—(6)* ներկայացման մեջ կունենանք $\varphi(t)\equiv 0, t\in[\sigma,+\infty)$:

2⁰. Դիտարկվում է $[0,+\infty)$ կիսաառանցքի վրա անվերջ դիֆերենցելի այն $\varphi(x)$ ֆունկցիաների $C_\alpha^{(\infty)}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ բազմությունը, որոնք բավարարում են

$$\sup_{0<x<\infty}\left|(1+x^{\alpha m})\varphi^{(n)}(x)\right|<+\infty\qquad(m,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots) \tag{7}$$

պայմաններին:

Այնուհետև, $\varphi(x)\in C_\alpha^\infty$ $(0\leqslant\alpha<1)$ ենթադրության դեպքում, համարելով $\frac{1}{\rho}=1-\alpha$ $(\rho\geqslant1)$, դիտարկվում են $\varphi(x)$ ֆունկցիայի $\frac{n}{\rho}$ $(n=0,\ 1,\ldots)$ կարգերի Վեյլի իմաստով հաջորդական դիֆերենցման օպերատորները՝

$$D_\infty^{\frac{0}{\rho}}\varphi(x)\equiv\varphi(x),\quad D_\infty^{1/\rho}\varphi(x)\equiv\frac{d}{dx}D_\infty^{-\alpha}\varphi(x),$$

$$D_\infty^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x)\equiv D_\infty^{1/\rho}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x)\qquad(n=2,\ 3,\ldots), \tag{8}$$

որտեղ

$$D_\infty^{-\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)dt. \tag{9}$$

Վերջապես, դրական $\{M_n\}_1^\infty$ թվերի կամայական հաջորդականության համար *սահմանվում են անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների հետևյալ երկու դասերը* $C^*_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ դասը C^∞_*-ից այն ֆունկցիաների համախմբությունն է, որոնք բավարարում են

$$\sup_{0<x<+\infty}|D_\infty^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x)| \leqslant A\cdot B^n M_n \qquad (n=1, 2,\ldots) \tag{9}$$

պայմաններին և $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ դասը $C^{(\infty)}_\alpha$-ից այն $\varphi(x)$ ֆունկցիաների համախմբությունն է, որոնք բավարարում են

$$\sup_{0<x<+\infty}|(1+\alpha x^2)\,\varphi^{(n)}(x)| \leqslant A\cdot B^n M_n \quad (n=1, 2,\ldots) \tag{10}$$

պայմաններին:

Այս երկու դասերի համար դրվում է Հադամարի պրոբլեմին նմանօրինակ խնդիրը, որը բերվում է այդ պրոբլեմին պարամետրի $\alpha=0$ *արժեքի դեպքում։*

Ինչպիսի՞ն պետք է լինի $\{M_n\}_1^\infty$ *թվերի հաջորդականությունը, որպեսզի համապատասխան դասի յուրաքանչյուր* $\varphi(x)$ *ֆունկցիայի համար*

$$D_\infty^{\frac{n}{\rho}}\varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_0^{+\infty} x^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(x)dx = 0 \quad (n=0, 1, 2,\ldots) \tag{11}$$

հավասարություններից հետևի $\varphi(x)\equiv 0$ $(0\leqslant x<+\infty)$ *նույնությունը։*

Այսպիսի դասերը մենք անվանում ենք α-*քվազիանալիտիկ դասեր, ընդ որում* 0-*քվազիանալիտիկ* $C^*_0\{[0, +\infty); M_n\}$ *կամ* $C_0\{[0, +\infty); M_n\}$ *դասերը ակներևաբար համընկնում են* $[0, +\infty)$-*ի վրա* $C\{M_n\}$ *կլասսիկ իմաստով քվազիանալիտիկ դասերի հետ։*

Ապացուցված են հետևյալ հիմնական թեորեմները, որոնք տալիս են վերը սահմանված երկու դասերի α-*քվազիանալիտիկության խնդրի լուծումը։*

Թեորեմ 3. $C^*_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ դասի α-քվազիանալիտիկության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty, \tag{12}$$

Թեորեմ 4. $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ դասի α-քվազիանալիտիկության համար անհրաժեշտ է և բավարար, որպեսզի

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty, \tag{13}$$

Այս թեորեմներից յուրաքանչյուրը $\alpha=0$ *դեպքում հանգում է Դանժուա—*

— Կառլեմանի կլասիկ

Թեորեմին։ Էլեմենտար գնահատականները ցույց են տալիս որ եթե

$$M_n=\left(n^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\log n\cdots\log_p n\right)^n,\quad n\geqslant N_p, \tag{14}$$

որտեղ $p\geqslant 1$ — կամայական ամբողջ թիվ է, ապա (13) պայմանը բավարարվում է։ Այս օրինակը ցույց է տալիս, որ $C_\alpha\{[0,+\infty); M_n\}$ $(0<\alpha<1)$ դասը էապես լայն է սովորական քվազիանալիտիկ $C_0\{[0,+\infty); M_n\}$ դասից, քանի որ այդ դասի ֆունկցիաների հաջորդական ածանցյալները կարող են էապես ավելի արագ աճել $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}>1, \text{ երբ } 0<\alpha<1\right)$ քան այդ թույլատրելի է 0-քվազիանալիտիկ դասերի համար, որը երևում է, օրինակ, Դանժուայի սկզբնական արդյունքից, երբ

$$M_n=(n\log n\cdots\log_p n)^n,\quad n\geqslant N_p. \tag{14'}$$

3°. α-քվազիանալիտիկության գաղափարը ներմուծվում է նաև վերջավոր հատվածի վրա անվերջ դիֆերենցելի ֆունկցիաների դասի համար։ $C^*_\alpha\{[0,l]; M_n\}$ և $C_\alpha\{[0,l]; M_n\}$ դասերը սահմանվում են որպես $C^*_\alpha\{[0,\infty); M_n\}$ և $C_\alpha\{[0,\infty); M_n\}$ համապատասխան դասերի այն $\varphi(x)$ ֆունկցիաների ենթադասեր, որոնք բավարարում են $\varphi(x)=0$, $l\leqslant x<+\infty$ պայմանին։

Ապացուցված են հետևյալ թեորեմները.

Թեորեմ 5. $C^*_\alpha\{[0,l]; M_n\}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ դասի քվազիանալիտիկության համար բավարար է

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty$$

պայմանը, իսկ

$$r^{-\frac{1}{1+\alpha}}\log T(r)\downarrow 0,\quad r\uparrow+\infty$$

լրացուցիչ պահանջի առկայության դեպքում այն նաև անհրաժեշտ է։

Թեորեմ 6. $C\{[0,l]; M_n\}$ դասի α-քվազիանալիտիկության համար

$$\int_1^{+\infty}\frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty$$

պայմանը բավարար է, իսկ

$$r^{-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}\log T(r)\downarrow 0,\quad r\uparrow+\infty$$

լրացուցիչ պահանջի դեպքում այն նաև անհրաժեշտ է։

M. M. DŽRBAŠIAN

EXTENSION OF QUASIANALYTICAL CLASSES OF DENJOY—CARLEMAN

Summary

The solution of J. Hadamard's problem on the quasianalyticity of the class $C\{M_n\}$ of infinitely differentiable on an interval $(a; b) = I$ functions $\varphi(x)$ subject to the conditions

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n, \quad (n = 1, 2, 3, \cdots), \tag{1}$$

where $A = A(\varphi)$ and $B = B(\varphi)$ are constants, has been given by Denjoy (1) and in a complete form by Carleman.

As formulated by A. Ostrowski, Carleman's theorem states:

The divergence of the integral

$$\int_1^\infty \frac{\log T(r)}{r^2}\, dr = +\infty, \quad T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n} \tag{2}$$

is the necessary and sufficient condition of quasianalyticity of the class $C\{M_n\}$. This means, that the equalities $\varphi^{(n)}(x_0) = 0$, $x_0 \in I$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ for each function $\varphi(x) \in C\{M_n\}$ imply that

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad x \in I.$$

In connection with this theorem the following question arises.

Let the integral (2) be convergent so that the class $C\{M_n\}$ is not quasianalytical on $[0, +\infty)$ or on $[0, l]$. What has to replace the sequence $\varphi^{(n)}(x_0)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ in order the functions of the class to be defined uniquelly?

In the present paper the notion of α-quasianalyticity which imbeds the notion of classical quasianalyticity is introduced and the complete solution of the stated problem is given.

1. As in the case of the earlier solution of Hadamard's problem, the solution of the problem of α-quasianalyticity is obtained by reducing it to the Watson problem. This may be done with the aid of integral transform apparatus and the representation of the functions by Mittag-Leffler kernels

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{\rho}\right)}. \tag{3}$$

Essential here are the following two theorems:

Theorem 1. *Let the function $f(z)$ be analytical inside and continuous in the closed domain*

$$\overline{\Delta}_\rho^* = \left\{ z; \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leqslant \pi, \ 0 < |z| < +\infty \right\} \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right)$$

and in the neighbourhood of $z=\infty$ let

$$\max_{\frac{\pi}{2\rho}<|\varphi|<\pi}\{|f(re^{i\varphi})|\}=O(r^{-\omega})\qquad(\omega>1).\tag{4}$$

Then the integral representation

$$f(z)=\int_0^{+\infty}E_\rho(zt^{1/\rho};\,1/\rho)\,t^{1/\rho-1}\varphi(t)\,dt,\qquad z\in\Delta_\rho^*\tag{5}$$

is valid. Here

$$\varphi(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\rho}e^{-t\zeta^\rho}f(\zeta)\,d\zeta,\qquad t\in[0,+\infty)\tag{6}$$

and L_ρ is the boundary of Δ_ρ^*, which is being passed in positive direction.

Theorem 2. *If $f(z)$ is an entire function of order $\rho>\frac{1}{2}$ and type σ $(0<\sigma<\infty)$, satisfying condition (4) of theorem (1) with $\omega>\max\left\{1,\frac{1}{\rho}\right\}$, then in the representation* (5)—(6) $\varphi(t)\equiv 0$, $t\in[\sigma,+\infty)$.

2. Under consideration is the set $C_\alpha^{(\infty)}$ $(0\leqslant\alpha<1)$ of infinitely differentiable on $[0,+\infty)$ functions $\varphi(x)$ subject to the conditions

$$\sup_{0<x<\infty}|(1+x^{2m})\varphi^{(n)}(x)|<+\infty\qquad(m,n=0,1,2,\cdots).\tag{7}$$

Assuming that $\varphi(x)\in C_\alpha$ $(0\leqslant\alpha<1)$, $\frac{1}{\rho}=1-\alpha$ $(\rho\geqslant1)$, we consider the operators of consecutive differentiation of $\varphi(x)$ in the sense of Weil. The order of the operators is $\frac{n}{\rho}$ $(n=0,1,2,\cdots)$

$$D_\infty^{\frac{0}{\rho}}\varphi(x)\equiv\varphi(x),\qquad D_\infty^{1/\rho}\varphi(x)\equiv\frac{d}{dx}D_\infty^{-\alpha}\varphi(x),$$
$$D_\infty^{\frac{n}{\rho}}\varphi(x)\equiv D_\infty^{\frac{1}{\rho}}D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\varphi(x)\qquad(n=2,3,\cdots)\tag{8}$$

and

$$D_\infty^{-\alpha}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha-1}\varphi(t)\,dt.$$

Eventually, for the arbitrary sequence of positive numbers $\{M_n\}_1^\infty$ the following two classes of infinitely differentiable functions are introduced.

The class $C_\alpha^*\{[0,+\infty);M_n\}$ is the set of functions belonging to $C_\alpha^{(\infty)}$ and satisfying the conditions

$$\sup_{0<x<+\infty} |D_\infty^{\frac{n}{\rho}} \varphi(x)| \leqslant AB^n M_n \qquad (n=1,\ 2, \cdots). \tag{9}$$

The class $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ is the set of functions $\varphi(x)$ belonging to $C_\alpha^{(\infty)}$ and satisfying the conditions

$$\sup_{0<x<+\infty} |(1+\alpha x^3)\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \qquad (n=1,\ 2, \cdots). \tag{10}$$

For both classes the question, analogous to the Hadamard's problem and reducing to it in the case of $\alpha = 0$ is asked.

What kind of sequences $\{M_n\}_1^\infty$ provide the implication, that for every function $\varphi(x)$ belonging to the corresponding class the equalities

$$D_\infty^{\frac{n}{\rho}} \varphi(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} x^{\alpha n - 1} \varphi^{(n)}(x)\, dx = 0 \qquad (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{11}$$

imply the identity $\varphi(x) \equiv 0 \qquad (0 \leqslant x < +\infty)$.

Such classes will be called α-quasianalytical, 0-quasianalytical classes $C_0^*\{[0, +\infty); M_n\}$ and $C_0\{[0, +\infty); M_n\}$ coinciding with quasianalytical on $[0, +\infty)$ class in the usual classical sense.

The following basic theorems providing the answer to the question about α-quasianalyticity in the both classes introduced above are established.

Theorem 3. *The condition*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty \tag{12}$$

is necessary and sufficient for α-quasianalyticity of the class

$C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\} \quad (0 \leqslant \alpha < 1)$.

Theorem 4. *The condition*

$$\int_1^{\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = \infty \tag{13}$$

is necessary and sufficient for α-quasianalyticity of the class $C_\alpha\{[0 +\infty); M_n\}$ $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

Both these theorems are reduced to the classical Denjoy—Carleman theorem in the case of $\alpha = 0$.

Elementary evaluation shows that if

$$M_n = (n^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \log n \cdots \log_p n)^n, \qquad n > N_p, \tag{14}$$

where $p \geqslant 1$ is an arbitrary integer, then the condition (13) is fulfilled. This shows that the α-quasianalytical class $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(0<\alpha<1)$

is essentially larger as compared with usual quasianalytical class $C_0\{[0, +\infty); M_n\}$ because the consecutive derivatives of the functions belonging to the former class are allowed to increase essentially faster $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}>1,\ 0<\alpha<1\right)$ than it is possible for 0-quasianalytical classes, and this is seen from an earlier result of Denjoy, when M_n were chosen as

$$M_n = (n \log n \cdots \log_p n)^n \qquad n \geqslant N_p. \tag{14'}$$

3. The notion of α-quasianalyticity is introduced for the classes of infinitely differentiable on a finite interval $[0, l]$ functions as well.

The classes $C_\alpha^*\{[0, l]; M_n\}$ and $C_\alpha\{[0, l]; M_n\}$ are defined as subclasses of $C_\alpha^*\{[0, \infty); M_n\}$ and $C_\alpha\{[0, \infty); M_n\}$ respectively, when we subject the functions involved to the condition $\varphi(x) \equiv 0$, when $l \leqslant x < +\infty$.

The following theorems are established:

Theorem 5. *The condition*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr = +\infty$$

is sufficient, and taken with the additional condition

$$r^{-\frac{1}{1+\alpha}} \log T(r) \downarrow 0, \qquad r \uparrow +\infty$$

it is also necessary for α-quasianalyticity of the class $C_\alpha^*\{[0, l]; M_n\}$. $(0 \leqslant \alpha < 1)$.

Theorem 6. *The condition*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} dr = +\infty$$

is sufficient, and taken with the additional condition

$$r^{-\frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \log T(r) \downarrow 0, \qquad r \uparrow +\infty$$

it is also necessary for α-quasianalyticity of the class $C\{[0, l]; M_n\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Hadamard.* Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, C. R. Séances Soc. Math. Fr., 40, 1912, 28.
2. *E. Borel.* Les fonctions quasi analytiques de variables réelles, C. R. Acad. Sc., 173, 1921, 1431.
3. *A. Denjoy.* Sur les fonctions quasi analytiques d'une variable réelle, C. R. Acad. Sc., 173, 1921, 1329.
4. *T. Carleman.* Les fonctions quasi analytiques, Paris, 1926.

5. *A. Ostrowski*. Über quasi-analytische Funktionen und Bestimmtheit asymptotischer Entwicklungen, Acta Math., 53, 1930, 181.
6. *S. Mandelbrojt*. Analytic functions and classes of infinity differentiable functions, The Rice Institute Pamphlet, 29, № 1, 1942.
7. *T. Bang*. On quasi analytiske Funktioner, These, Kyobenhavn, 1946.
8. *С. Мандельбройт*. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, Москва, Изд. ин. лит., 1955.
9. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Москва, Изд. „Наука", 1966.
10. *G. Szegö*. Randwerte einer analytischen Funktionen, Math. Ann., 84, 1921.
11. *Н. У. Аракелян*. Построение целых функций конечного порядка, равномерно убывающих в угле, Изв. АН Армянской ССР, сер. Математика, 1, № 3, 1966.
12. *М. М. Джрбашян*. Об асимптотическом приближении целыми функциями в полуплоскости, ДАН СССР, 111, № 4, 1956.
13. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*. Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды Московского математического общества, 10, 1961.
14. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Известия АН Армянской ССР, серия „Математика", 3, № 1, 1968.
15. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, Москва, Гостехиздат, 1948.