ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 2, 1968 Математика

Г. Л. АУНЦ

ОБ ОЦЕНКАХ РОСТА КАНОНИЧЕСКОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Статья посвящена оценкам индикатрисы $h(\varphi)$ и нижней индикатрисы $\mathbf{h}(\varphi)$ целой функции

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right) \quad (z = re^{i\varphi}), \tag{1}$$

где $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{|\lambda_n|} < \infty$. Сначала рассматривается случай, когда $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел с нижней плотностью $\alpha = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}$ и верхней плотностью $\beta = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{n}{\lambda_n}$. А. А. Гольдберг изучал более общий класс целых функций, считая заданными верхнюю и нижнюю угловые плотности нулей [1]. В частности, для функций вида (1) и положительных λ_n полученные им оценки являются точными во всем классе. При этом нижняя оценка для $\mathbf{h}(\varphi)$ стремится к $-\infty$ при $\varphi\to 0$ (и при $\varphi\to\pi$). И. Ф. Красичков нашел условие, необходимое и достаточное для того, чтобы при всех φ ($\varphi\neq 0$, $\varphi\neq\pi$) имело место неравенство $\mathbf{h}(\varphi) > C$, где C — константа, однако примененный им метод не позволяет оценить эту константу [2].

Ниже при некоторых дополнительных ограничениях будут найдены такие функции $H_1(\varphi)$ и $H_2(\varphi)$, что $H_1(\varphi) \leqslant \mathbf{h}(\varphi) \leqslant h(\varphi) \leqslant H_2(\varphi)$, причем $H_2(\varphi) - H_1(\varphi) \to 0$ равномерно в интервалах $(0, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, если $\beta - \alpha \to 0$. Этот результат был доложен автором на Международном конгрессе математиков в Москве [3].

1°. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел с нижней плотностью α и верхней плотностью $\beta < \infty$. В силу симметрии будем всегда рассматривать рост функции $f(z)$, определенной равенством (1), только для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$. Если $0 < \alpha' < \alpha$, $\beta' > \beta$, то при достаточно большом n имеем

$$\frac{n}{\beta'} < \lambda_n < \frac{n}{\alpha'}, \tag{2}$$

а так как величина

$$p(t;\, z) = \left|1-\frac{z^2}{t^2}\right| = \sqrt{\frac{r^4}{t^4} - 2\frac{r^2}{t^2}\cos 2\varphi + 1} \quad (t > 0)$$

при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ возрастает с уменьшением t, то

$$\left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\alpha'^2 z^2}{n^2}\right)\right| \leqslant \left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)\right| \leqslant \left|\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\beta'^2 z^2}{n^2}\right)\right|$$

и, следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом r

$$\pi(\alpha'-\varepsilon)\sin\varphi \leqslant \frac{1}{r}\ln|f(re^{i\varphi})| \leqslant \pi(\beta'+\varepsilon)\sin\varphi,$$

то есть $\pi\alpha\sin\varphi \leqslant \underline{h}(\varphi) \leqslant h(\varphi) \leqslant \pi\beta\sin\varphi$, так как α' и β' можно взять сколь угодно близкими к α и β. В дальнейшем, имея это в виду, мы будем в неравенствах (2) писать, для простоты, α и β вместо α' и β'.

Пусть теперь $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$. Тогда функция $p(t;\ z)$ (z фиксировано) убывает от $+\infty$ до $\sin 2\varphi$, когда t изменяется от 0 до $\frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ $\left(p=1 \text{ при } t=\frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right)$ и возрастает от $\sin 2\varphi$ до 1, когда t изменяется от $\frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ до $+\infty$. Пусть число n' таково, что $\lambda_{n'} \leqslant \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\lambda_{n'+1} > \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, тогда $p(\lambda_n;\ z) < p\left(\frac{n}{\beta};\ z\right)$ при $n \leqslant n'$ и $p(\lambda_n;\ z) < p\left(\frac{n}{\alpha};\ z\right)$ при $n > n'$. Пользуясь неравенствами (2) будем иметь $\frac{n'}{\beta} < \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\frac{n'+1}{\alpha} > \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, откуда

$$\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - 1 < n' \leqslant \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}. \tag{3}$$

Положим далее $n_1 = \left[\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right]$, $n_2 = \left[\frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + 1\right]$, тогда $\frac{n_1}{\alpha} \leqslant \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\frac{n_2}{\beta} \geqslant \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, поэтому, в силу (2), $p(\lambda_{n_1};\ z) > p\left(\frac{n_1}{\alpha};\ z\right)$ и, тем более, $p(\lambda_n;\ z) > p\left(\frac{n}{\alpha};\ z\right)$ при $n < n_1$; аналогично $p(\lambda_{n_2};\ z) > p\left(\frac{n_2}{\beta};\ z\right)$ и, тем более, $p(\lambda_n;\ z) > p\left(\frac{n}{\beta};\ z\right)$ при $n > n_2$. Заметим для дальнейшего, что имеют место очевидные неравенства

$$\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} - 1 < n_1 \leqslant \frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}},\quad \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} < n_2 \leqslant \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} + 1,$$

а также, как это следует из (2),

$$\frac{\alpha r}{\beta\sqrt{\cos 2\varphi}} - \frac{1}{\beta} < \lambda_{n_1} < \frac{r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} < \lambda_{n_2} < \frac{\beta r}{\alpha\sqrt{\cos 2\varphi}} + \frac{1}{\alpha}. \tag{4}$$

Из определения чисел n', n_1, n_2 следует

$$\prod_{n=1}^{n_1} p\left(\frac{k}{\alpha}; z\right)\prod_{k=n_1+1}^{n_2-1} p(\lambda_k; z)\prod_{k=n_2}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; z\right)\leqslant|f(z)|\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{n'} p\left(\frac{k}{\beta}; z\right)\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; z\right)$$

или

$$\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; z\right)\prod_{k=n_2}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; z\right)\left(\prod_{k=n_1+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; z\right)\right)^{-1}\prod_{k=n_1+1}^{n_2-1} p(\lambda_k; z)\leqslant$$

$$\leqslant|f(z)|\leqslant\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; z\right)\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; z\right)\left(\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; z\right)\right)^{-1}. \tag{5}$$

2. Перейдем к оценке произведений, входящих в (5). Заметим сначала, что при $\varphi\neq 0$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\ln\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; re^{i\varphi}\right)=\pi\beta\sin\varphi,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r}\ln\prod_{k=1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; re^{i\varphi}\right)=$$

$$=\pi\alpha\sin\varphi.$$

Имеем далее (при больших r)

$$\ln\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; re^{i\varphi}\right)=\frac{1}{2}\sum_{k=n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\alpha r}{k}, \varphi\right)\sim$$

$$\sim\frac{1}{2}\int_{n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\alpha r}{u}, \varphi\right)du, \tag{6}$$

где $q(t, u)=\ln\left[(t-\cos 2\varphi)^2+\sin^2 2\varphi\right]$. При $u\geqslant\dfrac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ всегда $q\left(\dfrac{\alpha r}{u}, \varphi\right)\leqslant 0$, и поэтому при достаточно большом r из (3) и (6) получим

$$\frac{1}{r}\ln\prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; re^{i\varphi}\right)\leqslant\frac{1}{2r}\int_{\alpha r\cos^{-1/2}2\varphi}^{\infty} q\left(\frac{\alpha r}{u}, \varphi\right)du.$$

Выражение в правой части последнего равенства (как легко в этом убедиться с помощью подстановки $\dfrac{\alpha^2 r^2}{u^2}=t$) не зависит от r и является некоторой элементарной функцией от φ; обозначим ее через $g_1(\alpha, \beta, \varphi)$. Не выписывая (ввиду громоздкости) эту функцию в явном виде, заметим лишь, что

$$g_1(\alpha, \beta, 0)=-\beta\ln(\beta^2-\alpha^2)-\alpha\ln\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}+2\beta\ln\beta$$

и $g_1\left(\alpha, \beta, \dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

Аналогично имеем

$$\ln \prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, re^{i\varphi}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{k},\, \varphi\right) \sim$$

$$\sim \frac{1}{2}\int_{n'+1}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{u},\, \varphi\right) du. \tag{7}$$

Если $\beta \leqslant \alpha\sqrt{2}$, то при $\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \leqslant u \leqslant \frac{\beta r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ имеем $\frac{\beta^2 r^2}{u^2} \leqslant \frac{2\alpha^2 r^2}{u^2} \leqslant$ $\leqslant 2\cos 2\varphi$, поэтому $\left(\frac{\beta^2 r^2}{u^2} - \cos 2\varphi\right)^2 \leqslant \cos^2 2\varphi$, следовательно $q\left(\frac{\beta r}{u},\, \varphi\right) \leqslant$ $\leqslant 0$ и поэтому из (3) и (7) при достаточно большом r следует

$$\frac{1}{r}\ln \prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, re^{i\varphi}\right) \geqslant \frac{1}{2r}\int_{\alpha r\cos^{-1/2}2\varphi}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{u},\, \varphi\right) du.$$

Выражение в правой части последнего неравенства не зависит от r и является некоторой элементарной функцией $g_2^{(1)}(\alpha, \beta, \varphi)$, причем

$$g_2^{(1)}(\alpha, \beta, 0) = -\alpha\ln(\beta^2 - \alpha^2) - \beta\ln\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} + 2\alpha\ln\alpha;\; g_2^{(1)}\left(\alpha, \beta, \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Если $\beta > \alpha\sqrt{2}$, то при $\frac{\alpha r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} < u < \frac{\beta r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}$ имеем $q\left(\frac{\beta r}{u},\, \varphi\right) > 0$ и поэтому теперь оценка иная:

$$\frac{1}{r}\ln \prod_{k=n'+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta};\, re^{i\varphi}\right) \geqslant \frac{1}{2r}\int_{\beta r(2\cos 2\varphi)^{-1/2}}^{\infty} q\left(\frac{\beta r}{u},\, \varphi\right) du =$$

$$= g_2^{(2)}(\alpha, \beta, \varphi) = g_2^{(1)}\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}},\, \beta, \varphi\right).$$

Положив $g_2(\alpha, \beta, \varphi) = g_2^{(1)}(\alpha, \beta, \varphi)$, если $\beta \leqslant \alpha\sqrt{2}$ и $g_2(\alpha, \beta, \varphi) =$ $= g_2^{(2)}(\alpha, \beta, \varphi)$, если $\beta > \alpha\sqrt{2}$, мы приходим к следующей оценке:

$$h(\varphi) \leqslant H(\varphi), \tag{8}$$

где $H(\varphi) = \pi\beta\sin\varphi$ при $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $H(\varphi) = \pi\beta\sin\varphi + g_1(\alpha, \beta, \varphi) -$ $- g_2(\alpha, \beta, \varphi)$ при $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ (оценка справедлива и при $\varphi = 0$, в силу непрерывности как функции $H(\varphi)$, так и индикатрисы $h(\varphi)$). Заметим, что в силу тригонометрической выпуклости индикатрисы из (8) следует, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$

$$h(\varphi) \leqslant (\pi\beta - h_0)\sin\varphi + h_0\cos\varphi,$$

где $h_0 = g_1(\alpha, \beta, 0) - g_2(\alpha, \beta, 0)$ ($h_0 = h_0(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция, $h_0 > 0$ при $\beta > \alpha$, $h_0 = 0$ при $\beta = \alpha$).

Повторяя те же выкладки, что и выше, и учитывая асимптотические равенства $\frac{n_1}{r} \sim \frac{\alpha}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\frac{n_2}{r} \sim \frac{\beta}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, получим

$$\frac{1}{r} \ln \prod_{k=n_1+1}^{\infty} p\left(\frac{k}{\alpha}; re^{i\varphi}\right) \sim g_1(\alpha, \alpha, \varphi),$$

причем, как легко подсчитать, $g_1(\alpha, \alpha, 0) = -2\alpha \ln 2$ и

$$\frac{1}{r} \prod_{k=n_2}^{\infty} p\left(\frac{k}{\beta}; re^{i\varphi}\right) \sim g_2^{(1)}(\beta, \beta, \varphi),$$

причем $g_2^{(1)}(\beta, \beta, 0) = -2\beta \ln 2$.

Что касается последнего множителя в левой части (5), то очевидно, что

$$\ln \prod_{k=n_1+1}^{n_2-1} p(\lambda_k; re^{i\varphi}) = \sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} \ln \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{\lambda_k^2} \right| > \frac{(\beta-\alpha) r}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \ln \sin 2\varphi,$$

так как $n_2 - n_1 \sim \frac{(\beta-\alpha) r}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ и $\min_t \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{t^2} \right| = \sin 2\varphi$.

Таким образом, доказана оценка

$$h(\varphi) \geqslant H(\varphi), \tag{9}$$

где $H(\varphi) = \pi\alpha \sin\varphi$, если $\frac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и

$$H(\varphi) = \pi\alpha \sin\varphi + g_2(\beta, \beta, \varphi) - g_1(\alpha, \alpha, \varphi) + \frac{\beta-\alpha}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \ln \sin 2\varphi,$$

если $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$. Нетрудно проверить, что оценки (8), (9) справедливы и при $\alpha = 0$.

Оценки (8), (9) по существу содержатся в упомянутых результатах А. А. Гольдберга (хотя и не в такой форме).

3°. Предположим теперь, что $\alpha > 0$ и последовательность нулей $\{\lambda_n\}$ функции $f(z)$ удовлетворяет некоторым дополнительным условиям. Пусть, сначала, существует такая положительная постоянная γ, что для некоторой монотонной и дифференцируемой функции $F(x)$ такой, что $F(n) = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$, имеет место неравенство $F'(x) \geqslant \gamma$ при любом $x > 0$.

Так как $\ln \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{t^2} \right| < 0$ тогда и только тогда, когда

$$t > \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}, \text{ то}$$

$$\sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} \ln \left| 1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{\lambda_k^2} \right| \sim \frac{1}{2} \int_{n_1}^{n_2} q\left(\frac{r}{F(u)}, \varphi\right) du =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{F_1}^{F_2} q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)\theta'(t)\,dt > \frac{1}{2\gamma}\int_{\bar{F}_1}^{F_2} q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)dt; \tag{10}$$

здесь $F_1 = F(n_1)$, $F_2 = F(n_2)$, $\bar{F}_1 = \max\left(F_1, \frac{r}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right)$, θ — функция, обратная по отношению к F. Вычислив интеграл, стоящий в правой части последнего равенства, получим

$$\int_{\bar{F}_1}^{F_2} q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)dt = r\left[\Phi(v_2, \varphi) - \Phi(v_1, \varphi) + \tilde{\Phi}(v_2, \varphi) - \tilde{\Phi}(v_1, \varphi)\right] + rO(\varphi, r),$$

где $$v_1 = \max\left(\frac{F_1}{r}, \frac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right),\ v_2 = \frac{F_2}{r},\ \Phi(v, \varphi) =$$

$$= (v - \cos\varphi)\left|\ln\left(\frac{1}{v} - \cos\varphi\right)^2 + \sin^2\varphi\right|$$

$$\tilde{\Phi}(v, \varphi) = (v + \cos\varphi)\ln\left|\left(\frac{1}{v} + \cos\varphi\right)^2 + \sin^2\varphi\right|,$$

а $O(\varphi, r) = \sin\varphi\cdot O(1)$ — функция, которую мы не будем выписывать. Из определения величин v_1, v_2 и неравенств (4) следует, что (асимптотически)

$$\max\left(\frac{\alpha}{\beta\sqrt{\cos 2\varphi}}, \frac{1}{\sqrt{2\cos 2\varphi}}\right) \leqslant v_1 < \frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \leqslant v_2 \leqslant \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\cos 2\varphi}} \tag{11}$$

и

$$0 \leqslant v_2 - v_1 \leqslant \min\left|\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right|.$$

Функция $\Phi(v, \varphi)$ непрерывна, как в этом легко можно убедиться, всюду (в том числе и в точке $v = 1$, $\varphi = 0$). Оценим разности $\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0)$ и $\tilde{\Phi}(v_2, 0) - \tilde{\Phi}(v_1, 0)$. Имеем

$$\Phi'(v, 0) = 2\left(\ln\left|\frac{1}{v} - 1\right| + \frac{1}{v}\right).$$

Уравнение $\Phi'(v, 0) = 0$ имеет единственный действительный корень $v_0 = \frac{1}{1+u_0}$ $(0{,}78 < v_0 < 0{,}79)$, где u_0 — корень уравнения $e^{-u} = eu$ $(0{,}27 < u_0 < 0{,}28)$. При $v = v_0$ функция $\Phi(v, 0)$ имеет максимум и, так как $v_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то из (11) получаем

$$0 \geqslant \Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) \geqslant \Phi\left(\frac{\beta}{\alpha}, 0\right) - \Phi\left(\max\left(\frac{\alpha}{\beta}, v_0\right), 0\right).$$

Итак, если $\frac{\alpha}{\beta} \geqslant v_0 = 0{,}78\cdots$, то

$$\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) \geqslant 2(\beta - \alpha)\left|\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\right|.$$

Если же $\frac{\alpha}{\beta} < v_0$, то

$$\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) \geqslant 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - 2(v_0 - 1)\ln\left(\frac{1}{v_0} - 1\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{v_0}\right),$$

(мы воспользовались тем, что v_0 — корень уравнения $\Phi'(v, 0) = 0$), то есть в этом случае $\Phi(v_2, 0) - \Phi(v_1, 0) > 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right)\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - 0{,}56$.

Что касается разности $\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0)$, то оценим ее по формуле Лагранжа. Имеем всегда

$$\bar{\Phi}'(v, 0) = 2\left|\ln\left(\frac{1}{v} + 1\right) - \frac{1}{v}\right| < 0,\ \Phi''(v) = -\frac{1}{v(v+1)} + \frac{1}{v^2} > 0$$

и поэтому

$$\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0) \geqslant (v_2 - v_1)\min_{[v_1, v_2]} \bar{\Phi}'(v, 0) = (v_2 - v_1)\,\bar{\Phi}'(v_1, 0).$$

Если $\beta \leqslant \alpha\sqrt{2}$, то $v_2 - v_1 \leqslant \frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}$ и

$$\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0) \geqslant 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha}{\beta}\right)\left|\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\right|.$$

Если же $\beta > \alpha\sqrt{2}$, то

$$\bar{\Phi}(v_2, 0) - \bar{\Phi}(v_1, 0) > 2\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left|\ln(1 + \sqrt{2}) - \sqrt{2}\right| >$$

$$> -1{,}07 \cdot \left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Таким образом, при φ близком к 0 имеем асимптотически

$$\frac{1}{r}\sum_{k=n_1+1}^{n_2-1} \ln\left|1 - \frac{r^2 e^{2i\varphi}}{\gamma_k^2}\right| > \frac{k(\alpha, \beta)}{\gamma} - \frac{O(\varphi)}{\gamma},$$

где $O(\varphi)$ зависит также от α и β, но $\lim\limits_{\varphi \to 0} O(\varphi) = 0$ при любых α и β, а

$$k(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)\left|\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\right|,$$

если $\frac{\alpha}{\beta} > v_0 = 0{,}78\cdots$,

$$k(\alpha, \beta) = (\beta - \alpha)\left|\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)\ln\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha}\right| - 0{,}28,$$

если $\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant \frac{\alpha}{\beta} < v_0$, и

$$k(\alpha, \beta) = \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \ln\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right) - \left|0{,}28 + 0{,}54\left(\frac{\beta}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|,$$

если $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Итак при $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ имеем

$$\underline{h}(\varphi) > \pi\alpha \sin\varphi + g_2(\beta, \beta, \varphi) - g_1(\alpha, \alpha, \varphi) + \frac{k(\alpha, \beta)}{\gamma} + \frac{O(\varphi)}{\gamma} = \underline{\bar{H}}(\varphi),$$

причем $\underline{\bar{H}}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\alpha \sin\frac{\pi}{4}$. Функция $\frac{1}{f(z)}$ — голоморфна в любом угле $0 < \delta \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$, и ее индикатриса не превышает в этом угле $-\underline{\bar{H}}(\varphi)$.

Обозначим $\underline{\bar{H}}(0) = \underline{h}_0$. Из непрерывности функции $\underline{\bar{H}}(\varphi)$ и тригонометрической выпуклости индикатрисы отсюда следует (δ можно взять сколь угодно малым), что индикатриса функции $\frac{1}{f(z)}$ в угле $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ не превышает величины

$$-\sqrt{2}\,\underline{h}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) - \pi\alpha \sin\varphi.$$

Следовательно, при $0 < \varphi \leqslant \frac{\pi}{4}$ имеем

$$\underline{h}(\varphi) > \pi\alpha \sin\varphi + \sqrt{2}\,\underline{h}_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = (\pi\alpha - \underline{h}_0)\sin\varphi + \underline{h}_0 \cos\varphi, \quad (12)$$

причем

$$\underline{h}_0 = -2(\beta - \alpha)\ln 2 + \frac{k(\alpha, \beta)}{\gamma}$$

($\underline{h}_0 = \underline{h}_0(\alpha, \beta)$ — непрерывная функция, $\underline{h}_0 < 0$, если $\beta > \alpha$, $\underline{h}_0 = 0$, если $\beta = \alpha$).

Условие $F'(x) \geqslant \gamma > 0$ можно ослабить. Из приведенных рассуждений следует, что оценка (12) сохранится, если потребовать лишь, чтобы для некоторого $\gamma > 0$ множество $E_\gamma(x)$ точек $t \in (0, x)$, в которых $\theta'(t) > \frac{1}{\gamma}$, было таково, что

$$\int\limits_{E_\gamma(x)} \theta'(t)\,dt = o(x).$$

Действительно, в этом случае неравенство (10) сохранится (и даже усилится), если к его правой части прибавить величину

$$P(r, \varphi, \gamma) = \frac{1}{2}\int\limits_{G} q\left(\frac{r}{t}, \varphi\right)\cdot\theta'(t)\, dt,$$

где $G = [\bar{F}_1, F_2] \cap E_\gamma$, а E_γ — множество всех точек t, в которых $\theta'(t) > \frac{1}{\gamma}$. Но

$$P(r, \varphi, \gamma) > \frac{1}{2}\ln\sin 2\varphi \cdot \int\limits_{E_\gamma(F_2)} \theta'(t)\, dt,$$

а так как $F_2 \leqslant \frac{\beta r}{\alpha\sqrt{\cos 2\varphi}}$, то при любом $\varphi \neq 0$, в силу сделанного предположения,

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} P(r, \varphi, \gamma) = 0.$$

4°. Итак, если $\{\lambda_n\}$ — последовательность положительных чисел с конечной верхней плотностью, найдены функции $H_1(\alpha, \beta, \varphi)$, $H_2(\alpha, \beta, \varphi)$ такие, что

$$H_1(\alpha, \beta, \varphi) \leqslant \underline{h}(\varphi) \leqslant \bar{h}(\varphi) \leqslant H_2(\alpha, \beta, \varphi) \tag{13}$$

(H_1 и H_2 — четные функции от φ и $H_i(\alpha, \beta, \varphi + \pi) = H_i(\alpha, \beta, \varphi)$, $i = 1, 2$). При некоторых дополнительных условиях $\lim\limits_{\beta\to\alpha}(H_2 - H_1) = 0$ равномерно. Перейдем к случаю, когда $\{\lambda_n\}$ — последовательность комплексных чисел, расположенных в угле $|\arg z| < \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $\sigma = [a, b]$ — некоторый отрезок, σ_i — интервал, полуинтервал, отрезок или точка, $\sigma_i \cap \sigma_k = \varnothing$ при $i \neq k$, $\sigma = \bigcup \sigma_i$, α и β — меры, заданные на σ, причем $0 \leqslant \alpha(\sigma_i) \leqslant \beta(\sigma_i) \leqslant M$ для любого $\sigma_i \subset \sigma$, а $K(\alpha, \beta, \psi)$ — действительная функция, ограниченная в области $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant M$, $a \leqslant \psi \leqslant b$. Пусть, наконец, l — некоторый признак, в соответствии с которым всякому σ_i ставится в соответствие точка ψ_i, принадлежащая $\bar{\sigma}_i$. Положим, по определению,

$$\overline{\int\limits_{\psi\in\sigma,\, l}} K[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \psi] = \sup \sum_i K[\alpha(\sigma_i), \beta(\sigma_i), \psi_i],$$

$$\underline{\int\limits_{\psi\in\sigma,\, l}} K[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \psi] = \inf \sum_i K[\alpha(\sigma_i), \beta(\sigma_i), \psi_i],$$

где верхняя и нижняя грани берутся по всем конечным и счетным разбиениям отрезка σ.

Если $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$, причем r и ρ фиксированы, то величина $\left|1 - \frac{z^2}{w^2}\right|$ возрастает и убывает одновременно с $|\sin(\varphi - \theta)|$, поэтому если признаки l_1 и l_2 состоят в том, что при заданном φ для множества σ_i выбирается такое $\theta = \theta_i \in \sigma_i$, для которого величина $|\sin(\varphi - \theta)|$ — наименьшая, соответственно — наибольшая, то из (13) следует, что для индикатрисы $h(\varphi)$ и нижней индикатрисы $\underline{h}(\varphi)$ функции $f(z)$, определенной равенством (1), вне углов $|\arg(\pm z)| \leqslant \vartheta$ имеют место оценки

$$\int\limits_{\theta\in\sigma,\, l_1} H_1[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \varphi - \theta] \leqslant \underline{h}(\varphi) \leqslant h(\varphi) \leqslant \int\limits_{\theta\in\sigma,\, l_2} H_2[\alpha(d\sigma), \beta(d\sigma), \varphi - \theta],$$

где $\sigma = [-\vartheta, \vartheta]$, $\alpha(\sigma_i)$, $\beta(\sigma_i)$ — соответственно нижняя и верхняя плотности той подпоследовательности из $\{\lambda_n\}$, для которой $\arg \lambda_n \in \sigma_i$.

Московский институт химического
машиностроения

Поступило 20.VI.1967

Գ. Լ. ԼՈՒՆՑ

ԿԱՆՈՆԱԿԱՆ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ԱՃԻ ԳՆԱՀԱՏԱԿԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n}{|\lambda_n|} < \infty$ *պայմանի առկայության դեպքում գնահատվում է*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

ամբողջ ֆունկցիայի ինդիկատոր ֆունկցիան և ստորին ինդիկատոր ֆունկցիան։

Տրվում է բավարար պայման $\{\lambda_n\}$ *բազմությունը պարունակող անկյուններից դուրս ստորին ինդիկատոր ֆունկցիայի ներքևից սահմանափակության համար։*

Այդ պայմանի դեպքում ստորին ինդիկատոր ֆունկցիայի համար տեղի ունի էֆեկտիվ գնահատական։

G. L LUNTS

ON ESTIMATIONS OF THE GROWTH OF A CANONICAL PRODUCT

Summary

The indicator function and the lower indicator function of an entire function

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$$

are estimated for the case $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n}{|\lambda_n|} < \infty$.

A sufficient condition is mentioned which assures the uniforme boundedness from below of the lower indicator function out of the angles containing the set $\{\lambda_n\}$. Under this condition effective estimation of lower indicator function is carried out.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Гольдберг.* Интеграл по полуаддитивной мере и его приложение к теории целых функций, (4 статьи): Матем. сб., 58 (100), 1962, 289—334; 61 (103), 1963, 334—349; 65 (107), 1964, 414—453; 66 (108), 1965, 411—457.
2. *И. Ф. Красичков.* Оценки снизу для целых функций конечного порядка, Сибирский матем. журнал, 6, № 4, 1965, 840—861.
3. *Г. Л. Луиц.* Оценка роста канонического произведения, Международный конгресс математиков, Москва, 1966, Тезисы кратких научных сообщений, секция 4, стр. 64.