ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 2. 1968 Математика

В. И. ШЕВЦОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫМИ ОБЩИМИ РЯДАМИ

А. Ф. Леонтьев в работе [1] рассмотрел вопрос о представлении целых функций рядами вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n f(\lambda_n z)$, при этом учитывались только порядки целых функций. В настоящей заметке мы рассмотрим вопрос о представлении целых функций такого вида рядами, когда учитываются как порядки, так и типы целых функций.

§ 1. Формулировка основных результатов

Пусть $f(z)=\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$ — целая функция конечного порядка $\rho>0$ и нормального типа σ, причем $a_n \neq 0$ $(n=0, 1, 2, \cdots)$ и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{1.1}$$

Пусть $L(\lambda)=\sum\limits_{0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — целая функция порядка $\rho_1>\rho$ и конечного типа σ_1. Предположим, что выполняется условие: существует последовательность окружностей $|\mu| = r_k \uparrow \infty$ таких, что при любом $\varepsilon>0$

$$|L(re^{i\varphi})|>e^{(\sigma_1^{*}-\varepsilon)\, r^{\rho_1}}, \quad r=r_k,\ k>K(\varepsilon), \tag{2.1}$$

где $0<\sigma_1^{*}\leqslant\sigma_1$. Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ нули $L(\lambda)$, расположенные в порядке неубывания их модулей, а через $p_1, p_2, \cdots, p_n, \cdots$ соответственно их кратности. Возьмем произвольную целую функцию $F(z)=\sum\limits_{0}^{\infty} b_n z^n$ конечного порядка ρ_2 и типа σ_2 такую, что выполняется одно из условий:

(A) $$\frac{1}{\rho_2}>\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1},$$

(B) $$\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho_1},\ (\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Введем интерполирующую функцию

$$\omega_L(\mu, F)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n[D^{n-1}F(0)+\mu D^{n-2}F(0)+\cdots+\mu^{n-1}D^0F(0)], \tag{3.1}$$

где $D^k F(z)=\sum_{n=k}^{\infty} b_n \frac{a_{n-k}}{a_n} z^{n-k}$ — обобщенные производные в смысле Гельфонда-Леонтьева [2]. Покажем, что при условии (A) или (B) функция $\omega_L(\mu, F)$ является целой.

Используя условие (1.1), находим

$$|D^k F(0)|=\left|a_0\frac{b_k}{a_k}\right|<A(\varepsilon)\frac{[(\sigma_2+\varepsilon)e\rho_2]^{\frac{k}{\rho_2}}}{[(\sigma-\varepsilon)e\rho]^{\frac{k}{\rho}}}k^{\left(-\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho}\right)k}. \tag{4.1}$$

Не нарушая общности, можно считать $\rho_2>\rho$, так что $-\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho}>0$. На основании этого при $|\mu|<R$, $R>1$ в случае (A) получаем, что общий член ряда (3.1) по модулю меньше

$$A(\varepsilon)\left(\frac{a}{n}\right)^{n\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right)}nR^n,$$

где a — некоторая постоянная.

Отсюда следует, что при условии (A) функция $\omega_L(\mu, F)$ — целая. В случае (B) общий член ряда (3.1) по модулю меньше

$$|c_n|R^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\frac{|D^k(F(0)|}{R^k}<A(\varepsilon)|c_n|R^n\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k k^{\frac{k}{\rho_1}}}{R^k}, \tag{5.1}$$

где $\alpha=\frac{[(\sigma_2+\varepsilon)e\rho_2]^{\frac{1}{\rho_2}}}{[(\sigma-\varepsilon)e\rho]^{\frac{1}{\rho}}}$, $|\mu|<R$, $R>1$.

Имеем

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k k^{\frac{k}{\rho_1}}}{R^k}=\sum_{\alpha k^{\frac{1}{\rho_1}}<R}+\sum_{\alpha k^{\frac{1}{\rho_1}}>R}=\sum'+\sum''.$$

Очевидны неравенства

$$\sum'<n+1,\ \sum''<(n+1)\frac{\alpha^n n^{\frac{n}{\rho_1}}}{R^n},$$

в силу которых при больших n

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha^k k^{\frac{k}{\rho_1}}}{R^k}<2(n+1)\frac{\alpha^n n^{\frac{n}{\rho_1}}}{R^n}.$$

Таким образом, общий член ряда (3.1) по модулю, учитывая (5.1), меньше

$$2A(\varepsilon)\,|c_n|\,(n+1)\,\sigma^n n^{\frac{n}{\rho_1}} < A_1(\varepsilon)\left\{\frac{[(\sigma_2+\varepsilon)\,e\rho_2]^{\frac{1}{\rho_2}}\,[(\sigma_1+\varepsilon)\,e\rho_1]^{\frac{1}{\rho_1}}}{[(\sigma-\varepsilon)\,e\rho]^{\frac{1}{\rho}}}\right\}^n (n+1). \quad (5.1')$$

Фигурная скобка, в силу условия (B), для достаточно малого $\varepsilon>0$ меньше единицы, и поэтому ряд с общим членом (6.1) сходится; следовательно $\omega_k(\mu, F)$ является целой функцией. Можно показать, что условия (A) и (B) являются необходимыми в определенном смысле для того, чтобы ряд (3.1) сходился.

Замечание. Пусть последовательность целых функций $\{\varphi_m(z)\}$ $(m=0, 1, 2, \cdots)$ сходится во всей плоскости к функции $L(z)$, причем для любого $\varepsilon>0$

$$|\varphi_m(z)| < e^{(\sigma_1+\varepsilon)\,|z|^{\rho_1}}, \quad |z| > r(\varepsilon),$$

где $r(\varepsilon)$ не зависит от m. Тогда при $m \to \infty$

$$\omega_{\varphi_m}(\mu, F) \to \omega_L(\mu, F).$$

Это утверждение следует из того, что при любом фиксированном n

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\varphi_m^{(n)}(0)}{n!} = \frac{L^{(n)}(0)}{n!}$$

и известное неравенство для тейлоровских коэффициентов

$$\left|\frac{\varphi_m^{(n)}(0)}{n!}\right| < \left[\frac{e\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)}{n}\right]^{\frac{n}{\rho_1}}$$

выполняется при $n > N(\varepsilon)$, где число $N(\varepsilon)$ не зависит от m. Функции $F(z)$ приведем в соответствие ряд

$$F(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} K_n(z),$$

где

$$K_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_n} \frac{\omega_L(\mu, F)}{f(0)\,L(\mu)}\, f(\mu z)\, d\mu.$$

Здесь c_n — замкнутый контур, внутри которого лежит нуль λ_n функции $L(\lambda)$ и нет других нулей этой функции. В случае, когда λ_n — простой нуль, имеем

$$K_n(z) = \frac{\omega_L(\lambda_n, F)}{f(0)\,L'(\lambda_n)}\, f(\lambda_n z).$$

Теорема 1. *Для целой функции* $F(z)$, *порядок и тип которой удовлетворяют условию* (A) *или* (B), *имеет место представление*

$$F(z)=\sum_{m=1}^{\infty} F_m(z),\quad F_1(z)=\sum_{|\lambda_j|<r_1} K_j(z),$$

$$F_m(z)=\sum_{r_{m-1}\leq|\lambda_j|<r_m} K_j(z),$$

причем ряд сходится абсолютно и в любой ограниченной области равномерно. Более того, при любом $\varepsilon>0$ *и любых* k *и* z

$$|F(z)-\sum_{m=1}^{k} F_m(z)|<A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}, \tag{6.1}$$

где

$$\gamma=\alpha^{-\frac{h}{\rho_1-h}}(\rho_1-\rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1^*}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}},\quad 0<\alpha<1,\ \beta=1-\alpha.$$

Укажем достаточные условия, при которых функция $F(z)$ будет представляться рядом $\sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z)$.

Теорема 2. *Допустим, что функция* $L(\lambda)$ *дополнительно удовлетворяет следующим условиям:*

1) *все нули* $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \cdots$ *функции* $L(\lambda)$ — *простые, число нулей* $L(\lambda)$ *в кольце* $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$ *не превосходит некоторого фиксированного числа* p, *одного и того же для всех* $k=2, 3, \cdots$;

2) *существуют такие постоянные* A *и* h, $h<\rho_1$, *что для любых* λ_m *и* λ_n $(m\neq n)$ *из кольца* $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$

$$|\lambda_m-\lambda_n|>Ae^{-r_k^h};$$

3) $\dfrac{r_k}{r_{k-1}}<q\ (k=2, 3, \cdots)$, *где* q — *некоторая постоянная.*

Тогда

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty} A_k f(\lambda_k z),\quad A_k=\frac{\omega_L(\lambda_k, F)}{f(0)\, L'(\lambda_k)},$$

причем ряд сходится абсолютно, а в любой ограниченной области — равномерно.

В дальнейшем (см. § 6) мы покажем, что оценка (6.1) в теореме (1) является в некотором смысле точной.

И. И. Репин в работах [3], [4] рассмотрел оператор

$$M_L(F)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z).$$

Оператор $M_L(F)$ применим ко всякой целой функции $F(z)$, порядок и тип которой удовлетворяют условию (А) или (В). При условии (А) (см. [3], стр. 12) показывается, что, если характеристическая функция

$L(z)$ не имеет нулей, то единственным решением однородного уравнения

$$M_L(F)=0$$

является функция $F(z)\equiv 0$. При условии (В) аналогичное утверждение не было известно. В § 4 мы показываем, что такое утверждение справедливо также при условии (В) (см. § 4, теорема 3).

Ю. Н. Фролов в работе [8] рассмотрел вопрос о нахождении частного решения неоднородного уравнения

$$M_L(F)=\Phi(z), \tag{7.1}$$

когда порядок ρ_2 правой части в (7.1) удовлетворяет условию (А). Естественно поставить вопрос о нахождении частного решения неоднородного уравнения (7.1) при условии (В). В этом случае (поскольку оператор $M_L(F)$ преобразует функцию $F(z)$ в функцию $\Phi(z)$ вообще большего роста) представляет интерес нахождение частного решения уравнения (7.1), когда функция $\Phi(z)$ из класса $[\rho_2, \infty)$, т. е. когда $\Phi(z)$ принадлежит к классу функций, к которым вообще не применим оператор $M_L(F)$.

Мы показываем (см. § 4), что при некотором виде характеристической функции можно всегда указать нужное частное решение уравнения (7.1). Отметим, что метод нахождения частного решения уравнения (7.1) при этом существенно опирается на теорему 2 и является отличным от метода нахождения частного решения в работе [8].

§ 2. Некоторые вспомогательные утверждения и оценки

Рассмотрим функцию

$$L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^m}{s_n^m}\right), \tag{1.2}$$

где $0<s_1<s_2<\cdots<s_n<\cdots$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{s_n^{\rho_1}}=\tau,\quad 0<\tau<\infty, \tag{2.2}$$

при некотором $d>0$

$$s_{n+1}-s_n>d s_n^{1-\rho_1}, \tag{3.2}$$

m — целое, $m>\rho_1$.

Лемма. *Пусть функция $L(z)$ — целая порядка ρ_1 и типа $\sigma_1=\dfrac{\pi\tau}{\sin\dfrac{\pi\rho_1}{m}}$. Кроме того, она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существует последовательность окружностей $|\mu|=r_k\uparrow\infty$ таких, что для любого $\varepsilon>0$*

$$|L(re^{i\varphi})|>e^{(\sigma_1^{*}-\varepsilon)\,r_k^{\rho_1}},\quad r=r_k,\ k>k(\varepsilon),\quad \sigma_1^{*}=\pi\tau\operatorname{ctg}\frac{\pi\rho_1}{m},$$

2) *для любого* $\varepsilon > 0$

$$|L'(s_n)| < e^{(\sigma_1^* + \varepsilon)\, s_n^{\rho_1}}, \quad n > N(\varepsilon),$$

3) *все нули функции* $L(z)$ — *простые, число нулей* $L(z)$ *в кольце* $r_{k-1} < |z| < r_k$ *не превосходит* m, *для любых нулей* λ_n *и* λ_s $(n \neq s)$ *функции* $L(z)$ *из этого кольца* $|\lambda_s - \lambda_n| > h > 0$,

4) $\dfrac{r_k}{r_{k-1}} \to 1, \; k \to \infty.$

Доказательство. Показывается (см. [6], стр. 160), что для функции $L(z)$ существует предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln |L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}} = \frac{\pi\sigma}{\sin \frac{\pi\rho_1}{m}} \cos\left(\frac{\pi\rho_1}{m} - \rho_1\varphi\right), \; 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

Таким образом, $L(z)$ — целая, порядка ρ_1 и типа $\sigma_1 = \dfrac{\pi\sigma}{\sin \frac{\pi\rho_1}{m}}$. Ее индикатриса роста $h(\varphi)$ равна

$$h(\varphi) = \frac{\pi\sigma}{\sin \frac{\pi\rho_1}{m}} \cos\left(\frac{\pi\rho_1}{m} - \rho_1\varphi\right), \quad 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

В силу непрерывности индикатрисы имеем

$$h(0) = \pi\sigma \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho_1}{m}.$$

Так как выполнены условия (1.2) и (2.2), то выполняется (см. [7], стр. 255) следующее асимптотическое равенство:

$$\ln |L'(s_n)| \approx h(0)\, s_n^{\rho_1}.$$

Из него непосредственно следует, что выполняется свойство 2).

Из вида функции $L(z)$ имеем

$$|L(z)| > |L(|z|)|. \tag{4.2}$$

Обозначим через $\{\mu_s\}$ множество нулей функции $L(z)$. В силу условий (1) и (2) вне кружков $|z - \mu_s| < d' |\mu_s|^{1-\rho_1}$ выполняется (см. [7], стр. 129) асимптотическое равенство

$$\ln |L(re^{i\varphi})| \approx h(\varphi)\, r^{\rho_1}. \tag{5.2}$$

При $d' < \frac{1}{2} d$ на положительной оси между s_n и s_{n-1} возьмем точку $r_n = \dfrac{s_n + s_{n-1}}{2}$. Согласно (4.2) и (5.2)

$$\ln |L(r_n e^{i\varphi})| > [h(0) - \varepsilon]\, r_n^{\rho_1}, \; n > N(\varepsilon).$$

Свойство 1) установлено. Свойства 3), 4) очевидны. Лемма доказана.

Перейдем теперь к некоторым оценкам. Положим

$$\Phi_k(z, \lambda) = L(\lambda)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=r_k}\frac{f(z\mu)\,d\mu}{(\mu-\lambda)\,L(\mu)}, \quad |\lambda| < r_k.$$

Нетрудно убедиться, что эта функция, как функция переменного λ, является целой. Оценим ее модуль. Для $|\lambda| \leqslant r_k - 1$ имеем

$$|\Phi_k(z, \lambda)| \leqslant J_k\,|L(\lambda)|, \quad J_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\mu|=r_k}\left|\frac{f(z\mu)}{L(\mu)}\right||d\mu|.$$

Для λ, лежащих вне окружности $|\mu| = r_k$, справедливо представление

$$\Phi_k(z, \lambda) = L(\lambda)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\mu|=r_k}\frac{f(z\mu)}{(\mu-\lambda)\,L(\mu)}\,d\mu + f(\lambda z).$$

Поэтому для $|\lambda| \geqslant r_k + 1$

$$|\Phi_k(z, \lambda)| \leqslant J_k \cdot |L(\lambda)| + |f(\lambda z)|. \tag{6.2}$$

Так как $f(z)$ — целая функция порядка ρ и типа σ, а

$$\left|\frac{1}{L(\mu)}\right| < A(\varepsilon)\,e^{-(\sigma_1^*-\varepsilon)\,r_k^{\rho_1}}, \quad |\mu| = r_k,$$

то для J_k получаем следующую оценку:

$$J_k < A_1(\varepsilon)\,e^{(\sigma+\varepsilon)(|z|\,r_k)^\rho - (\sigma_1^*-\varepsilon)\,r_k^{\rho_1}} =$$

$$= A_1(\varepsilon)\,e^{(\sigma+\varepsilon)(|z|\,r_k)^\rho - (\alpha\sigma_1^*-\varepsilon)\,r_k^{\rho_1}} \cdot e^{-\beta\sigma_1^*\,r_k^{\rho_1}}, \quad 0 < \alpha < 1, \ \beta = 1 - \alpha.$$

Отметим, что

$$\max_{x>0}\left[(|z|\,x)^\rho(\sigma+\varepsilon) - (\alpha\sigma_1^*-\varepsilon)\,x^{\rho_1}\right] =$$

$$= \left|\ \alpha^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}(\rho_1-\rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1^*}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}} + \varepsilon_1\ \right|\ |z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} = (\gamma+\varepsilon_1)\,|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}},$$

где ε_1 мало вместе с ε.

Таким образом

$$J_k < A_1(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon_1)\,|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^*\,r_k^{\rho_1}}.$$

Следовательно для модуля $\Phi_k(z, \lambda)$ при $|\lambda| \leqslant r_k - 1$ справедлива следующая оценка:

$$|\Phi_k(z, \lambda)| < A(\varepsilon)\,e^{(\sigma_1+\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_1^*\,r_k^{\rho_1}}.$$

Здесь $A(\varepsilon)$ — некоторая постоянная. Ради простоты и впредь различные постоянные, зависящие от ε, будем обозначать через $A(\varepsilon)$. Имея в виду соотношение (6.2), оценим теперь $|f(\lambda z)|$ при $|\lambda| \geqslant r_k + 1$. Имеем

$$|f(\lambda z)| < A(\varepsilon)\,e^{(\sigma+\varepsilon)(|\lambda|\,|z|)^\rho - (\sigma_1^*-\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\sigma_1^*-\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}} <$$

$$< A(\varepsilon)\,e^{\sigma_1|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\sigma+\varepsilon)(|\lambda|\,|z|)^\rho - (\alpha\sigma_1^*-\varepsilon)\,|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{-\beta\sigma_1^*\,|\lambda|^{\rho_1}}.$$

Отсюда, следуя предыдущим рассуждениям и учитывая, что $|\lambda|>r_k+1$, находим

$$|f(\lambda z)|<A(\varepsilon)\,e^{\sigma_1|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}.$$

Имея это в виду, на основании (6.2), получаем, что при $|\lambda|>r_k+1$ справедливо неравенство

$$|\Phi_k(z,\lambda)|<A(\varepsilon)\,e^{(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}.$$

В силу принципа максимума модуля аналогичная оценка будет иметь место и в кольце $r_k-1<|\lambda|<r_k+1$. Следовательно можно утверждать, что при любом $\varepsilon>0$ и любых k, z и λ справедливо неравенство

$$|\Phi_k(z,\lambda)|<A(\varepsilon)\,e^{(\sigma_1+\varepsilon)|\lambda|^{\rho_1}}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}. \tag{7.2}$$

Разложим функцию $\Phi_k(z,\lambda)$ в ряд по степеням λ

$$\Phi_k(z,\lambda)=\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,\lambda^m.$$

Для $|A_m^k(z)|$ имеем оценку

$$|A_m^k(z)|\leqslant\frac{\max\limits_{|\lambda|=r}|\Phi_k(z,\lambda)|}{r^m}<A(\varepsilon)\frac{e^{(\sigma_1+\varepsilon)r^{\rho_1}}}{r^m}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}},$$

где $\varepsilon>0$ — любое. Подставляя $r=\left|\dfrac{m}{\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)}\right|^{\frac{1}{\rho_1}}$, получаем

$$|A_m^k(z)|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}\,[\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)]^{\frac{m}{\rho_1}}\left(\frac{e}{m}\right)^{\frac{m}{\rho_1}}. \tag{8.2}$$

В дальнейшем нам придется иметь дело с рядом $\sum\limits_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,D^m F(0)$, покажем, что он сходится. Используя оценки (8.2) и (4.1) для $|D^m F(0)|$, получим

$$|A_m^k(z)D^mF(0)|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}\,\frac{[\rho_2(\sigma_2+\varepsilon)]^{\frac{m}{\rho_2}}\,[\rho_1(\sigma_1+\varepsilon)]^{\frac{m}{\rho_1}}}{[\rho(\sigma-\varepsilon)]^{\frac{m}{\rho}}}\times$$

$$\times\left(\frac{e}{m}\right)^{m\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right)}.$$

Отсюда и заключаем, что при условии (A) и (B) рассматриваемый ряд сходится и, кроме того

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,D^mF(0)\right|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_k^{\rho_1}}. \tag{9.2}$$

§ 3. Доказательство теорем 1 и 2

Установим сначала следующее соотношение:

$$F(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u|=r_k}\frac{\omega_L(u,F)}{f(0)\,L(u)}=\frac{1}{f(0)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,D^m F(0) \tag{1.3}$$

(ряд в правой части сходится, это было показано в предыдущем параграфе).

Оно легко проверяется для функции $F(z)=f(\lambda z)$ и конечных линейных комбинаций таких функций. При $\rho_2<\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ оно получено в работе [1]. Для доказательства соотношения (1.3) в случае, когда $\rho_2=\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ и $(\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть* $f(z)=\sum\limits_{0}^{\infty}a_nz^n$ — *целая функция порядка* $\rho>0$, *и типа* σ *с тейлоровскими коэффициентами* $a_n\neq 0$ $(n=0,1,2,\cdots)$, *а* $F(z)$ — *выше рассматриваемая функция. Можно так подобрать последовательность* $\{\mu_j\}$ $\left(0<|\mu_1|<|\mu_2|\leqslant\cdots,\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{|\mu_n|^{\rho_1}}=\tau\right)$, *что будет верно представление*

$$F(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p_n}A_{n_j}f(\mu_jz),$$

причем

$$|p_n(z)|=\left|\sum_{j=1}^{p_n}A_{n_j}f(\mu_jz)\right|<e^{(\alpha+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}},\quad |z|>r(\varepsilon),$$

где $r(\varepsilon)$ *не зависит от* n, $\alpha>\sigma_2$ *и*

$$(\alpha\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.3}$$

Доказательство этой леммы проводится совершенно так же, как доказательство соответствующего результата в работе А. Ф. Леонтьева [3]. Поэтому мы его опускаем. Воспользовавшись леммой заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty}D^m p_n(0)=D^m F(0)$$

и $\left(\text{в нашем случае } \rho_2=\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}\right)$ при любом $\varepsilon>0$

$$|D^m p_n(0)|<A(\varepsilon)\,\frac{[(\alpha+\varepsilon)e\rho_2]^{\frac{m}{\rho_2}}\,m^{-\frac{m}{\rho_2}}}{[(\sigma-\varepsilon)e\rho]^{\frac{m}{\rho}}\,m^{-\frac{m}{\rho}}}, \tag{3.3}$$

где $A(\varepsilon)$ не зависит от n и m.

Как уже отмечалось выше имеет место равенство

$$p_n(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|u|=r_2}\frac{\omega_L(u,p_n)}{f(0)\,L(u)}\,f(uz)\,du=\frac{1}{f(0)}\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,D^m\,p_n(0). \qquad (4.3)$$

Мы хотим убедиться, что это равенство в пределе дает соотношение (1.3). Имеем

$$J=\left|\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,[D^m F(0)-D^m p_n(0)]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{m=0}^{N-1}|A_m^k(z)|\,|D^m F(0)-D^m p_n(0)|+\sum_{m=N}^{\infty}|A_m^k(z)|\,|D^m F(0)|+$$

$$+\sum_{m=N}^{\infty}|A_m^k(z)|\,|D^m p_n(0)|=J_1+J_2+J_3.$$

Для слагаемого J_3, используя оценку (3.2) и (3.3), получаем

$$J_3<A(\varepsilon)\sum_{m=N}^{\infty}e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}\left\{\frac{[(\sigma_1+\varepsilon)\rho_1]^{\frac{1}{\rho_1}}\,[(\sigma+\varepsilon)\rho_0]^{\frac{1}{\rho_0}}}{[\rho(\sigma-\varepsilon)]^{\frac{1}{\rho}}}\right\}^m.$$

Фигурная скобка, в силу (2.3), при малом $\varepsilon>0$ меньше единицы. Следовательно можно выбрать N столь большим, чтобы в фиксированном круге $|z|<R$ было $J_3<\frac{\delta}{3}$. Можно считать, в силу аналогичных рассуждений, что и $J_2<\frac{\delta}{3}$ при том же N. Фиксируем это N. Тогда J_1 будет меньше $\frac{\delta}{3}$ при $n>n_0$, на основании того, что при любом m $\lim\limits_{n\to\infty}D^m p_n(0)=D^m F(0)$. Таким образом $J<\delta$, $n>n_0$, а, значит, правая часть (4.3) действительно стремится, при $n\uparrow\infty$, к правой части (1.3). Аналогичным образом убеждаемся, что при $|u|\leqslant R$ равномерно

$$\lim_{n\to\infty}\omega_L(u,p_n)=\omega_L(u,F).$$

Значит левая часть (4.3) стремится к левой части (5.2). Тем самым соотношение (1.3) установлено. Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1. В силу основного соотношения (1.3), используя оценку (9.2), находим

$$\left|F(z)-\sum_{m=1}^{k}F_m(z)\right|=\left|\sum_{m=0}^{\infty}A_m^k(z)\,D^m F(0)\right|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-3r_1^{k}\,r_2^{k}}.$$

Отсюда следует равномерная сходимость ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty}F_m(z)$ внутри плоскости, а также его абсолютная сходимость. Действительно, имеем

$$F_k(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\left[A_m^{k-1}(z)-A_m^k(z)\right]D^m F(0)$$

и, значит

$$|F_k(z)|<A(\varepsilon)\,e^{-\beta\sigma_1^* r_{k-1}^{\rho_1}}\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}.$$

Мы считаем, что в каждом кольце $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$ лежит хотя бы один нуль $L(z)$. Поэтому ряд сходится абсолютно. Все утверждения теоремы 1 доказаны. Докажем теорему 2.

Пусть в кольце $r_{k-1}<|\lambda|<r_k$ расположены точки $\lambda_{n_{k-1}+1},\dots,\lambda_{n_k}$.

Имеем

$$F_k(z)=\sum_{j=r}^{s}A_j f(\lambda_j z),\quad A_j=\frac{\omega(\lambda_j,F)}{f(0)\,L'(\lambda_j)}\quad (r=n_{k-1}+1,\ s=n_k;\ s-r+1\leqslant p).$$

Рассмотрим систему равенств

$$\sum_{j=r}^{s}A_j f(\lambda_j z)=F_k(z),$$

$$\sum_{j=r}^{s}A_j\lambda_j f(\lambda_j z)=DF_k(z),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\sum_{j=r}^{s}A_j\lambda_j^{s-r} f(\lambda_j z)=D^{(s-r)}F_k(z).$$

Из этой системы находим, что $A_j f(\lambda_j z)=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_r & \lambda_{r+1} & \cdots & \lambda_s\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \lambda_r^{s-r} & \lambda_{r+1}^{s-r} & \cdots & \lambda_s^{s-r}\end{vmatrix},\quad \Delta_j=\begin{vmatrix}1 & \cdots & F_k(z) & \cdots & 1\\ \lambda_r & \cdots & DF_k(z) & \cdots & \lambda_s\\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot\\ \lambda_r^{s-r} & \cdots & D^{s-r}F_k(z) & \cdots & \lambda_s^{s-r}\end{vmatrix}.$$

Определитель Δ представляет собой произведение разностей $(\lambda_m-\lambda_n)$ $(m\neq n)$, и в силу того, что $|\lambda_m-\lambda_n|>A\,e^{-r_k^h}$, $h<\rho_1$, имеет следующую оценку снизу:

$$|\Delta|>B\,e^{-\alpha r_k^h},\quad \alpha>0.$$

Согласно теореме 1

$$|F_k(z)|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_{k-1}^{\rho_1}}.$$

Отсюда получаем, что и

$$|D^m F_k(z)|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}-\beta\sigma_1^* r_{k-1}^{\rho_1}},\quad 0\leqslant m\leqslant p,$$

ибо p — фиксированное число. Следовательно

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{p\rho_1}{\rho_1-p}} - \beta\sigma_1^* r_{k-1}^{\rho_1} + \varepsilon r_k^{\rho_1}}.$$

Используя условие $\frac{r_k}{r_{k-1}} < q$, далее находим

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A\, e^{-\nu r_k^{\rho_1} + (\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{p\rho_1}{\rho_1-p}}}, \quad \nu = q^{-\rho_1}(\beta\sigma_1^* - \varepsilon). \tag{5.3}$$

Так как мы считаем, что в каждом кольце $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ лежит по крайней мере один нуль функции $L(z)$, то отсюда и следуют все утверждения теоремы 2. Отметим также, что если $\frac{r_k}{r_{k-1}} \to 1$ при $k \to \infty$, то мы получим более точное неравенство

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A(\varepsilon)\, e^{-(\beta\sigma_1^* - \varepsilon) r_k^{\rho_1} + (\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{p\rho_1}{\rho_1-p}}}, \tag{6.3}$$

из которого, полагая $z = 0$, находим

$$|A_j| < A(\varepsilon)\, e^{-(\beta\sigma_1^* - \varepsilon)|\lambda_j|^{\rho_1}}, \quad 0 < \beta < 1. \tag{7.3}$$

Эта оценка будет нами использована в дальнейшем при рассмотрении точности оценки (1.6) в теореме 1, а также в приложениях.

§ 4. Об одном операторе

Пусть, как и выше, $f(z)$ — целая функция порядка $\rho > 0$ и нормального типа σ с тейлоровскими коэффициентами $a_n \neq 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{|a_n|} = (\sigma e\rho)^{\frac{1}{\rho}}$, $L(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ — целая функция конечного порядка ρ_1 $(\rho_1 > \rho)$ и конечного типа σ_1, $F(z)$ — целая функция конечного порядка ρ_2 и конечного типа σ_2. Рассмотрим оператор

$$M_L(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z).$$

Его можно представить (см. [4], [5]) также в виде

$$M_L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(z)}{a_n} \frac{F^{(n)}(0)}{n!},$$

где $B_n(z)$ — коэффициенты следующего разложения:

$$L(\eta) f(z\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(z)\, \eta^n.$$

Оператор $M_L(F)$ применим ко всякой целой функции $F(z)$ порядок и тип которой удовлетворяют одному из условий

$$\text{(A)} \qquad \rho_2 < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho},$$

$$\text{(B)} \qquad \rho_2 = \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}, \quad (\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Оператор $M_L(F)$ обладает (см. [4], [5]) следующими свойствами:

1. $$M_L(F_1 + F_2) = M_L(F_1) + M_L(F_2),$$
$$M_L(cF) = cM_L(F), \ c = \text{const};$$

2. При любом z и произвольном значении параметра η
$$M_L[f(\eta z)] = L(\eta) f(\eta z);$$

3. Пусть последовательность целых функций $\{F_m(z)\}$ сходится во всей плоскости к функции $F(z)$, причем $|F_m(z)| < A(\varepsilon) e^{(\sigma_2+\varepsilon)|z|^{\rho_2}}$, где $A(\varepsilon)$ не зависит от n и ρ_2, σ_2 удовлетворяют условию A или B. Тогда во всей плоскости $\lim\limits_{m\to\infty} M_L(F_m) = M_L(F)$, причем сходимость равномерная в любой ограниченной области.

Рассмотрим сначала вопрос о решении однородного уравнения

$$M_L(F) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F(z) = 0 \tag{1.4}$$

в зависимости от вида характеристической функции $L(z)$. Изучим этот вопрос в двух случаях:

1) характеристическая функция $L(z)$ не имеет нулей;

2) $L(z)$ имеет конечное число нулей.

Теорема 3. *Если характеристическая функция не имеет нулей, то $F(z) \equiv 0$ является единственным решением уравнения (1.4) (в рассматриваемом классе целых функций).*

Доказательство. Так как $L(z)$ — целая функция конечного порядка, не имеющая нулей, то она имеет вид $L(z) = e^{p(z)} = \sum_0^{\infty} e_n z^n$, где $p(z)$ — многочлен. Пусть функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению $M_L(F) = 0$. Покажем, что тогда она удовлетворяет уравнению $M_{L^{(s)}}(F) = 0$, где $L^{(s)}(z)$ — s-я производная характеристической функции $L(z)$. Ясно, что $L^{(s)}(z) = Q(z) e^{p(z)}$, где $Q(z)$ — многочлен некоторой степени m, так что

$$L^{(s)}(z) = (b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0) e^{p(z)}. \tag{2.4}$$

Отметим, что

$$M_{z^p L}(F) = \sum_{k=p}^{\infty} c_{k-p} D^k F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{n+p} F(z).$$

Так как $M_L(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z) = 0$, то

$$M_{z^p L}(F)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^{n+p} F(z) = D^p \left\{\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F(z)\right\} = 0.$$

Но тогда, в силу (2.4), имеем $M_{L(s)}(F)=0$, откуда

$$M_{L(s)}(D^m F)_{z=0}=0 \quad (s=0, 1, 2, \cdots, \; m=0, 1, 2, \cdots). \tag{3.4}$$

Предположим противное, что $F(z) \not\equiv 0$. Тогда найдется такое e, что $F^{(e)}(0) \neq 0$. Введем вспомогательную функцию

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^{k+e} F(0) z^k.$$

Покажем, что при условии (A) и (B) функция $\psi(z)$ регулярна в круге радиуса, большего 1. Действительно

$$|c_k D^{k+e} F(0)| < \left(\frac{e}{k}\right)^{k\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_1}\right)} \left\{\frac{[(\sigma_1+\varepsilon)\rho_1]^{\frac{1}{\rho_1}} [(\sigma_2+\varepsilon)\rho_2]^{\frac{1}{\rho_2}}}{[(\sigma-\varepsilon)\rho]^{\frac{1}{\rho}}}\right\}^k, \; k > K(\varepsilon).$$

Из этого неравенства находим

1) при условии (A) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k D^{k+e} F(0)|} = 0$, в силу чего $\psi(z)$— целая функция,

2) при условии (B) $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k D^{k+e} F(0)|} < \dfrac{(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} (\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}}{(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}}$, в силу чего функция $\psi(z)$ регулярна в круге радиуса $R>1$.

Используя (3.4), находим последовательно

$$\psi(1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^{k+e} F(0) = M_L(D^e F)_0 = 0, \; \psi'(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k D^{k+e} F(0) =$$
$$= M_{L'}(D^{e+1} F)_0 = 0, \cdots, \; \psi^{(m)}(1) = M_{L^{(m)}}(D^{e+m} F)_0 = 0, \cdots.$$

Отсюда $\psi(z) \equiv 0$, в частности, $\psi(0) = c_0 D^e F(0) = 0$. Так как в силу предположения $F^{(e)}(0) \neq 0$, то $c_0 = L(0) = 0$. Но $L(0) \neq 0$ и, значит, мы приходим к противоречию. Таким образом $F(z) \equiv 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда характеристическая функция имеет конечное число нулей. Нам понадобится следующая лемма (см. [7], стр. 23—24).

Лемма. *Если $L(\gamma)$—многочлен с простыми нулями $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, то общее решение уравнения $M_L(F)=0$ в классе целых функций имеет вид*

$$F(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j f(\lambda_j z),$$

где c_j — произвольные постоянные.

Используя доказанную выше теорему и сформулированную лемму, легко установить следующее предложение:

Теорема 4. *Если характеристическая функция имеет конечное число простых нулей $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, то целые функции (из рассматриваемого класса), удовлетворяющие уравнению $M_L(F)=0$, имеют вид*

$$F(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j f(\lambda_j z),$$

где c_j — произвольные постоянные.

Эти результаты не опирались на теоремы предыдущих параграфов. Последующие результаты уже существенно будут опираться на эти теоремы.

Рассмотрим вопрос о нахождении частного решения неоднородного уравнения

$$M_L(F)=\Phi(z). \tag{4.4}$$

Пусть характеристическая функция $L(z)$ имеет вид

$$L(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^m}{\lambda_n^m}\right), \tag{5.4}$$

где $\lambda_n>0$, причем существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n^{\rho_1}}=\tau\neq 0, \infty$, m — целое, $m>2\rho_1$ $(\rho_1>\rho)$. Функция $L(z)$ — целая порядка ρ_1 и типа $\sigma_1=\dfrac{\pi\tau}{\sin\frac{\pi\rho_1}{m}}$.

Для $L(z)$ существует предел (см. [6], стр. 160)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}}=\frac{\pi\tau}{\sin\frac{\pi\rho_1}{m}}\cos\left(\frac{\pi\rho_1}{m}-\rho_1\varphi\right),\ 0<\varphi<\frac{2\pi}{m}. \tag{6.4}$$

Поставим задачу: найти частное решение уравнения (4.4) в том случае, когда $\Phi(z)$ — целая функция из класса $[\rho_2, \infty)$, причем $\rho_2=\dfrac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$, т. е. функция $\Phi(z)$ принадлежит к классу функций, к которым вообще не применим оператор $M_L(F)$. Рассмотрим функцию

$$L_1(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{z^m}{s_n^m}\right),$$

где последовательность точек s_n $(0<s_1<s_2<\cdots<s_n\cdots)$ имеет плотность с показателем ρ_1, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{s_n^{\rho_1}}=\tau_1$, $0<\tau_1<\infty$

и при некотором $d>0$ $s_{n+1}-s_n>ds_n^{1-\rho_1}$, m — целое, $m>2\rho_1$.

$L_1(z)$ — целая функция порядка ρ_1 и типа $\tilde{\sigma}_1=\dfrac{\pi\tau_1}{\sin\frac{\pi\rho_1}{m}}$. Пусть $\Phi(z)$ принадлежит классу $[\rho_2, \bar{\sigma}_2]$, подберем последовательность s_n так, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$(\bar{\sigma}_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\tilde{\sigma}_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Функция $L_1(z)$ (см. лемму § 2) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Поэтому функцию $\Phi(z)$, согласно этой теореме, можно представить в виде

$$\Phi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j f(\mu_j z), \quad A_j = \frac{\omega_{L_1}(\mu_j, F)}{f(0) L_1(\mu_j)},$$

где μ_j — нули функции $L_1(z)$. Ряд сходится абсолютно, а внутри плоскости равномерно. Кроме того (см. оценку (7.3))

$$|A_j| < A(\varepsilon)\, e^{-(\beta \bar{\sigma}_1^* - \varepsilon)|\mu_j|^{\rho_1}}, \quad \bar{\sigma}_1^* = \pi\tau_1 \operatorname{ctg} \frac{\pi\rho_1}{m}$$

для всех j, где $0<\beta<1$.

Покажем, что функция

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{A_j}{L(\mu_j)} f(\mu_j z)$$

является решением неоднородного уравнения (4.4).

Для этого убедимся сначала, что порядок и тип последовательности

$$F_m(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{L(\mu_j)} f(\mu_j z) \quad (m = 1, 2, \cdots)$$

удовлетворяет условию (B). В силу выбора функции $L_1(z)$ и (6.4) легко получаем, что при больших j

$$\ln |L(\mu_j)| > (\sigma_1 - \varepsilon)\, |\mu_j|^{\rho_1}.$$

Используя это, находим с помощью стандартных рассуждений, что

$$|F_m(z)| < \sum_{j=1}^{m} \left|\frac{A_j}{L(\mu_j)}\right| |f(\mu_j z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\sigma_2+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}},$$

где

$$\sigma_2 = (\rho_1 - \rho) \frac{\rho^{\frac{1}{\rho_1-\rho}}}{\rho_1^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}} \cdot \frac{\sigma^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}}{(\beta\sigma_1^* + \sigma_1)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}}.$$

Легко подсчитываем, что

$$(\sigma_2 \rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1 \rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} = (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}} \left(\frac{\sigma_1}{\beta\sigma_1^* + \sigma_1}\right)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}.$$

Следовательно порядок и тип последовательности $\{F_m(z)\}$ удовлетворяют условию (B). При этом мы говорим, что последовательность $\{\Phi_m(z)\}$ имеет порядок $\bar{\rho}$ и тип τ, если при любом $\varepsilon > 0$

$$|\Phi_m(z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\tau+\varepsilon)|z|^{\bar{\rho}}},$$

где $A(\varepsilon)$ не зависит от m, и нет меньших $\tilde{\rho}$ и $\tilde{\sigma}$ с таким свойством. В силу свойства (1) и (2) оператора $M_L(F)$ имеем

$$M_L(F_m) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{L(\mu_j)} M_L[f(\mu_j z)] = \sum_{j=1}^{m} A_j f(\mu_j z).$$

Так как порядок и тип последовательности $\{F_m\}$ удовлетворяет условию (В), то в силу свойства 3 оператора возможен предельный переход в этом равенстве. В пределе получим

$$\lim_{m\to\infty} M_L(F_m) = M_L(F) = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_j f(\lambda_j z) = \Phi(z).$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 5. *Пусть характеристическая функция уравнения* (4.4) *имеет вид* (5.4). *Если правая часть принадлежит классу* $[\rho_2, \infty)$, *то уравнение* (4.4) *всегда имеет решение, принадлежащее классу* $[\rho_2, \sigma_2]$, *где* ρ_2 *и* σ_2 *удовлетворяют условию* (*B*).

§ 5. Об асимптотической оценке интерполирующей функции

Рассмотрим интерполирующую функцию $\omega_L(\mu, F)$, введенную в § 1

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k [D^{k-1} F(0) + \mu D^{k-2} F(0) + \cdots + \mu^{k-1} D^0 F(0)].$$

Введем следующую вспомогательную функцию

$$L_1(\mu) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\mu^m}{s_n^m}\right), \quad s_n = \lambda_n \left(\frac{\pi}{\sin \frac{\pi q}{m}}\right)^{\frac{1}{q}},$$

где $\{\lambda_n\}$ $(0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n < \cdots)$ имеет плотность с показателем q, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^q} = \tau$, $0 < \tau < \infty$, и при некотором $d > 0$ $\lambda_{n+1} - \lambda_n > d\lambda_n^{1-q}$, $q > \rho$, m — целое, $m > 2q$. Функция $L_1(\mu)$ (см. лемму § 2) — целая порядка q и типа τ. Если выполнено условие (А), то подберем число $q > \rho_1$ таким образом, чтобы

$$\rho_2 < \frac{\rho q}{q - \rho} < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}. \tag{1.5}$$

При условии (В) положим $q = \rho_1$ и подберем $\tau > \sigma_1$ таким образом, чтобы

$$(\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma_2\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}} (\tau\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}} < (\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.5}$$

Функцию $F(z)$ разложим в ряд, согласно теореме 2

$$F(z)=\sum_{i=1}^{\infty} b_i f(\mu_i, z),\quad b_i=\frac{\omega_{L_1}(\mu_i, F)}{f(0)\,L_1'(\mu_i)},$$

где μ_i — нули функции $L_1(\mu)$.

Такое представление функции $F(z)$ возможно в силу неравенств (1.5) и (2.5), а функция $L_1(z)$ (см. лемму § 2) удовлетворяет всем условиям теоремы 2. Кроме того (см. оценку (7.3)) имеем

$$|b_i|<A(\varepsilon)\, e^{(\beta\sigma_1^{*}-\varepsilon)|\mu_i|^{q}},\quad 0<\beta<1,\ \sigma_1^{*}=\sigma\cos\frac{\pi q}{m}. \tag{3.5}$$

Если имеет место условие (B), то возьмем в оценке (3.5) $\frac{\sigma_1}{\sigma}<\beta<1$, и подберем m таким образом, чтобы выполнялось следующее неравенство:

$$\beta\sigma\cos\frac{\pi q}{m}=\beta\sigma_1^{*}>\sigma_1. \tag{4.5}$$

Рассмотрим последовательность

$$F_k(z)=\sum_{i=1}^{k} b_i f(\mu_i, z), \tag{5.5}$$

имеем $F_k(z)\to F(z)$ и, кроме того, в силу (3.5)

$$|F_k(z)|<A(\varepsilon)\, e^{(b+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho q}{q-\rho}}},$$

причем $A(\varepsilon)$ не зависит от k, а

$$b=\left(\frac{\sigma}{q}\right)^{\frac{q}{q-\rho}}\left(\frac{\rho}{\beta\sigma_1^{*}}\right)^{\frac{\rho}{q-\rho}}(q-\rho).$$

Если имеет место условие (A), то $\frac{\rho q}{q-\rho}<\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$, в силу (1.5). Если имеет место условие (B), то $q=\rho_1$, $\rho_2=\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ и

$$(b\rho_2)^{\frac{1}{\rho_2}}(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}=(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}\left(\frac{\sigma_1}{\beta\sigma_1^{*}}\right)^{\frac{1}{\rho_1}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}},$$

в силу (4.5).

Таким образом, мы показали, что порядок и тип последовательности (5.5) удовлетворяет условию (A) или (B). Легко подсчитываем, что

$$\omega_L(\mu, F_k)=\sum_{i=1}^{k} b_i\,\frac{L(\mu)-L(\mu_i)}{\mu-\mu_i}.$$

Так как порядок и тип последовательности $F_k(z)$ удовлетворяет условию (A) или (B), то (см. доказательство теоремы 1) $\lim\limits_{k\to\infty}\omega_L(\mu, F_k)=\omega_L(\mu, F)$.

Следовательно

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \frac{L(\mu) - L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Введем следующие обозначения:

$$A(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s}{\mu - \mu_s}, \quad B(\mu) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}. \tag{6.5}$$

Функции $A(\mu)$ и $B(\mu)$ являются мероморфными функциями, в силу (3.5) и (4.5). Таким образом, получаем

$$\omega_L(\mu, F) = L(\mu) A(\mu) - B(\mu), \tag{7.5}$$

где $A(\mu)$ и $B(\mu)$ имеют вид (6.5). Заметим, что такое представление функции $\omega_L(\mu, F)$ не является единственным. Остановимся на асимптотической оценке функции $B(\mu)$. Отметим следующее легко проверяемое тождество

$$\frac{1}{\mu - \mu_s} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mu_s^k}{\mu^{k+1}} + \left(\frac{\mu_s}{\mu}\right)^{n+1} \frac{1}{\mu - \mu_s}.$$

Согласно этому тождеству

$$B(\mu) = \sum_{k=0}^{n} \frac{B_k}{\mu^{k+1}} + B_n(\mu),$$

где

$$B_k = \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^k L(\mu_s), \quad B_n(\mu) = \frac{1}{\mu^{n+1}} \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^{n+1} \frac{L(\mu_s)}{\mu - \mu_s}.$$

Напомним, что у функции $L_1(\mu)$ нули расположены на конечном числе лучей. Пусть μ принадлежит некоторому углу E_0 с вершиной в начале, в котором нет нулей $L_1(\mu)$, включая стороны. Ясно, что тогда

$$|\mu - \mu_s| > \delta |\mu|, \quad \delta > 0, \quad \mu \in E_0.$$

Отсюда находим, что

$$|B_n(\mu)| < \frac{c_n}{|\mu|^{n+2}}, \quad c_n = \frac{1}{\delta} \left| \sum_{s=1}^{\infty} b_s \mu_s^{n+1} L(\mu_s) \right|.$$

Следовательно

$$B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{\mu^{k+1}}.$$

Рассмотрим оператор $M_L(F) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k F(z)$. Имеем

$$M_L(F_k) = M_L \left[\sum_{s=1}^{k} b_s f(\mu_s z) \right] = \sum_{s=1}^{k} b_s L(\mu_s) f(\mu_s z).$$

Так как по доказанному выше порядок и тип последовательности $F_k(z)$ удовлетворяет условию (A) или (B), то в силу свойства оператора $M_L(F)$ (см. § 4), имеем

$$\lim_{k\to\infty} M_L(F_k) = M_L(F) = \sum_{s=1}^{\infty} b_s L(\mu_s) f(\mu_s z),$$

откуда $B_k = \dfrac{D^k [M_L(F)]_{z=0}}{f(0)}$.

Пусть функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(\Phi) = 0$, тогда найдется такое наименьшее число p, что $D^p [M_L(F)]_0 \neq 0$. Следовательно

$$B(\mu) \approx \frac{D^p [M_L(F)]_0}{f(0)\, \mu^{p+1}}, \quad \mu \in E_0. \tag{8.5}$$

Из соотношения (7.5), полагая $\mu = \lambda_n$, λ_n — нуль $L(\mu)$, находим

$$\omega_L(\lambda_n, F) = -B(\lambda_n).$$

Отсюда, согласно (8.5)

$$\omega_L(\lambda_n, F) \approx -\frac{D^p [M_L(F)]_0}{f(0)\, \lambda_n^{p+1}}, \quad \lambda_n \in E_0. \tag{9.5}$$

Изменяя вид функции $L_1(\mu)$ (а именно поворачивая лучи, на которых лежат нули функции $L_1(\mu)$) и повторяя предыдущие рассуждения, мы получим, что (9.5) справедливо для всех λ_n. Таким образом, мы доказали следующее утверждение, которое сформулируем в виде теоремы.

Теорема 6. *Если функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(\Phi) = 0$, то*

$$\omega_L(\lambda_n, F) \approx -\frac{D^p [M_L(F)]_0}{f(0)\, \lambda_n^{p+1}},$$

где λ_n — нули функции $L(z)$, а p — наименьшее целое такое, что $D^p [M_L(F)]_0 \neq 0$.

В случае (А) полученная теорема доказана А. Ф. Леонтьевым [9]. Приводимое здесь доказательство проводилось по той же схеме.

§ 6. О точности оценок, полученных в теореме 1

Напомним, что нами было установлено (см. теорему 1) неравенство

$$\left| F(z) - \sum_{m=1}^{k} F_m(z) \right| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}} - \beta\sigma_k^* r_k^{\rho_1}}, \tag{1.6}$$

где

$$\gamma = \alpha^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}} (\rho_1 - \rho) \left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}} \left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}, \quad 0 < \alpha < 1, \ \beta = 1 - \alpha.$$

$$F_1(z) = \sum_{|\lambda_j| < r_1} k_j(z), \quad F_m(z) = \sum_{r_{m-1} \le |\lambda_j| < r_m} k_j(z), \quad k_j(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_j} \frac{\omega_L(\mu, F)}{f(0)\, L(\mu)} f(\mu z)\, d\mu.$$

Остановимся на вопросе о точности оценки (1.6). Рассмотрим вначале случай $\overset{\bullet}{\sigma}_1 < \sigma_1$.

Предположим, что у функции $f(z)$ тейлоровские коэффициенты $a_n > 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. Пусть функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(\Phi) = 0$. Будем предполагать, что функция $L(z)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 и следующему дополнительному условию: существует бесконечная последовательность нулей функции $L(z)$, обозначим их через μ_k $(k = 0, 1, 2, \cdots)$, таких, что выполняется условие: для любого $\varepsilon > 0$

$$|L'(\mu_k)| < e^{(\overset{\bullet}{\sigma}_1 + \varepsilon)|\mu_k|^{\rho_1}}, \quad k > K(\varepsilon). \tag{2.6}$$

Покажем, что в этом случае нельзя получить оценку вида (1.6) с $\gamma_1 = \alpha_1^{\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}} (\rho_1 - \rho) \left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}} \left(\frac{\rho}{\overset{\bullet}{\sigma}_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}}$, $\alpha_1 > 1$. Предположим противное. Тогда, повторяя рассуждения, которые проводились при доказательстве теоремы 2, получим

$$|A_j f(\lambda_j z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma_1 + \varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}}},$$

в частности для $\lambda_{j_k} = \mu_k$ будем иметь

$$|A_{j_k} f(\mu_k z)| < A(\varepsilon)\, e^{(\gamma_1 + \varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}}}, \quad A_{j_k} = \frac{\omega_L(\mu_k, F)}{f(0)\, L'(\mu_k)}. \tag{3.6}$$

В силу асимптотической оценки коэффициентов A_{j_k} (см. § 5), учитывая, что $M_L(F) \neq 0$, имеем

$$|A_{j_k}| > \frac{C}{|\mu_k|^{\rho + 1}\, |L'(\mu_k)|}, \tag{4.6}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. В (3.6) положим

$$z = |\mu_k|^{\frac{\rho_1 - \rho}{\rho}} \left(\frac{\overset{\bullet}{\sigma}_1 \rho_1}{\rho\sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} e^{-i\arg\mu_k} = c_k\, e^{-i\arg\mu_k},$$

тогда

$$|A_{j_k} f(c_k |\mu_k|)| < A(\varepsilon)\, e^{(a + \varepsilon_1)|\mu_k|^{\rho_1}}, \quad \varepsilon_1 > 0, \tag{5.6}$$

где

$$a = \gamma_1 \left(\frac{\overset{\bullet}{\sigma}_1 \rho_1}{\rho\sigma}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}} = \alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}} (\rho_1 - \rho) \left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}} \left(\frac{\rho}{\overset{\bullet}{\sigma}_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}} \left(\frac{\overset{\bullet}{\sigma}_1 \rho_1}{\rho\sigma}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho}} =$$

$$= \alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}} (\rho_1 - \rho) \frac{\overset{\bullet}{\sigma}_1}{\rho}.$$

Так как $a_n > 0$ и существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{1}{\rho}} \sqrt[n]{a_n} = (\sigma e \rho)^{\frac{1}{\rho}}$, то при любом $\varepsilon > 0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n > e^{(\sigma - \varepsilon)x^\rho}, \quad x > X(\varepsilon). \tag{6.6}$$

Тогда, поскольку

$$c_k |\mu_k| = \left(\frac{\sigma_1^* \rho_1}{\rho \sigma}\right)^{\frac{1}{\rho}} |\mu_k|^{\frac{\rho_1}{\rho}}, \quad |\mu_k| \uparrow \infty,$$

из (6.6) следует, что

$$f(c_k |\mu_k|) > e^{(\sigma - \varepsilon)(c_k |\mu_k|)^\rho}, \quad k > K(\varepsilon).$$

Из полученной оценки и (4.6) и (2.6) имеем

$$|A_{j_k} f(c_k |\mu_k|)| > C e^{(\sigma - \varepsilon)(c_k |\mu_k|)^\rho - (\sigma_1^* + \varepsilon) |\mu_k|^{\rho_1}}, \quad k > K_1(\varepsilon).$$

Но

$$(\sigma - \varepsilon)(c_k |\mu_k|)^\rho - (\sigma_1^* + \varepsilon) |\mu_k|^{\rho_1} = \left(\sigma_1^* \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} - \varepsilon_1\right) |\mu_k|^{\rho_1}, \quad \varepsilon_1 > 0.$$

Таким образом, мы получаем

$$|A_{j_k} f(c_k |\mu_k|)| > C e^{\left(\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \sigma_1^* - \varepsilon\right) |\mu_k|^{\rho_1}}, \quad k > K_2(\varepsilon). \tag{7.6}$$

Из (5.6) и (7.6) следует, что $\frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \sigma_1^* \leqslant \alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1 - \rho}} \frac{\rho_1 - \rho}{\rho} \sigma_1^*$, откуда $\alpha_1 \leqslant 1$, и мы приходим к противоречию.

Покажем теперь, что в оценке (1.6) и число β нельзя заменить числом, большим единицы, если $M_L(F) \neq 0$, функция $L(\mu)$ удовлетворяет условию (2.6), всем условиям теоремы 2, причем в теореме 2 пусть $\frac{r_k}{r_{k-1}} \to 1$, $k \uparrow \infty$. Предположим противное. Тогда, следуя в точности рассуждениям, которые проводились при получении оценки (7.3), получим

$$|A_j| < A(\varepsilon) e^{-(\beta_1 \sigma_1^* - \varepsilon) |\lambda_j|^{\rho_1}}, \quad A_j = \frac{\omega_L(\lambda_j, F)}{f(0) L'(\lambda_j)}, \quad \beta_1 > 1,$$

в частности для номеров j_k ($\lambda_{j_k} = \mu_k$) будем иметь

$$|A_{j_k}| < A(\varepsilon) e^{-(\beta_1 \sigma_1^* - \varepsilon) |\mu_k|^{\rho_1}}, \quad A_{j_k} = \frac{\omega_L(\mu_k, F)}{f(0) L'(\mu_k)}. \tag{8.6}$$

В силу асимптотической оценки коэффициентов A_{j_k}, учитывая, что $M_L(F) \neq 0$ и условия (2.6), получим

$$|A_{j_k}| > c e^{-(\sigma_1^* + \varepsilon) |\mu_k|^{\rho_1}}, \quad k > K(\varepsilon).$$

Из последнего неравенства и (8.6) находим $\sigma_1^* \geqslant \beta_1 \sigma_1^*$, т. е. $\beta_1 \leqslant 1$. Мы приходим к противоречию. Легко привести пример функции $L(z)$, обладающей перечисленными выше свойствами. Например, в качестве такой функции можно взять функцию (1.2) (см. лемму § 2).

Рассмотрим теперь случай $\overset{*}{\sigma}_1 = \sigma_1$. Покажем, что в этом случае нельзя получить оценку вида (1.6) с

$$\gamma_1 = \alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}(\rho_1-\rho)\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}, \quad \alpha_1>1,$$

даже без дополнительных условий на $f(z)$. Действительно, пусть, следуя методу от противного,

$$\left|F(z)-\sum_{k=1}^{m}F_k(z)\right|<A(\varepsilon)e^{(\gamma_1+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}},$$

тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{m}F_k(z)\right|<A_1(\varepsilon)e^{(\gamma_1+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}}. \tag{9.6}$$

Отметим, что

$$(\gamma_1\nu)^{\frac{1}{\nu}}(\sigma_1\rho_1)^{\frac{1}{\rho_1}}=\alpha_1^{-\frac{1}{\rho_1}}(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}<(\sigma\rho)^{\frac{1}{\rho}}, \quad \nu=\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}. \tag{10.6}$$

Из вида функций $F_k(z)$ $(k=1, 2, \cdots)$ легко находим, что

$$M_L\left(\sum_{k=1}^{m}F_k(z)\right)=0.$$

В последнем равенстве, так как выполняется (10.6), возможен (см. § 4, свойство 3 оператора $M_L(F)$) предельный переход, совершая его, получим $M_L(F)=0$.

Таким образом, если $M_L(F)\neq 0$, то в оценке (1.6) нельзя число α заменить числом, большим единицы.

Покажем теперь, что в оценке (1.6) число β также нельзя заменить числом, большим единицы. Рассмотрение будем производить в условиях теоремы 2, считая, что в этой теореме $\frac{r_k}{r_{k-1}}\to 1$, $k\uparrow\infty$.

Пусть число β можно заменить большим единицы в оценке (1.6), тогда, в точности следуя рассуждениям, которые проводились при получении оценки (7.3), придем к неравенству

$$|A_j|<A(\varepsilon)\,e^{-(\beta_1\sigma_1-\varepsilon)|\lambda_j|^{\rho_1}}, \quad \beta_1>1.$$

Отсюда с помощью стандартных рассуждений находим, что для любого m

$$\left|\sum_{j=1}^{m}A_jf(\lambda_jz)\right|<A(\varepsilon)\,e^{(\gamma_1+\varepsilon)|z|^{\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}}},$$

где

$$\gamma_1=\alpha_1^{-\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\sigma}{\rho_1}\right)^{\frac{\rho_1}{\rho_1-\rho}}\left(\frac{\rho}{\sigma_1}\right)^{\frac{\rho}{\rho_1-\rho}}, \quad \alpha_1>1.$$

Откуда, как и выше, заключаем, что $M_L(F)=0$.

Таким образом, если $M_l(F) = 0$, то указанные оценки в теореме 1 не допускают улучшения.

В заключение автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю проф. А. Ф. Леонтьеву.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 27.V. 1967

Վ. Ի. ՇԵՎՑՈՎ

ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՈՐՈՇ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ա. Ֆ. Լեոնտևը [1] աշխատանքում հետազոտել է ամբողջ ֆունկցիաների $\sum_{n=0}^{\infty} A_n f(\lambda_n z)$ տեսքի շարքերով ներկայացնելու հարցը, ընդ որում հաշվի առնելով միայն ամբողջ ֆունկցիաների կարգը։ Սույն աշխատանքում քննարկվում է ամբողջ ֆունկցիաների այդպիսի շարքերով ներկայացման հարցը, հաշվի առնելով ինչպես ամբողջ ֆունկցիայի կարգը, այնպես էլ տիպը։

V. Y. SCHEVTZOV

ON THE REPRESENTATION OF ENTIRE FUNCTIONS BY ARBITRY SERIES

Summary

A. F. Leont'ev in [1] has considered the question of representing entire functions by the series $\sum_{n=0}^{\infty} A_n f(\lambda_n z)$ considering only the orders of entire functions. In this paper the question of representing entire functions by the series is considered, when the types of the entire functions are taken in consideration as well.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Леонтьев.* О представлении целых функций некоторыми общими рядами, Мат. сборник, 71 (113):1, 1966, 3—13.
2. *А. О. Гельфонд, А. Ф. Леонтьев.* Об одном обобщении ряда Фурье, Мат. сборник, 29 (71):3, 1951, 477—600.
3. *А. Ф. Леонтьев.* К вопросу о представлении целых функций последовательностями линейных агрегатов, Мат. сборник, 33 (75), № 2, 1953, 453—462.
4. *И. И. Репин.* О последовательности линейных агрегатов аналитических функций, равномерно ограниченных по росту, Мат. сборник, 36 (78):1, 1955, 3—24.
5. *И. И. Репин.* Об одном операторе и его свойствах, Доклады на научной конференции Ярославского пед-та, т. 2, вып. 3, 1964, 103—107.

6. *А. Ф. Леонтьев.* Ряды полиномов Дирихле и их обобщения, Тр. МИАН, т. 39, 1951.
7. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, Москва, 1956.
8. *Ю. Н. Фролов.* О решениях уравнения бесконечного порядка в обобщенных производных, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 64, 1961, 294—315.
9. *А. Ф. Леонтьев.* К вопросу о представлении произвольных целых функций рядами Дирихле и другими более общими рядами, Известия АН Армянской ССР, „Математика", 2, № 5, 1967.