

Л. Д. ПОКРОВСКИЙ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ В СВЕРТКАХ,  
СОДЕРЖАЩИХ ПАРАМЕТР

## В в е д е н и е

Содержание настоящей статьи составляет изучение однородной краевой задачи в полупространстве для уравнений в свертках или псевдодифференциальных уравнений, зависящих от параметра.

В §§ 1—2 доказывается теорема существования и единственности и устанавливаются оценки решения в пространствах, естественно связанных с рассматриваемой задачей.

В §§ 3—4 проводится построение и обоснование асимптотического разложения решения в виде ряда по степеням малого параметра.

Для удобства изложения доказательства некоторых вспомогательных утверждений перенесены в § 5.

Теория краевых задач для уравнений в свертках подробно изучена в статье М. И. Вишика и Г. И. Эскина [1].

В настоящей работе рассматриваются операторы свертки, символы\* которых содержат параметр, и это обстоятельство позволяет доказать при некоторых условиях однозначную разрешимость краевой задачи (1.1)—(1.2) (см. § 1), в то время как в [1] для задач такого типа, и более общих, доказана лишь нормальная разрешимость. Отметим, что для дифференциальных уравнений с частными производными такой подход к изучению вопроса разрешимости граничных задач был предложен М. С. Аграновичем и М. И. Вишиком в [2].

Другая часть работы посвящена применению асимптотических методов для нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи. Для дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр при старших производных, существуют задачи, в которых возникает явление пограничного слоя, описанное М. И. Вишиком и Л. А. Люстерником в [3] (там же указана литература). Оказывается, что аналогичная ситуация имеет место и для некоторых псевдодифференциальных уравнений. При этом асимптотика решения также содержит так называемые функции типа пограничного слоя, однако последние уже не имеют, вообще говоря, вида  $\exp\left(-\frac{l x_n}{\varepsilon}\right)$  ( $l > 0$ ), но сохраняют свойство экспоненциального убывания по  $x_n$  для  $x_n > 0$ .

\* Определение символа псевдодифференциального оператора приведено ниже.

Отметим, что излагаемые в настоящей статье вопросы изучались автором в работе [5] в случае операторов свертки с символами вида  $a_i(\xi) = 1 + \sum_{j=1}^n a_{ij}(\xi)$ , где  $a_{ij}(\xi)$  — рациональные функции  $\xi$ .

Перечислим некоторые определения и обозначения, используемые ниже. Пусть  $a(x, \xi, q)$  — некоторая гладкая функция, определенная на  $R^n \times R^n$ , зависящая от параметра  $q$ . Более точно условия на  $a(x, \xi, q)$  формулируются ниже. Условимся в дальнейшем через  $u(\xi)$  ( $a(\tau, \xi, q)$ ) обозначать преобразование Фурье  $F_{x \rightarrow \xi}$  ( $F_{\tau \rightarrow \xi}$ ) функции  $u(x)$  ( $a(x, \xi, q)$ ), т. е.

$$u(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} u(x) dx, \quad a(\tau, \xi, q) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} a(x, \xi, q) dx,$$

$$x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) = (\xi', \xi_n), \\ \tau = (\tau_1, \dots, \tau_{n-1}, \tau_n) = (\tau', \tau_n).$$

Далее, для достаточно гладких и убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  функций  $u(x)$  положим

$$Au = (Au)(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x} a(x, \xi, q) u(\xi) d\xi. \quad (1)$$

Будем говорить, что формула (1) определяет оператор  $A$ , канонически построенный по символу  $a(x, \xi, q)$  и иногда писать в этом случае  $A = Op(a(x, \xi, q))$ . Пусть  $a(x, \xi, q) = a^{(0)}(\xi, q) + a'(x, \xi, q)$ , причем  $a'(x, \xi, q)$  финитна по  $x$ . Легко показать, что

$$(Au)(\xi) = a^{(0)}(\xi, q) u(\xi) + (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} a'(x, \xi, q) u(x) dx. \quad (2)$$

При изучении операторов свертки, содержащих параметр, удобно использовать нормы, зависящие от этого параметра. Положим

$$\|u\|_{s, q} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (|q|^2 + |\xi|^2)^s |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad (3)$$

$$\|u\|_{s, \varepsilon} = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\varepsilon \xi|^2)^s |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}, \quad \varepsilon = \frac{1}{|q|}. \quad (4)$$

Очевидно  $|q|^{-s} \|u\|_{s, q} = \|u\|_{s, \varepsilon}$ . Ясно также, что при фиксированных  $q$  или  $\varepsilon$  нормы (3) и (4) эквивалентны обычной норме Соболева-Слободецкого

$$\|u\|_s = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (1 + |\xi|^2)^s |u(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Обозначим через  $H_s(R^n)$  пополнение по норме (5) пространства  $S(R^n)$  функций, убывающих при  $|x| \rightarrow \infty$  быстрее любой степени  $|x|^{-s}$ .

вместе с производными по  $x$  любого порядка, а через  $H_+^s$  — подпространство  $H_s(R^n)$ , состоящее из функций, равных нулю при  $x_n < 0$ .

Если  $s$  — целое положительное число, функции из  $H_+^s$  обращаются в нуль при  $x_n = 0$  вместе с производными до порядка  $s - 1$ .

Пусть  $D'(R_+^1)$  — множество обобщенных функций, заданных при  $x_n > 0$ . Подмножество  $D'(R_+^1)$  функций  $f$ , для которых существует продолжение  $lf \in H_s(R^n)$  на все  $R^n$  [2] (причем  $lf = f$  при  $x_n > 0$ ) по определению образует пространство  $H_+(R_+^1)$ .

Наконец, нам понадобится пространство  $H_+^*$ , состоящее из функций  $u_+(x) \in H_+(R_+^1)$ , продолженных нулем для  $x_n < 0$ . Функции из  $H_+^*$  мы будем обозначать через  $u_+$  или  $u^+$  ( $x$ ). Норма в  $H_+(R_+^1)$  и  $H_+^*$  задается по следующей формуле:

$$\|u_+\|_s = \|\Pi^+ (\xi_n - i \sqrt{|\xi'|^2 + 1})^s lu(\xi)\|_0, \quad (6)$$

где оператор  $\Pi^+$  — образ Фурье (в обобщенном смысле) оператора  $\theta^+$  умножения на функцию  $\theta^+(x)$ , равную единице при  $x_n > 0$  и нулю при  $x_n \leq 0$  (см. [1], [5]). Норма (6), очевидно, не зависит от вида продолжения  $lu$  функции  $u_+$  на  $R^n$ , причем указанное продолжение всегда можно выбрать так, что будут справедливы неравенства ([1], [2])

$$C_1 \|u_+\|_s \leq \|lu\|_s \leq C_2 \|u_+\|_s. \quad (7)$$

Аналогично вводятся нормы в полупространстве, зависящие от параметра  $q$  или  $\varepsilon$ :

$$\|u_+\|_{s,q} = \|\Pi^+ (\xi_n - i \sqrt{|\xi'|^2 + |q|^2})^s lu(\xi)\|_0, \quad \|u_+\|_{s,\varepsilon} = \|\Pi^+ (\varepsilon \xi_n - i \sqrt{|\varepsilon \xi'|^2 + 1})^s lu(\xi)\|_0. \quad (8)$$

Для норм вида (8) так же как в [2] устанавливается справедливость неравенств типа (7)

$$C_1 \|u_+\|_{s,q} \leq \|lu\|_{s,q} \leq C_2 \|u_+\|_{s,q} \quad (9)$$

и такие же неравенства для нормы  $\|\cdot\|_{s,\varepsilon}$ . В (9) и всюду в дальнейшем  $C_i$  обозначают различные константы, не зависящие от  $q$ . Более подробное объяснение принятой терминологии и обозначений можно найти в [1], [2], а также в [5].

## § 1. Постановка задачи. Класс символов

В полупространстве  $x_n \geq 0$  рассмотрим следующую задачу:

$$P^+ |q|^{-m} Au_+ = f(x), \quad x_n > 0, \quad (1.1)$$

$$P^+ \frac{\partial^i u_+}{\partial x_n^i} \Big|_{x_n=0} = 0 \quad (i=0, 1, \dots, k-1), \quad (1.2)$$

где  $A$  — оператор свертки, канонически построенный по символу  $a(x, \xi, q)$ ,  $P^+$  — оператор сужения на полупространство  $x_n > 0$ ,  $k$  — ин-

декс факторизации (см. § 3, а также [1]) символа  $a(x, \bar{z}, q)$ . Функция  $f(x)$  принадлежит пространству  $H_{-m}(R^*)$ , а решение  $u_+(x)$  ищется в пространстве  $H_s^+ \cap H_s^-$ , ( $s > 0$ ).

В случае, когда символ оператора  $A$  не содержит параметра, в работе [1] для задач типа (1.1)–(1.2) (и более общих) доказана нормальная разрешимость. Целью настоящей работы является доказательство однозначной разрешимости рассматриваемой задачи для некоторого класса символов и построение асимптотики решения  $u_+(x, \varepsilon)$  в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon = |q|^{-1}$

$$u_+(x, \varepsilon) = u_0^+(x) + \varepsilon u_1^+(x) + \dots + \varepsilon^N u_N^+(x) + z^{N+1} u_{N+1}^+(x, \varepsilon),$$

где  $z^{N+1} u_{N+1}^+(x, \varepsilon)$  — величина порядка  $O(\varepsilon^{N+1})$  в некоторой естественно связанной с задачей норме.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать функции вида

$$a(x, \bar{z}, q) = a^{(0)}(\bar{z}, q) + a'(x, \bar{z}, q), \quad (1.3)$$

причем  $a'(x, \bar{z}, q)$  бесконечно дифференцируемая финитная функция  $x$ . Пусть далее,  $a(x, \bar{z}, q)$  является положительно однородной функцией переменных  $\bar{z}$  и вещественного\* параметра  $q > 0$  степени  $m + im_1$ , то есть  $a(x, t\bar{z}, tq) = t^{m+im_1} a(x, \bar{z}, q)$  ( $t > 0$ ,  $m$  и  $m_1$  — произвольные действительные числа).

Допустим также, что  $a(x, \bar{z}, q)$  имеет первую производную по  $\bar{z}$ , ограниченную при  $|\bar{z}| + q = 1$  ( $q > 0$ ). Наконец, будем предполагать, что для производных более высокого порядка по  $\bar{z}$  и для производных по  $x$  при  $q \geq q_0 > 0$  справедливы оценки

$$|D_x^\alpha a(x, \bar{z}, q)| \leq C_\alpha (q + |\bar{z}|)^m, \quad (1.4)$$

$$|\partial_{\bar{z}}^\beta D_x^\alpha a(x, \bar{z}, q)| \leq C_{\alpha\beta} (q + |\bar{z}|)^{m-1} \quad (q \geq q_0 > 0), \quad (1.4')$$

где  $\alpha > 1$ ,  $\beta > 0$  — произвольные мультииндексы\*\*.

Класс символов  $a(x, \bar{z}, q)$ , удовлетворяющих перечисленным условиям, обозначим через  $O_m$ , а если, кроме того,  $a(x, \bar{z}, q)$  как функция комплексной переменной  $\bar{z}_n$  допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $Im \bar{z}_n > 0$  ( $Im \bar{z}_n < 0$ ) при любых  $x, \bar{z}'$  и  $q$  таких, что  $|\bar{z}'| + q \neq 0$ , то будем говорить, что  $a(x, \bar{z}, q)$  принадлежит  $O_m^+$  ( $O_m^-$ ). Например,  $(\bar{z}_n \pm i \sqrt{|\bar{z}'|^2 + q^2})^m \in O_m^\pm$ . Легко проверить, что для  $a(x, \bar{z}, q) \in O_m$  справедливы также следующие оценки

$$|\bar{z}^\beta \bar{a}'(\tau, \bar{z}, q)| \leq C_\beta \frac{(q + |\bar{z}|)^m}{(1 + |\bar{z}|)^p}, \quad (1.5)$$

$$|\partial_{\bar{z}}^\beta \bar{z}^\beta \bar{a}'(\tau, \bar{z}, q)| \leq C_{\beta\alpha} \frac{(q + |\bar{z}|)^{m-1}}{(1 + |\bar{z}|)^p} \quad (\alpha \geq 1), \quad (1.5')$$

где  $p$  сколь угодно велико.

\* С небольшими изменениями рассуждения, проводимые в работе, справедливы и для некоторых комплексных значений  $q$ .

\*\* То есть  $\partial_{\bar{z}}^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \bar{z}_1^{\alpha_1} \partial \bar{z}_2^{\alpha_2} \dots \partial \bar{z}_n^{\alpha_n}}$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = |\alpha|$ . Аналогично записывается  $D_x^\alpha$ .

Ниже нам понадобится небольшое обобщение некоторых известных фактов из теории псевдодифференциальных операторов.

Предложение 1.1. Оператор  $A$ , построенный по символу  $a(x, \xi, q) \in O_m$ , ограничен из пространства  $H_s(R^n)$  в пространство  $H_{s-m}(R^n)$  при любом  $s$  и  $q > q_0$ . Точнее, имеет место оценка

$$\|Au\|_{s-m, q} \leq C \|u\|_{s, q}.$$

Доказательство этого утверждения, по существу, повторяет доказательство соответствующей теоремы из [4], если неравенство (3.6) из [4] заменить следующими:

$$\frac{q_1}{2} \frac{q + |\eta|}{1 + |\xi - \eta|} < q + |\xi| < \frac{2}{q_1} (q + |\eta|)(1 + |\xi - \eta|), \quad (1.6)$$

где  $q_1 = \min [q_0, 1]$ , а  $q > q_0$ .

Неравенства (1.6) вытекают из помещенных ниже неравенств (1.10).

Предложение 1.2. Пусть  $a(x, \xi, q) \in O_m$  и  $b(x, \xi, q) \in O_{m'}$ . Тогда при  $q > q_0 > 0$  произведение  $ABu$  разлагается в следующую сумму:

$$ABu = Cu + Tu,$$

где  $C$  — оператор порядка  $m + m'$  с символом  $c(x, \xi, q) = a(x, \xi, q) \times b(x, \xi, q)$ , а  $T$  — оператор порядка  $m + m' - 1$ , то есть

$$\|Tu\|_{s-(m+m'-1), q} \leq C \|u\|_{s, q}. \quad (1.7)$$

Доказательство. Используя определение псевдодифференциального оператора (формулы (1), (2)) и учитывая (1.3), получим

$$ABu = Op(a^{(0)}(\xi, q) b^{(0)}(\xi, q) + b'(x, \xi, q) a^{(0)}(\xi, q) + a'(x, \xi, q) b^{(0)}(\xi, q) + a'(x, \xi, q) b'(x, \xi, q))u + Tu,$$

где  $Tu = R_1u + R_2u$  и

$$(R_1u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (a^{(0)}(\xi, q) - a^{(0)}(\eta, q)) \bar{b}'(\xi - \eta, \eta, q) u(\eta) d\eta, \quad (1.8)$$

$$(R_2u)(\xi) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{a}'(\xi - \eta, \eta, q) - \bar{a}'(\xi - \eta, \eta, q)) \bar{b}'(\eta - \eta, \eta, q) u(\eta) d\eta. \quad (1.9)$$

Для дальнейших выкладок потребуются неравенства

$$\frac{q_1}{2} \frac{q + |\eta|}{1 + |\xi - \eta|} < q + |\xi + \theta(\eta - \xi)| < \frac{2}{q_1} (q + |\eta|)(1 + |\xi - \eta|), \quad (1.10)$$

где  $0 \leq \theta \leq 1$ , а  $q_1$  такое же как в (1.6).

Докажем оценку снизу (оценка сверху очевидна). Если  $|\xi - \eta| \leq \frac{|\eta|}{2}$ ,

$$\text{то } |\xi + \theta(\eta - \xi)| \geq \frac{|\eta|}{2} \text{ и } (q + |\xi + \theta(\eta - \xi)|)^{-1} \leq 2(2q + |\eta|)^{-1} \leq$$

$\leq 2(q + |\eta|)^{-1}(1 + |\xi - \eta|)$ . Если же  $|\xi - \eta| > \frac{|\eta|}{2}$ , то

$$(q + |\xi + \theta(\eta - \xi)|)^{-1} \leq \frac{1}{q}(q + |\eta|)(q - \eta)^{-1} \leq \\ \leq \frac{1}{q} \frac{q + 2|\xi - \eta|}{q + |\eta|} \leq 2 \frac{1 + q^{-1}|\xi - \eta|}{q + |\eta|} = \frac{2}{q_0} \frac{q_0 + |\xi - \eta|}{q + |\eta|}.$$

Теперь, если  $q_0 > 1$ , то заменяем  $|\xi - \eta|$  на  $q_0|\xi - \eta|$ , а если  $q_0 < 1$ , то в числителе заменяем  $q_0$  на единицу. В результате получим (1.10). Далее, в силу свойств символа  $a(x, \xi, q)$ , учитывая (1.5) и (1.10), будем иметь

$$|a^{(n)}(\xi, q) - a^{(n)}(\eta, q)| \leq C(q + |\eta|)^{m-1}(1 + |\xi - \eta|)^{|\alpha|}, \\ |\bar{a}'(\xi - \eta, \eta, q) - \bar{a}'(\xi - \eta, \xi, q)| \leq C'(q + |\eta|)^{m-1}(1 + |\eta - \xi|)^{|\alpha|} \times \\ \times (1 + |\xi - \eta|)^{-p},$$

где  $p > 0$  — сколь угодно большое число.

Дальнейшая оценка  $R_1 u$  и  $R_2 u$  проводится так же как в [4] (см. также доказательство леммы 2.2 § 5).

## § 2. Эллиптическая задача в полупространстве

Пусть  $a(x, \xi, q) \in O_m$  и, кроме того, выполнено условие эллиптичности (с параметром)

$$a(x, \xi, q) \neq 0 \text{ при } |\xi| + q \neq 0 \quad (2.1)$$

для всех  $x \in R^n$  и всех вещественных  $\xi$  и  $q > 0$ . Тогда, как показано в [1], для функции  $a(x, \xi, q)$  справедливо следующее представление, называемое факторизацией

$$a(x, \xi, q) = a_+(x, \xi', \xi_n, q) a_-(x, \xi', \xi_n, q),$$

где  $a_+(x, \xi', \xi_n, q) \in O_+$ ,  $a_-(x, \xi', \xi_n, q) \in O_-$ , и  $a_+(x, \xi', \xi_n, q) \neq 0$  при  $Im \xi_n > 0$ ,  $a_-(x, \xi', \xi_n, q) \neq 0$  при  $Im \xi_n < 0$ .

Число  $\nu$  называется индексом факторизации символа  $a(x, \xi, q)$ . Мы будем предполагать, что  $\nu$  — целое положительное число. Отметим, что указанные свойства  $a_\pm(x, \xi', \xi_n, q)$  следуют из явного представления этих функций, полученного в [1].

При изучении уравнений в свертках в полупространстве важную роль играют гладкие операторы. Оператор  $A$  порядка  $m$  называется гладким в полупространстве  $x_n > 0$ , если оценка

$$\|P^s A u\|_{s-m, q} \leq C \|u\|_{s, q}$$

выполняется при любом  $s > 0$  для любой функции  $u \in H^s$ .

**Теорема 2.1.** Пусть при  $s > 0$  для некоторой функции  $g(x, \xi, q)$  имеет место разложение следующего вида:

$$\xi_n g(x, \xi, q) = g_-(x, \xi, q) + r_{-1}(x, \xi, q), \quad \xi_n = \xi_n - i\sqrt{|\xi'|^2 + q^2}, \quad (2.2)$$

в котором  $g_-(x, \xi, q)$  допускает аналитическое продолжение по  $\xi_n$  в полуплоскость  $\text{Im} \xi_n < 0$ , причем справедливы оценки

$$|g_-(x, \xi, q)| \leq C (q + |\xi|)^{m-s}, \quad |r_{-1}(x, \xi, q)| \leq C_1 \frac{(q + |\xi'|)^{m+s+1}}{q + |\xi'| + |\xi_n|} \quad (2.3)$$

и, кроме того, для  $g_-(x, \xi, q)$  и  $r_{-1}(x, \xi, q)$  выполнены соотношения, аналогичные (1.3).

Тогда  $G = \text{Op}(g(x, \xi, q))$  — гладкий в полупространстве оператор порядка  $m$ , то есть для любого  $s \geq 0$  справедлива оценка

$$\|P^+ G u\|_{s-m, q}^+ \leq C \|u\|_{s, q}^+.$$

Замечание. Теорема 2.1 аналогична теореме 1.7 из [1], однако доказывается несколько иначе.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что  $g^{(0)}(\xi, q) = 0$  и  $r^{(0)}(\xi, q) = 0$ . Далее, по определению нормы в полупространстве имеем

$$\begin{aligned} \|P^+ G u\|_{s-m, q}^+ &= \|\Pi^+ \xi^{s-m} (G u_-)(\xi)\|_0 \leq \\ &\leq \|\Pi^+ \xi^{s-m} (G u)\|_0 + \|\Pi^+ \xi^{s-m} (G u_-)(\xi)\|_0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Так как оператор  $\Pi^+$  ограничен в  $L_2(R_{\xi_n}^+)$  [2], и  $|\xi^{s-m}| \leq (|\xi| + q)^{s-m}$ , то первое слагаемое в правой части (2.4) оцениваем во всем пространстве, используя предложение 1.1 и неравенство (9)

$$\|\Pi^+ \xi^{s-m} (G u)\|_0 \leq C_1 \|u\|_{s, q} \leq C_2 \|u\|_{s, q}^+. \quad (2.5)$$

Учитывая (2), (2.2) и (2.3), далее будем иметь

$$\begin{aligned} \|\Pi^+ \xi^{s-m} (G u_-)(\xi)\|_0 &= \|\Pi^+ \xi^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{-}^{s-m} \bar{g}'(\xi - \gamma, \gamma, q) \gamma_-^{m-s} u_-(\gamma) d\gamma\|_0 \leq \\ &\leq \|\Pi^+ \xi^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{g}'(\xi - \gamma, \gamma, q) \gamma_-^{m-s} u_-(\gamma) d\gamma\|_0 + \\ &+ \|\Pi^+ \xi^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} r'(\xi - \gamma, \gamma, q) \gamma_-^{m-s} u_-(\gamma) d\gamma\|_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Первое слагаемое в правой части (2.6), очевидно, равно нулю, кроме того, в силу (2.3)

$$|r_{-1}(\xi - \gamma, \gamma, q)| \leq C \frac{(q + |\gamma'|)^{s+1}}{(q + |\gamma'| + |\gamma_n|)(1 + |\xi - \gamma|)^p}, \quad (2.7)$$

где  $p \geq 0$  сколь угодно велико.

Продолжая оценивать (2.6) (с помощью (2.7)), получим

$$\|\Pi^+ \xi^{s-m} \int_{-\infty}^{+\infty} r_{-1}(\xi - \gamma, \gamma, q) \gamma_-^{m-s} u_-(\gamma) d\gamma\|_0 \leq$$

$$\ll C \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(q + |\gamma'|)^{s+1} |u - (\gamma)| d\gamma}{(1 + |\xi - \gamma|)^p (q + |\gamma'| + |\gamma_n|)} \right|_0 \ll C_1 (q + |\gamma'|)^s |u - (\gamma)|_0.$$

В последней оценке использовано известное неравенство

$$\left| \int \varphi(\xi - \gamma) v(\gamma) d\gamma \right| \ll \int |\varphi(\xi)| d\xi \|v\|_0.$$

Далее, так же как в теореме 1.4 из [1] можно показать, что

$$\|(q + |\xi'|)^s u - (\gamma)\|_0 \ll C_q \|u\|_{s, q} \ll C_3 \|u_+\|_{s, q}. \quad (2.8)$$

Из (2.4), (2.5), (2.8) получаем утверждение теоремы.

В дальнейшем для доказательства свойства гладкости некоторых операторов свертки определенного вида удобно сформулировать следующее условие гладкости (см. [1]).

Условие  $C_1$ . Функция  $a_+(x, \xi, q)$  при любом  $x$  аналитически продолжается по  $\xi_n$  вне полукруга  $|\xi_n| \leq R$  ( $|\xi'| + q$ ),  $\text{Im} \xi_n \leq 0$  ( $R > 0$  не зависит от  $\xi'$  и  $q$ ), причем в результате продолжения получается отличная от нуля однозначная аналитическая функция в окрестности бесконечно удаленной точки.

Лемма 2.1. Пусть  $a(x, \xi, q) \in O_m$  — эллиптический символ, причем  $a_-(x, \xi, q)$  удовлетворяет условию  $C_1$ .

Тогда операторы, построенные по символам вида

$$\frac{\partial^p}{\partial \xi_n^p} a_+^{-1}(x, \xi', \xi_n, q), \partial_x^\alpha a_-(x, \xi', \xi_n, q) \quad (p > 0, \alpha \geq 0)$$

являются гладкими в полупространстве.

Доказательство леммы, помещенное в § 5, заключается в установлении для указанных символов соотношений типа (2.2), (2.3) теоремы 2.1. Лемма 2.1 при  $p \geq 1$ ,  $\alpha \geq 1$  используется в § 4.

Переходим к основному утверждению этого параграфа.

Теорема 2.2. Для любой функции  $f(x) \in H_{s-m}(R^n)$  при  $s \geq m$  и  $q \geq q_2$ , где  $q_2$  достаточно велико, существует единственное решение задачи (1.1)–(1.2), принадлежащее  $H_s^+ \cap H_s^-$ , причем справедлива априорная оценка

$$\|u_-\|_{s, q} \ll C \|P^- Au_+\|_{s-m, q} \quad (2.9)$$

или

$$\|u_+\|_{s, \varepsilon}^+ \ll C \|P^+ q^{-m} Au_-\|_{s-m, \varepsilon}^+. \quad (2.9')$$

Доказательство. Обозначим  $f_1(x) = q^m f(x)$  и положим

$$Rf_1(x) = Op(a_+^{-1}(x, \xi, q)) \theta^- Op(a_-^{-1}(x, \xi, q)) lf_1(x). \quad (2.10)$$

Мы сейчас покажем, что оператор  $R$ , определенный формулой (2.10), является левым и правым регуляризатором оператора  $A$ , то есть

1.  $R$  ограничен из  $H_{s-m}(R^n)$  в  $H_s^+$ , точнее

$$\|Rf_1\|_{s, q} \ll C \|f_1\|_{s-m, q} \quad (2.11),$$

2. Выполнены соотношения

$$RP^+ Au_+ = u_+ + \theta \cdot T_1 u_+, \quad \theta \cdot T_1 u_+ \|\cdot\|_{-1, q} \leq C \|u_+\|_{-1, q}, \quad (2.12)$$

$$P^- ARf_1 = f_1 + P^- T_2 f_1, \quad P^- T_2 f_1 \|\cdot\|_{-m, q} \leq C_1 \|f_1\|_{-m, q}. \quad (2.13)$$

Ограниченность  $R^+$  следует из теоремы 2.1, так как, в силу леммы 2.1,  $a^{-1}(x, \xi, q)$  — гладкий символ.

Докажем сначала формулы (2.13). Применяя оператор  $P^- A$  к (2.10) и используя предложение 1.2, получим

$$P^- ARf_1 = P^- Op(a_-(x, \xi, q)) \theta^+ Op(a^{-1}(x, \xi, q)) f_1 + \\ + P^- V_1 \theta^+ Op(a^{-1}(x, \xi, q)) f_1, \quad (2.14)$$

где  $V_1$  — оператор порядка  $m - \nu - 1$ . Кроме того справедлива

**Лемма 2.2.** *Оператор  $V_1$  — гладкий в полупространстве. Доказательство леммы 2.2 помещено в § 5.*

Применяя вновь предложение 1.2 к первому слагаемому правой части (2.14), получим\*

$$P^- ARf_1 = f_1 + P^- (V_2 + V_3) f_1 = f_1 + P^- T_2 f_1,$$

где  $V_2 = V_1 \theta^+ Op(a^{-1}(x, \xi, q))$ , в силу леммы 2.2, гладкий в полупространстве оператор порядка  $-1$ . Этим же свойством обладает и  $V_3$ . Отсюда следует оценка (2.13). Далее, в силу свойства нормы (3), см. [2], из (2.13) получим

$$\|P^- T_2 f_1\|_{-m, q} \leq \frac{C_1}{q} \|f_1\|_{-m, q}.$$

Теперь, если  $q$  достаточно велико ( $q \geq q_2$ ), то оператор  $T_2$  имеет малую норму в пространстве  $H_{s-m}(R_+^n)$  и, следовательно, оператор  $I + P^- T_2$ , как хорошо известно, обладает ограниченным обратным  $(I + P^- T_2)^{-1}$ . Полагая

$$R' f_1 = R (I + P^- T_2)^{-1} f_1,$$

из (2.13) получим  $P^- AR' f_1 = f_1$ , т. е.  $R'$  — точный правый обратный оператор.

Докажем теперь формулы (2.12). Найдем выражение  $RP^+ Au_+$  ( $R$  по-прежнему определен (2.10)).

$$RP^+ Au_+ = Op(a^{-1}(x, \xi, q)) \theta^+ Op(a^{-1}(x, \xi, q)) Au_+ = \\ = Op(a^{-1}(x, \xi, q)) [Op(a_-(x, \xi, q) + \theta^+ V_4)] u_+ = \\ = u_+ + \theta^+ V_5 u_+ + \theta^+ V_6 u_+ = u_+ + \theta^+ T_1 u_+,$$

где  $V_5 u_+ = Op(a^{-1}(x, \xi, q)) \theta^+ V_4 u_+$ . Свойство гладкости в полупространстве операторов  $V_4$  и  $V_6$  доказывается точно так же как для

\* Легко проверить соотношение [2]:  $P^- A - \theta^+ g = P^- A - g$ , где  $A$  — произвольный оператор свертки, символ которого  $a_-(x, \xi)$  — аналитическая функция при  $\text{Im } \xi_n < 0$ . Кроме того, в доказательстве будет использован следующий очевидный факт. Сумма и свертка функций, равных нулю при  $x_n < 0$ , равны нулю при  $x_n < 0$ .

оператора  $V_1$ . Кроме того, из предложения 1.2 следует, что  $T_1 = V_3 + V_0$  имеет порядок, равный  $-1$ , т. е. справедлива оценка (2.12). Далее, повторяя те же рассуждения, что и выше, получаем выражение для левого обратного оператора

$$R'' = (I + \theta + T_1)^{-1} K.$$

Из ограниченности  $R''$  вытекает априорная оценка (2.9). Легко видеть также, что функция  $u_+ = R' f_1 = R(I + P + T_2)^{-1} f_1$  — решение уравнения (1.1) принадлежит  $H_+^m \cap H_+^s$  при  $f_1 \in H_{s,-m}(R''_+)$  и, следовательно, удовлетворяет граничным условиям (1.2). Теорема доказана.

### § 3. Построение асимптотики

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о нахождении приближенного решения задачи (1.1)–(1.2) когда  $q$  достаточно велико. Будем искать решение  $u_+(x, \varepsilon)$  ( $\varepsilon = \frac{1}{q}$ ) в виде ряда по степеням малого параметра  $\varepsilon$

$$u_+(x, \varepsilon) = w_0^+(x) + \varepsilon w_1^+(x) + \dots, \tag{3.1}$$

причем функции  $w_k^+(x)$  равны нулю при  $x_n < 0$ .

Разложим символ  $q^{-m} a(x, \xi, q)$  оператора  $q^{-m} A$  по степеням  $\varepsilon$

$$q^{-m} a(x, \xi, q) = a(x, \xi, 1) = a(x, 0, 1) + \sum_{|\alpha| \leq N} \frac{\xi^{|\alpha|}}{|\alpha|!} \varepsilon^{|\alpha|} \partial^\alpha a(x, 0, 1) + \varepsilon^{N+1} r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon), \tag{3.2}$$

$$r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon) = \sum_{|\alpha| \geq N+1} \frac{1}{(N+1)!} \partial^\alpha a(x, \theta \xi, 1) \xi^\alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 1. \tag{3.3}$$

Если отдельным слагаемым в (3.2) сопоставить каноническим образом операторы свертки, то получим

$$q^{-m} A u_+ = a(x) u_+ + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j A_j u_+ + \varepsilon^{N+1} R_{N+1} u_+, \quad a(x) = a(x, 0, 1). \tag{3.4}$$

Формула (3.4) дает для исходного оператора представление в виде суммы дифференциальных операторов с переменными коэффициентами и псевдодифференциального оператора  $\varepsilon^{N+1} R_{N+1}$ . Подставляя (3.1) и (3.4) в исходное уравнение (1.1)

$$P + q^{-m} A u_+ = f(x), \quad x_n > 0 \tag{1.1}$$

и приравнивая выражения, содержащие  $\varepsilon$  в одинаковых степенях, получим

$$\begin{aligned} w_0^+(x) &= \theta^+ a^{-1}(x) l f(x), \\ w_1^+(x) &= -\theta^+ a^{-1}(x) A_1 w_0^+(x), \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$w_k^+(x) = -\theta^+ \sum_{l=1}^k a^{-1}(x) A_l w_{l-1}^+(x)$$

$$\dots \dots \dots$$

Таким образом, все функции  $w_k^+(x)$  определяются через известную функцию  $f(x)$ , например,

$$w_0^+(x) = \theta^+ a^{-1}(x) f(x),$$

$$w_1^+(x) = -\theta^+ a^{-1}(x) A_1 \theta^+ a^{-1}(x) f(x), \quad (3.6)$$

$$w_2^+(x) = -\theta^+ a^{-1}(x) A_1 \theta^+ a^{-1}(x) A_1 \theta^+ a^{-1}(x) f(x) +$$

$$+ \theta^+ a^{-1}(x) A_2 \theta^+ a^{-1}(x) f(x),$$

$$\dots \dots \dots$$

и, очевидно, не зависят от вида продолжения функции  $f(x)$  на все  $R^n$ . Легко видеть, что имеет место

**Теорема 3.1.** *Для функций  $w_k^+(x)$ , определяемых по формулам (3.5), справедлива оценка*

$$\|w_k^+(x)\|_{C^k} \leq C \|f\|_{C^k}.$$

**Замечание.** Функции  $w_k^+(x)$  иногда удобно записывать в виде  $w_k^+(x) = \theta^+ \Phi_k(x)$ .

В силу теоремы 3.1 можно утверждать, что, если норма  $\|f\|_{C^k}$  конечна (то есть  $f(x)$  — достаточно гладкая и убывающая при  $x_n > 0$  функция), то  $\Phi_k(x)$  является гладким продолжением  $w_k^+(x)$  на все пространство и при этом

$$C \|\Phi_k(x)\|_{C^k, R^n} \leq \|w_k^+(x)\|_{C^k} \leq C_1 \|f\|_{C^k}. \quad (3.7)$$

Заметим, однако, что функции  $w_k^+(x)$ , определенные формулами (3.5) и (3.6), не удовлетворяют, вообще говоря, граничным условиям (1.2). Это обстоятельство не позволяет получить равномерную асимптотику, используя лишь разложения (3.1) и (3.4). Такая ситуация является типичной для уравнений, содержащих малый параметр при членах более высокого порядка, так как при этом для вырожденно-го уравнения (которое приходится решать, если искать решение в виде (3.1)) всегда оказывается корректной задачей с меньшим числом граничных условий (в нашем случае вообще без граничных условий).

Для того чтобы получить равномерную вплоть до границы асимптотику мы будем, используя идею, предложенную в [3] для дифференциальных уравнений, прибавлять к функциям  $w_l$  некоторые функции  $v_k$ , называемые функциями типа пограничного слоя, так, чтобы сумма  $w_k^+ + v_k$  удовлетворяла граничным условиям (см. также [5]). Таким образом, мы ищем решение в виде

$$u_\varepsilon(x, \varepsilon) = w_0^+ + \varepsilon w_1^+ + \dots + \varepsilon^N w_N^+ + v_0^+ + \varepsilon v_1^+ + \dots + \varepsilon^N v_N^+ + z_{N+1}^+(x, \varepsilon).$$

При этом, так как  $\sum_{\kappa} \varepsilon^{\kappa} w_{\kappa}$  дает некоторое приближение к решению неоднородного уравнения (1.1), естественно искать функции  $v_{\kappa}$  таким образом, чтобы  $\sum_{\kappa} \varepsilon^{\kappa} v_{\kappa}$  являлась приближенным решением соответствующего однородного уравнения, т. е.

$$P \cdot q^{-m} A (v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots) = 0. \quad (3.8)$$

Далее, так как по условию функции типа пограничного слоя  $v_{\kappa}$  должны быть заметно отличны от нуля лишь вблизи границы  $x_n = 0$ , естественно сделать замену переменных  $x' \rightarrow x'$ ,  $x_n \rightarrow t_n = \frac{x_n}{\varepsilon}$ , что означает растяжение масштаба в направлении, нормальном к границе [1]. В результате мы получаем новое разложение оператора  $q^{-m} A$  по степеням  $\varepsilon$ , причем главная часть этого разложения является оператором свертки лишь по переменной  $t_n$  с коэффициентами, не зависящими от  $t_n$ , а зависящими только от  $x'$ . В самом деле, замечая, что преобразованию  $x_n \rightarrow t_n = \frac{x_n}{\varepsilon}$  отвечает в  $\xi$ -представлении преобразование  $\xi_n \rightarrow \eta_n = \varepsilon \xi_n$  и используя свойство однородности символа  $a(x, \xi', \xi_n, q)$ , получим

$$q^{-m} a(x', x_n, \xi', \xi_n, q) = a(x', \varepsilon t_n, \varepsilon \xi', \eta_n, 1).$$

Разлагая полученное выражение по формуле Тейлора по степеням  $\varepsilon$ , будем иметь

$$\begin{aligned} q^{-m} a(x, \xi, q) &= a(x', 0, 0, \eta_n, 1) + \\ &+ \sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon^j}{j!} \sum_{|\alpha|+\beta=j} \partial_{x_n}^{\alpha} D_{x_n}^{\beta} a(x', 0, 0, \eta_n, 1) t_n^{\alpha} \xi'^{\alpha} + \varepsilon^{N-1} r_{N+1}^{(1)}(x', t_n, \xi', \eta_n, \varepsilon) = \\ &= b_0(x', \eta_n) + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j b_j(x', t_n, \xi', \eta_n) + \varepsilon^{N-1} r_{N+1}^{(1)}(x', t_n, \xi', \eta_n, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где

$$b_0(x', \eta_n) = a(x', 0, 0, \eta_n, 1), \quad b_j = \sum_{|\alpha|+\beta=j} \frac{1}{j!} t_n^{\alpha} \partial_{x_n}^{\alpha} D_{x_n}^{\beta} a(x', 0, 0, \eta_n, 1) \xi'^{\alpha},$$

$$r_{N+1}^{(1)}(x', t_n, \xi', \eta_n, \varepsilon) = \sum_{|\alpha|+\beta=N+1} \frac{1}{(N+1)!} \times$$

$$\times t_n^{\alpha} \partial_{x_n}^{\alpha} D_{x_n}^{\beta} a(x', \varepsilon t_n, \varepsilon \xi', \eta_n, 1) \xi'^{\alpha} \quad (0 \leq \theta \leq 1). \quad (3.10)$$

Сопоставляя каждому символу в разложении (3.9) оператор свертки, получим второе (в отличие от (3.4)) расщепление оператора  $q^{-m} A$

$$q^{-m} A = B_0 + \sum_{j=1}^N \varepsilon^j B_j + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^{(1)}. \quad (3.11)$$

Подставляя (3.11) в (3.8) и приравнивая члены, содержащие  $\varepsilon$  в одинаковых степенях, получим



Подчиняя  $u_i^{(0)}$  граничным условиям (1.2), получим линейную алгебраическую систему для определения  $c_k^{(0)}(x')$

$$\sum_{k=1}^x b_{jk}(x') c_k^{(0)}(x') = f_j^{(0)}(x') \quad (j = 0, 1, \dots, x-1), \quad (3.17)$$

где

$$b_{jk}(x') = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^+ \frac{\gamma_{in}^{j \cdot k-1}}{b_{in}^+(x', \gamma_{in})} d\gamma_{in}, \quad (3.18)$$

$$f_j^{(0)}(x') = - \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^- \gamma_{in}' f_2(x', \xi_n) d\xi_n,$$

причем интегралы в (3.18) существуют, так как символ  $|b_{in}^+(x', \gamma_{in})|^{-1}$  гладкий, в силу леммы 2.1. Кроме того, мы предполагаем, что для граничной задачи (1.1)–(1.2) выполнен аналог условия Шапиро-Лопатинского [2]  $\det \|b_{jk}(x')\| \neq 0$ , так что система (3.17) разрешима.

Пусть далее  $\|b_k^{(1)}(x')\|$  — обратная к  $\|b_{jk}(x')\|$  матрица. Тогда

$$c_k^{(0)}(x') = \sum_{j=1}^x b_k^{(1)}(x') f_j^{(0)}(x').$$

Совершенно аналогично определяются  $c_k^{(1)}(x')$ , если учесть, что второе слагаемое в правой части (3.15) очевидно удовлетворяет граничным условиям (1.2), так как принадлежит  $H_x^0$ . Мы получаем, учитывая замечание к теореме 3.1

$$c_k^{(l)}(x') = \sum_{j=1}^x b_k^{(l)}(x') f_j^{(l)}(x') \quad (k=1, 2, \dots, x; l=0, 1, \dots, N), \quad (3.19)$$

где

$$f_j^{(l)}(x') = - \int_{-\infty}^{\infty} \Pi^- \gamma_{in}' \Phi_l(x', \xi_n) d\xi_n. \quad (3.20)$$

В результате мы получаем, что при всех  $l=0, 1, \dots, N$  сумма  $u_i = w_i^+(x', x_n) + v_i^-(x', t_n)$  удовлетворяет граничным условиям (1.2).

Таким образом, формальное построение асимптотики закончено. Решение  $u_i(x, \varepsilon)$  имеет вид

$$u_i(x, \varepsilon) = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k w_k^+(x) + \sum_{l=0}^N \varepsilon^l v_l^-(x', t_n) + z_{N+1}^-(x, \varepsilon), \quad (3.21)$$

где функции  $w_k^+(x', x_n)$  определяются из соотношений (3.5), функции  $v_l^-(x', t_n) = F_{\gamma_{in}^{-1}-t_n}^{-1} v_l^+(x', \gamma_{in})$  — из соотношений (3.15), (3.16), причем  $\sum_{j=0}^N v_j^-(w_j^+ + v_j^+)$  удовлетворяет граничным условиям (1.2).

Отметим, что определение функций  $w_k^+$  и  $v_k^+$  аналогично соответственно первому и второму итерационным процессам для дифференциальных уравнений [3].

#### § 4. Оценка остаточного члена

**Теорема 4.1.** Для остаточного члена  $z_{N+1}^+(x, \varepsilon)$  в разложении (3.21) при любом  $s > 0$  и при достаточно малых  $\varepsilon$  справедливы оценки

$$\|z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{s, 1}^+ \leq C_1 \varepsilon^{N+1} \|f\|_{s+N, 1}^+, \quad (4.1)$$

$$\|z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{L, 1} \leq C_2 \varepsilon^{N+1} \|f\|_{N, 1}^+, \quad (4.2)$$

$$\|P^* D_x^p z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{L, 1} \leq C_3 \varepsilon^{N+1-p} \|f\|_{N_1, 1}^+, \quad (4.3)$$

где  $N_1$  — некоторое число, зависящее от  $m$ ,  $\alpha$  и  $N$ . (Выражение для  $N_1$  приведено в конце доказательства этой теоремы).

**Доказательство.** Из формулы (3.21) следует, что остаточный член  $z_{N+1}^+(x, \varepsilon)$  удовлетворяет граничным условиям (1.2). Поэтому при достаточно малых  $\varepsilon$  для  $z_{N+1}^+$  справедлива оценка (2.9') теоремы 2.2

$$\|z_{N+1}^+(x, \varepsilon)\|_{s, 1}^+ \leq C \|P^* q^{-m} A z_{N+1}^+\|_{s-m, 1}. \quad (4.4)$$

Вычислим  $P^* q^{-m} A z_{N+1}^+$ . Применяя оператор  $P^* q^{-m} A$  к (3.21) и учитывая соотношения (3.4) и (3.11), получим

$$f(x) = P^* \left( a(x) + \sum_{j=1}^N \vartheta_j A_j + \varepsilon^{N+1} R_{N+1} \right) (w_1^+ + \varepsilon w_1^+ + \dots + \varepsilon^N w_N^+) + \\ + P^* \left( \sum_{j=0}^N \vartheta_j B_j + \varepsilon^{N+1} R_{N+1}^{(1)} \right) (v_0^+ + \varepsilon v_0^+ + \dots + \varepsilon^N v_N^+) - P^* q^{-m} A z_{N+1}^+. \quad (4.5)$$

Так как всегда выполнены соотношения (3.5) и (3.12), в уравнении (4.5) будут отсутствовать члены, содержащие  $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots, \varepsilon^N$ , так что

$$P^* q^{-m} A z_{N+1}^+ = P^* \varepsilon^{N+1} \left( R_{N+1} w_0^+ + \sum_{j=1}^N A_{N-j+1} w_j^+ + \right. \\ \left. + R_{N+1}^{(1)} v_0^+ + \sum_{j=1}^N B_{N-j+1} v_j^+ \right) + \dots, \quad (4.6)$$

где многоточием обозначены члены более высокого порядка по  $\varepsilon$ . Теперь из (4.4) и (4.6) видно, что для оценки остаточного члена достаточно оценить по норме выражения, стоящие в правой части (4.6).

Так как  $A_j$  — дифференциальные операторы порядка  $j$ , используя теорему 3.1, получим

$$\|P^* A_j w_k^+\|_{s-m, 1}^+ \leq C_1 \|P^* A_j w_k^+\|_{s-m}^+ \leq C_2 \|w_k^+\|_{s-m-j}^+ \leq C_3 \|f\|_{s-m+j, 1}^+. \quad (4.7)$$

Далее из (3.3), (1.4) и (1.10) выводим

$$|r_{N+1}(x, \xi, \varepsilon)| \leq C (1 + |\xi|)^{m'+N}, \text{ где } m' = \max [m, 1]$$

и, так как в силу леммы 2.1  $R_{N+1}$  — гладкий в полупространстве оператор, то

$$\|P^* R_{N+1} w_k^+ \|_{s-m, i} \leq C \|w_k^+ \|_{s-m'+m+N} \leq C_1 \|f\|_{s-m-m'-N-k}^{(1)}. \quad (4.8)$$

Переходим к оценке слагаемых вида  $B_i v_k^+$  и  $R_{N+1}^i v_k^+$  в правой части (4.6). Предварительно сформулируем две вспомогательные леммы. Введем обозначения

$$Rv = Op\left(\frac{1}{b_0^+(x', \eta_n)}\right) \theta^+ Op\left(\frac{1}{b_0^-(x', \eta_n)}\right) v(x', t_n),$$

$$r_{\pm}^{(p)}(x', t_n) = F_{\eta_n}^{-1} r_{\pm}^{(p)}(x', \eta_n) = F_{\eta_n}^{-1} \frac{1}{b_0^{\pm}(x', \eta_n)} \sum_{k=1}^s c_k^{(p)}(x') \gamma_n^{k-1}.$$

Кроме того, для оценки функций типа пограничного слоя естественно использовать норму следующего вида:

$$\|v_{\pm, i}^{\pm}\|_{s, i} = \|\Pi^{-1} \gamma_n^{-1} v\|_{s, i}, \quad (\gamma_n = \varepsilon \eta_n - i) \sqrt{|\xi'|^2 + 1}. \quad (4.9)$$

Лемма 4.1. При любом  $i \geq 0$  справедливы оценки

$$\|P^* t_n^i B_i v_{\pm, i}^{\pm}\|_{s, i} \leq C_1 \sum_{\mu < i} \|t_n^{\mu} v_{\pm, i}^{\pm}\|_{s+m'+i, \mu}, \quad (4.10)$$

$$\|t_n^i Rv\|_{s, i} \leq C_2 \sum_{\mu < i} \|t_n^{\mu} v_{\pm, i}^{\pm}\|_{s, \mu}, \quad s_1 = \max [0, s - m], \quad (4.11)$$

$$\|P^* R_{N+1}^i v_{\pm, i}^{\pm}\|_{s, i} \leq C_3 \sum_{\mu < N-1} \|t_n^{\mu} v_{\pm, i}^{\pm}\|_{s, \mu+m'-N+1}. \quad (4.12)$$

Лемма 4.2. При любом  $i \geq 0$  справедлива оценка

$$\|t_n^i r_{\pm}^{(s)}\|_{s, i} \leq C \|f\|_{s+\alpha+\rho+\frac{1}{2}}^{(s)}. \quad (4.13)$$

Доказательство лемм 4.1 и 4.2 помещено в § 5.

Исходя из формул (3.14) и (3.15), нетрудно убедиться, по индукции, что выражение для  $v_k^+(x', t_n)$  можно записать в виде

$$v_k^+(x', t_n) = \sum_{j=0}^k \sum_{|p|_j=1}^{(1)} (RB_1)^{j_1} \dots (RB_k)^{j_k} r_{\pm}^{(k-j)}, \quad (4.14)$$

где  $|p|_j = j_1 + 2j_2 + \dots + kj_k$ , а  $\sum^{(1)}$  обозначает суммирование в указанных пределах, учитывающее все слагаемые, которые получаются при перестановке любых  $RB_i$  и  $RB_k$ .

В силу неравенства (4.10) леммы 4.1

$$\|P^* B_i v_k^+ \|_{s-m, i} \leq C \sum_{\mu < i} \sum_{\substack{|p|_j=1 \\ j=k}}^{(1)} \|t_n^{\mu} (RB_1)^{j_1} \dots (RB_k)^{j_k} r_{\pm}^{(k-j)} \|_{s-m+N+1, \mu}. \quad (4.15)$$

В конечной сумме (4.15) достаточно оценить каждое слагаемое. Предварительно оценим оператор  $t_n^i RB_p$ , используя леммы 4.1 и 4.2.

Имеем

$$\begin{aligned} \|t_n R B_p v\|_{s, \varepsilon}^+ &\leq C_1 \sum_{\nu < \mu} \|P^\nu t_n B_p v\|_{s+\nu, \varepsilon}^+ \\ &\leq C_2 \sum_{\nu, \mu} \sum_{\sigma = \nu + \mu} \|t_n^2 v_{s+\nu, \varepsilon}^+ \|_{s+\mu, \varepsilon}^+ \|v_{s+\sigma, \varepsilon}^+ \|_{s+\mu, \varepsilon}^+ \\ &\leq C_3 \sum_{\sigma < \nu + \rho} \|t_n^2 v_{s+\nu, \varepsilon}^+ \|_{s+\nu, \varepsilon}^+ \|v_{s+\rho, \varepsilon}^+ \|_{s+\nu, \varepsilon}^+ \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|t_n^2 (R B_p)^{1/p} v\|_{s, \varepsilon}^+ \leq C_4 \sum_{\sigma = \mu + \rho / p} \|t_n^2 v_{s+\mu, \varepsilon}^+ \|_{s+\mu, \varepsilon}^+ \|v_{s+\rho, \varepsilon}^+ \|_{s+\mu, \varepsilon}^+ \quad (4.16)$$

Таким образом из (4.15) и (4.16) получим следующую (грубую) оценку:

$$\|P^j B_l v_k^+ \|_{s-m, \varepsilon}^+ \leq C \sum_{j=k} \sum_{i+j} \|t_n^2 r^{(k-i)} \|_{s, \varepsilon}^+ \quad (4.17)$$

где  $s_{ij} = s - m + j s_1 + j(m' + 1) + i + m'$ .

Применяя лемму 4.2, будем иметь

$$\|P^j B_l v_k^+ \|_{s-m, \varepsilon}^+ \leq C_1 \|f_k^+ \|_{s, \varepsilon}^+, \quad s_{ik} = s_{ik} + k + \nu + \frac{1}{2} \quad (4.18)$$

и аналогичную оценку с  $i = N + 1$  для  $R_{N+1}^{(1)} v_k^+$ .

С помощью формул (4.7), (4.8), (4.18) (в которых  $j = N$ ,  $k = N$ ,  $i = N + 1$ ), учитывая соотношения (4.4) и (4.6), получаем (4.1) с

$$N_1 = \max \{s - m + 2N, s - m + 2N + m', s'_{N+1, N}\}.$$

Не составляет труда проверить, что на самом деле при любых  $m$  и  $\nu$   $N_1 = s'_{N+1, N}$ . Формула (4.2) получается из (4.1) при  $s=0$ , а (4.3) легко выводится из (4.1) при  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ . Теорема доказана.

## § 5. Доказательство лемм

Доказательство леммы 2.1. Запишем разложение функции  $a_+(x, \xi', \xi_n, q)$  в ряд Лорана по степеням  $\xi_+ = \xi_n + i|\xi'|^2 + q^2$  в окрестности бесконечно удаленной точки

$$a_+(x, \xi', \xi_n, q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, \xi', q) \xi_+^{-k}, \quad (5.1)$$

$$c_k(x, \xi', q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \xi_+^{-s+k-1} a_+(x, \xi', \xi_n, q) d\xi_+, \quad (5.1')$$

где контур интегрирования в комплексной плоскости  $\xi_+$  является границей круга:  $|\xi_n| \leq R(|\xi'| + q)$ . Дифференцируя почленно ряд (5.1) ( $\nu \geq 1$ ), с помощью формулы Лейбница получим

$$\partial_{\xi_n}^{\nu} a_+(x, \xi', \xi_n, q) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{|\beta'| = |\gamma| = |\alpha|} \sum_{j=0}^{|\gamma'| - 1} a_{\beta'}^{\gamma'} \partial_{\xi_n}^{\alpha'} c_k(x, \xi', q) d_{\xi_n}^{(\alpha')} (\xi', q) \xi_+^{-k-|\alpha|-\nu}, \quad (5.2)$$

причем  $|d_{-}^{(j)}(\xi', q)| \leq C(|\xi'| + q)^{-j}$  и, следовательно, ограничены при  $q \geq q_0 > 0$ . Для дальнейшего достаточно записать ряд (5.2) в виде

$$\partial^{\alpha} a_{-}(x, \xi, q) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x, \xi', q) \xi_{+}^{\alpha-k}. \quad (5.3)$$

Заметим, что это очевидно можно сделать, так как, если  $k$ ,  $|\xi'|$  и  $l$  изменяются в указанных пределах,  $\xi_{+}^{\alpha-k}$  в (5.3) имеет ту же совокупность значений, что и  $\xi_{+}^{\alpha-k-|\xi'|+l}$ . При этом, так как  $a_{-}(x, \xi', \xi_n, q) \in O_{+}^1$  (см. (1.4)) и все  $d_{-}^{(j)}(\xi', q)$  ограничены при любых  $\xi'$  и  $q > q_0 > 0$ , то из (5.1'), (5.2), (5.3) выводим

$$|c_k(x, \xi', q)| \leq C(|\xi'| + q)^{k-1}, \quad (5.4)$$

где  $C$  не зависит от  $\xi'$  и  $q$ . Из (5.3) и (5.4), учитывая, что  $\xi_{-}^{\alpha}$  (при целых  $\alpha \geq 0$ ) является полиномом по  $\xi_{+}$  (и по  $\xi_n$ ), получим разложение

$$\xi_{-}^{\alpha} \partial^{\alpha} a_{-}(x, \xi, q) = p_{s+\dots-1}(x, \xi, q) + r_{-1}(x, \xi, q), \quad (5.5)$$

где  $p_{s+\dots-1}$  — полином по  $\xi_n$ , причем имеют место следующие оценки:

$$|p_{s+\dots-1}(x, \xi, q)| \leq C_1(q + |\xi|)^{s+\dots-1}, \quad |r_{-1}(x, \xi, q)| \leq C_2 \frac{(q + |\xi'|)^{s+\dots}}{q + |\xi'| + \xi_n}. \quad (5.6)$$

Легко видеть также, что для  $p_{s+\dots-1}(x, \xi, q)$  и  $r_{-1}(x, \xi, q)$  выполнены условия типа (1.3).

Далее, вновь применяя формулу Лейбница, будем иметь

$$\xi_{-}^{\alpha} \partial^{\alpha} a(x, \xi, q) = \xi_{-}^{\alpha} \sum_{|\beta| = |\alpha|} a_{\beta} \partial^{\beta} a_{+}(x, \xi, q) \partial^{\alpha} a_{-}(x, \xi, q).$$

Легко видеть, что  $\partial^{\alpha} a_{-}(x, \xi, q)$  допускает аналитическое продолжение в полуплоскость  $\text{Im} \xi_n < 0$  (с сохранением свойств (1.3) и (1.4)), и, следовательно, определяет гладкий в полупространстве оператор.

Воспользовавшись теперь леммой 3.4 из [1]<sup>\*</sup>, которая очевидно справедлива для символов, зависящих от  $x$  и от  $q$ , получим

$$\xi_{-}^{\alpha} \partial^{\alpha} a(x, \xi, q) = a_{-}^{(1)}(x, \xi, q) + r_{-1}^{(1)}(x, \xi, q), \quad \alpha \geq 1, \quad (5.7)$$

где  $a_{-}^{(1)}(x, \xi, q)$  и  $r_{-1}^{(1)}(x, \xi, q)$  удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1, откуда следует, что оператор, построенный по символу  $\partial^{\alpha} a(x, \xi, q)$  гладкий в полупространстве (порядка  $m-1$ ).

В случае  $\alpha=0$  отметим дополнительно, что в разложении

$$\xi_{-}^{\alpha} a(x, \xi, q) = a_{-}(x, \xi, q) + r_{-1}(x, \xi, q), \quad (5.8)$$

$a_{-}(x, \xi, q) \in O_{-m}$  и  $r_{-1}(x, \xi, q) \in O_{-m}$ , причем, как видно из доказательства, справедливы оценки

\* В лемме 3.4 из [1] утверждается, что произведение символов, удовлетворяющих условиям типа (2.2), (2.3) теоремы 2.1 или (5.5) и (5.6), также удовлетворяет условиям указанного вида.

$$|a_-(x, \xi, q)| \leq C_1 (q + |\xi|)^{s+m}, |r_{-1}(x, \xi, q)| \leq C_2 \frac{(q + |\xi'|)^{s+m+1}}{q + |\xi'| + |\xi_n|}, \quad (5.9)$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial \xi} a_-(x, \xi, q) \right| \leq C_3 (q + |\xi|)^{s+m-1}, \left| \frac{\partial}{\partial \xi} r_{-1}(x, \xi, q) \right| \leq C_4 \frac{(q + |\xi'|)^{s+m}}{q + |\xi'| + |\xi_n|}. \quad (5.9')$$

Наконец, для символа  $\frac{\partial^p}{\partial \xi_n^p} a_+^{-1}(x, \xi, q)$  можно провести аналогичные рассуждения, если учесть, что  $a_-(x, \xi, q) \neq 0$  при  $Im \xi_n > 0$ . Лемма доказана.

**Доказательство леммы 2.2.** Будем пользоваться обозначениями, принятыми в предложении 1.2 (§ 1), при  $b(x, \xi, q) = a_+^{-1}(x, \xi, q)$ ,  $m' = -s$ . Нам надо доказать для  $Tv_+ = R_1 v_+ + R_2 v_+$ , где  $R_1$  и  $R_2$  определяются формулами (1.8) и (1.9), вместо (1.7) соответствующую оценку в полупространстве

$$\|P T v_+\|_{s-(m-1), q} \leq C \|v_+\|_{s, q}. \quad (5.10)$$

Докажем свойство гладкости оператора  $R_2$  (для  $R_1$  доказательство несколько проще). В силу леммы 2.1

$$\begin{aligned} \bar{a}'(\tau, \xi, q) &= \bar{a}^{(2)}(\tau, \xi, q) + \bar{r}^{(2)}_{-s-1}(\tau, \xi, q), \quad \bar{b}'(\tau, \xi, q) = \bar{b}_-(\tau, \xi, q) + \\ &+ \bar{r}^{(3)}_{-s-1}(\tau, \xi, q), \end{aligned} \quad (5.11)$$

причем

$$|\bar{a}^{(2)}(\tau, \xi, q)| \leq C_1 \frac{(q + |\xi|)^m}{(1 + |\tau|)^p}, |\bar{r}^{(2)}_{-s-1}(\tau, \xi, q)| \leq C_2 \frac{(q + |\xi'|)^{m+s+1}}{(1 + |\tau|)^p (q + |\xi'| + |\xi_n|)^{s+1}} \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{a}^{(2)}(\tau, \xi, q) \right| &\leq C_3 \frac{(q + |\xi|)^{m-1}}{(1 + |\tau|)^p}, \quad \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{r}^{(2)}_{-s-1}(\tau, \xi, q) \right| \leq \\ &\leq C_4 \frac{(q + |\xi'|)^{m+s}}{(1 + |\tau|)^p (q + |\xi'| + |\xi_n|)^{s+1}}, \end{aligned} \quad (5.13)$$

где  $p$  сколь угодно велико, и, кроме того, выполняются оценки, аналогичные (5.12) для  $\bar{b}_-(\tau, \xi, q)$  и  $\bar{r}^{(3)}(\tau, \xi, q)$ .

Поясним написанные неравенства. Мы имеем  $\bar{a}^{(2)}(\tau, \xi, q) = \xi^{-s} \bar{a}_-(\tau, \xi, q)$  и  $\bar{r}^{(2)}_{-s-1}(\tau, \xi, q) = \xi^{-s-1} \bar{r}_{-1}(\tau, \xi, q)$  (см. (5.8)). Теперь из (5.9) получаем (5.12). Далее  $\frac{\partial}{\partial \xi} \bar{r}^{(2)}_{-s-1}(\tau, \xi, q) = \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^{-s-1}) \bar{r}_{-1}(\tau, \xi, q) + \xi^{-s} \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{r}_{-1}(\tau, \xi, q)$ .

Учитывая (5.9'), получаем (5.13).

Переходим к оценке  $R_2 v_+$ .

$$\|P R_2 v_+\|_{s, q} \leq \|R_2 v_+\|_{s, q} + \|\Gamma + \xi^{-s}_-\int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{a}^{(2)}(\xi - \tau_i, \tau_i, q) - \bar{a}^{(2)}(\xi - \tau_i, \tau_i, q)) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \widetilde{r}_{s-1}^{(3)}(\eta-\tau, \tau, q) v_-(\tau) d\tau d\tau_0 + \|\Pi^+\xi^s \int_{-\infty}^{+\infty} (\widetilde{r}_{s-1}^{(2)}(\xi-\tau, \tau, q) - \\
& - \widetilde{r}_{s-1}^{(2)}(\xi-\eta, \tau, q)) \widetilde{b}_-(\eta-\tau, \tau, q) v_-(\tau) d\tau d\tau_0 + \|\Pi^-\xi^s \int_{-\infty}^{+\infty} (\widetilde{r}_{s-1}^{(2)}(\xi-\tau, \tau, q) - \\
& - \widetilde{r}_{s-1}^{(2)}(\xi-\eta, \tau, q)) \widetilde{r}_{s-1}^{(3)}(\tau-\tau, \tau, q) v_-(\tau) d\tau d\tau_0. \quad (5.14)
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части (5.14) оценивается во всем пространстве как в предложении 1.1. Далее оценим, например, третье слагаемое. Запишем его в виде  $\|\Pi^-\xi^s \int k(\xi, \tau) v_-(\tau) d\tau_0$ . Используя неравенство (5.13) и (1.10), будем иметь

$$|\widetilde{r}_{s-1}^{(2)}(\xi-\tau, \tau, q) - \widetilde{r}_{s-1}^{(2)}(\xi-\eta, \tau, q)| \leq C \frac{(q+|\tau|)^{m+s} (1+|\eta-\tau|)^{\rho_1}}{(q+|\tau|+|\tau_n|)^{s+1} (1+|\xi-\eta|)^{\rho_2}},$$

причем  $\rho_1$  — сколь угодно большое число,  $\rho_2 = |m+s|+s+2$ . Учитывая также, что

$$|\widetilde{b}_-(\eta-\tau, \tau, q)| \leq \frac{(q+|\tau|)^{s-1}}{(1+|\eta-\tau|)^{\rho_1}},$$

оценим ядро  $k(\xi, \tau)$ , интегрируя по  $\tau$

$$|k(\xi, \tau)| \leq C \frac{(q+|\tau|)^{m+s-1}}{(q+|\tau|+|\tau_n|)^{s+1}} \int \frac{d\tau_1}{(1+|\xi-\tau_1|)^{\rho_1} (1+|\eta-\tau_1|)^{\rho_2-1}}.$$

Можно показать [4], что последний интеграл не превосходит  $\frac{C_1}{(1+|\xi-\tau|)^{\rho_1}}$ , причем  $\rho_1$  можно взять сколь угодно большим, так как  $\rho_1$  и  $\rho_2$  можно взять сколь угодно большими. Так как

$$|\xi^s| \leq C_2 (q+|\tau|)^s (1+|\xi-\tau|)^s \quad (s > 0),$$

получим

$$\|\Pi^-\xi^s \int k(\xi, \tau) v_-(\tau) d\tau_0\| \leq C_3 \left\| \int \frac{(q+|\tau|)^{m+s-1} v_-(\tau) d\tau}{(q+|\tau|+|\tau_n|)(1+|\xi-\tau|)^{\rho_1}} \right\|_0.$$

Далее, по4торяя доказательство теоремы 2.1 (§ 2), получаем требуемую оценку. Аналогично оцениваются остальные слагаемые в правой части (5.14). Лемма доказана.

Доказательство леммы 4.1. Используя (3.9), запишем выражение для  $t_n^s b_j(x', t_n, \xi', \tau_n)$  в виде

$$\begin{aligned}
t_n^s b_j(x', t_n, \xi', \tau_n) &= \sum_{|(\alpha+\beta)=j} \frac{1}{j!} t_n^{\alpha+\beta} \partial_{x'}^\alpha \partial_{\xi'}^\beta D_{x_n}^\alpha a'(x', 0, 0, \tau_n, 1) \xi'^{\beta\alpha} = \\
&= t_n^{s-\alpha} b_j^{(1)}(x', \xi', \tau_n).
\end{aligned}$$

Далее имеем  $(B_j^{(1)} = Op(b_j^{(1)}(x', \xi', \tau_n))$ ,

$$\|P^+ t_n^{\beta+1} B_j^{(1)} v_{+,k,z}\| \leq \sum_{s+j \rightarrow 0} \left\| \Pi^+ \tilde{\eta}^s \times \right. \\ \left. \times F_{x' \rightarrow z'} \left[ Op \left( \frac{\partial^s b_j^{(1)}(x', \xi', \tau_n)}{\partial \tau_n^s} \right) \frac{\partial^s}{\partial \tau_n^s} \tilde{v}_-(x', \tau_n) \right] \right\|_0.$$

Учитывая свойства символа  $a(x, \xi, q)$  (формулы (1.5), (1.5')) и лемму 2.1, легко видеть, что символу  $\frac{\partial^s}{\partial \tau_n^s} b_j^{(1)}(x', \xi', \tau_n)$  отвечает гладкий в полупространстве оператор порядка  $j + m'$ ,  $m' = \max(m, 1)$ . Отсюда вытекает первое утверждение леммы — формула (4.10). Аналогично доказываются соотношения (4.11) и (4.12). При доказательстве (4.11) следует заметить, что  $\frac{\partial^s}{\partial \tau_n^s} [b_0^-(x', \tau_n)]^{-1}$  — аналитическая функция  $\tau_n$  при  $Im \tau_n < 0$  и, следовательно, соответствующий оператор будет гладким в полупространстве (порядка  $s_1 = \max(0, s - m)$ ). Лемма доказана.

Доказательство леммы 4.2. Предположим для простоты, что  $[b_0^+(x', \tau_n)]^{-1}$  — финитная бесконечно дифференцируемая функция  $x'$ . Обозначим  $\tilde{b}_s(\xi', \tau_n) = F_{x' \rightarrow z'} \frac{\partial^s}{\partial \tau_n^s} [b_0^+(x', \tau_n)]^{-1}$ . Записывая  $\eta_n^s$  в виде  $\eta_n^s = \sum_{j=0}^s d_{s-j}(\xi') \eta_n^j$ , ( $|d_{s-j}(\xi')| < (1 + |\xi'|)^{s-j}$ ), получим

$$\|t_n^s r_{\mu, z}^+\| \leq C \sum_{k=1}^s \sum_{s+j \rightarrow k} \left\| \Pi^+ d_{s-j}(\xi') \int_{-\infty}^{\tau_n} \tau_n^{k+j-\beta-1} \tilde{b}_s(\xi' - \xi', \tau_n) c_k^{(\beta)}(\xi') d\xi' \right\|_0 \quad (5.15)$$

(слагаемые, для которых  $k - \beta < 1$ , равны нулю).

В силу леммы 2.1 при  $s \gg \mu$  имеем

$$\eta_n^s \tilde{b}_s(\xi' - \xi', \tau_n) = \tilde{p}_{s-\mu}(\xi' - \xi', \tau_n) + \tilde{r}_{s-1}^{(s)}(\xi' - \xi', \tau_n),$$

где  $\tilde{p}_{s-\mu}$  — полином по  $\tau_n$  степени  $s - \mu$ , причем

$$|\tilde{p}_{s-\mu}(\xi' - \xi', \tau_n)| \leq C_1 \frac{(1 + |\tau_n|)^{-s-\mu}}{(1 + |\xi' - \xi'|)^{\mu}}, \quad |\tilde{r}_{s-1}^{(s)}(\xi' - \xi', \tau_n)| \leq \\ \leq C_2 \frac{1}{(1 + |\tau_n|)(1 + |\xi' - \xi'|)^{\mu}},$$

где  $\mu$  сколь угодно велико.

Так как  $\Pi^+ \tilde{p}_{s-\mu}(\xi' - \xi', \tau_n) = 0$  [1], продолжая оценивать (5.15), получим

$$\|t_n^s r_{\mu, z}^+\| \leq C \int \frac{(1 + |\xi'|)^{s-j} c_k^{(\beta)}(\xi')}{(1 + |\xi' - \xi'|)^{\mu}} d\xi' \leq C_1 |c_k^{(\beta)}|_{s-j} \leq C_2 |c_k^{(\beta)}|, \quad (5.16)$$

где норма  $|\cdot|$  берется по гиперплоскости  $x_n = 0$ .

Из (3.19) легко видеть, что для оценки  $c_n^{-1}(x')$  достаточно оценить  $f_j^{(n)}(x')$ , определяемые формулами (3.20). В (3.20) оператор  $\Pi^*$  можно опустить, так как  $\Phi_l(x', x_n)$  — гладкая функция во всем пространстве, а интегрирование по  $\xi_n$  означает в  $x$ -представлении сужение на гиперплоскость  $x_n=0$ . Далее, используя неравенство Коши-Буняковского (так же как в [2] и [5]) и (3.7), получим

$$\|f_j^{(n)}(x')\| \leq \left( \int_0^{\tau_n} (1 + |\xi'|^2)^{\nu} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_n^l \Phi_l(\xi) d\xi_n \int_{\mathbb{R}^n} d\xi' \right)^{1/2} \leq C \|f_j\|_{\dots}^{1/2}. \quad (5.17)$$

Из (5.16) и (5.17) получаем (4.13). Лемма доказана.

Автор выражает глубокую благодарность М. И. Вишику, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский энергетический институт

Поступило 7.XII.1967

Լ. Դ. ՊՈԿՐՈՎՍԿԻ

ԵԶՐԱՅԻՆ ԿՆԻՒԹՅԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ԵՄՔԻ ՏԻՊԻ  
ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՍՏՈՐ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Այս աշխատանքում քաղցրացված է ընդհանուր տեսքի սիմվոլով պարամետրից կախված ծայքի տիպի հավասարման համար հզրային խնդրի միարժեք լուծելիությունը կիսատարածությունում:

Բացի դրանից, տրված է հիմնավորված է մի մեթոդ, որն արտահայտում է մոտավոր լուծումը փոքր պարամետրի նկատմամբ շարքի տեսքով: Ինչպես և դիֆերենցիալ հավասարումների դեպքում, լուծման ասիմպտոտիկան պարունակում է այսպես կոչված հզրային շերտի տիպի ֆունկցիաներ, որոնք կոմպենսացնում են հզրային պայմանների բավարարման մեջ հղած շեղումը:

L. D. POKROVSKYI

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATIONS  
IN CONVOLUTIONS, CONTAINING PARAMETER

S u m m a r y

The simple solvability for homogeneous boundary value problem in the semispace for an equation in convolutions with symbol, depending on parameter is proved.

Furthermore the method of constructing the approximate solution in the form of a series of powers of the small parameter is pointed out.

As in the case of partial differential equations, the approximate solution contains the so called boundary layer functions, which compensate the discordance in the boundary conditions.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. И. Вишик, Г. И. Эскин. Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XX, вып. 3, 1965, 89—152.
2. М. С. Агринович, М. И. Вишик. Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида, УМН, XIX, вып. 3, 1964, 53—161.
3. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, УМН, XII, вып. 5, 1957, 3—122.
4. J. J. Kohn, L. Nirenberg. On algebra of pseudodifferential operators, Comm. Pure and Appl. Math., 18, № 1—2, 1965, 269—305.
5. Л. Д. Покровский. Асимптотика решений некоторых классов уравнений в свертках, Доклады научн. техн. конференции МЭИ, секция математическая, 1967, 155—185.