ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 2, 1968 Математика

А. Б. НЕРСЕСЯН

О ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Введение

Исследованию корректности различных задач для гиперболических уравнений с данными (всеми или некоторыми) на линии параболического вырождения посвящен ряд работ (см. [1, 2]). Наиболее подробно исследована следующая, представляющая, по-видимому, наибольший интерес, задача Коши

$$-\Delta^2(x, y)\, U_{xx} + U_{yy} = aU_x + bU_y + cU + f \quad (y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (0.1)$$

$$U(x, +0) = \mu(x),\ U_y(x, +0) = \nu(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (0.2)$$

где

$$\Delta(x, y) = \omega(x, y)\, \Delta(y),\ 1 \leqslant \omega \leqslant \text{const},\ \Delta(y) > 0\ (y > 0),\ \Delta(+0) = 0,\ \Delta' \geqslant 0. \qquad (0.3)$$

Л. Берс [3] показал, что задача (0.1)—(0.2) корректна в классическом смысле, если в уравнении (0.1) отсутствуют члены низшего порядка.

В дальнейшем было замечено, что ограничениям нужно подвергать только коэффициент $a(x, y)$. Следующее (по-видимому, до сих пор наиболее общее) условие корректности установлено Проттером [4]

$$a_0(x) = \overline{\lim_{y \to +0}}\, \frac{y\, |a(x, y)|}{\Delta(y)} = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \qquad (0.4)$$

Однако даже в случае степенного убывания функции $\Delta(y)$ это условие оказывается жестким. В частности, при $\Delta(x, y) = y$ Хельвиг [5] показал, что достаточна оценка $a_0(x) < 2$, а при $\Delta(x, y) = y^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ Чи Минь-Ю [6] указывает оценку $a_0(x) < \alpha$. Из недавних результатов С. А. Терсенова для гиперболической системы [7] следует, что если $\Delta(x, y) = y^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$, $a_0(x) \leqslant \text{const}$ и все параметры задачи (0.1)—(0.2) дифференцируемы по x достаточное число раз (в зависимости от a_0), то эта задача поставлена корректно.

Случаи нарушения устойчивости в классическом смысле были отмечены Геллерстедтом [8] и И. С. Березиным [9]. Именно последним было показано, что существует решение задачи

$$-y^{2\alpha} U_{xx} + U_{yy} = U_x \quad (\alpha > 1,\ y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1), \qquad (0.5)$$

$$U(x, +0) = \frac{\sin \tau x}{\tau^{k+1}} \left(\text{или } \frac{\cos \tau x}{\tau^{k+1}}\right) (\tau > 0,\ k \geqslant 1),\ U_y(x, +0) = 0, \qquad (0.6)$$

непрерывно дифференцируемое при $y \geqslant 0$ и такое, что

$$\overline{\lim_{\tau \to +\infty}} \max_{\substack{0 < y < h(\tau) \\ 0 \leqslant x \leqslant 1}} |U(x, y)| = +\infty, \tag{0.7}$$

где $h(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$, в то время как начальные данные вместе со своими производными до k-го порядка, очевидно, стремятся к нулю.

В предлагаемой работе упомянутые выше критерии уточняются и обобщаются.

§ 1. Постановка задачи. Основные результаты. Рассмотрим оператор

$$LU = AU_{xx} + 2BU_{xy} + U_{yy} \quad (y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{1}$$

где функции $A(x, y)$ и $B(x, y)$ непрерывно дифференцируемы при $y > 0$ и

$$\Delta^2(x, y) = B^2 - A > 0 \quad (y > 0),\ \Delta(x, +0) \geqslant 0. \tag{2}$$

Изучается задача Коши

$$LU = a(x, y)\,U_x + b(x, y)\,U_y + c(x, y)\,U + f(x, y),\ (y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{3}$$

$$U(x, +0) = \mu(x),\ U_y(x, +0) = \nu(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{4}$$

Характеристики уравнения (3) определяются из соотношений

$$dx = \Phi_i(x, y)\,dy \quad (y \geqslant 0,\quad i = 1, 2), \tag{5}$$

где

$$\Phi_1 = B + \Delta,\ \Phi_2 = B - \Delta,\ A = \Phi_1\Phi_2, \tag{5'}$$
$$2B = \Phi_1 + \Phi_2,\ 2\Delta = \Phi_1 - \Phi_2.$$

Решение задачи (3)—(4) ищется в открытом характеристическом треугольнике D, опирающемся на отрезок $(y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Задачу (3)—(4) можно привести к виду (0.1)—(0.2) с симметрично расположенными характеристиками, однако для этого нужно иметь явные уравнения характеристик. С другой стороны, один из основных результатов (теорема 2) теряет свой смысл при замене переменных, и поэтому мы выбираем форму (3) исследуемого уравнения.

Приведем формулировки основных результатов.

1°. Для произвольной функции $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in D$, непрерывной при $y > 0$, введем обозначение

$$\varphi^*(y) = \max_x |\varphi(x, y)| \quad (y > 0). \tag{6}$$

Обозначим далее

$$\alpha_1 = a - bB + B_y + \Delta_y + B(B_x + \Delta_x),\ \alpha_2 = a - bB +$$
$$+ B_y + \Delta_y + B(B_x - \Delta_x),\ 2\Delta\alpha = |\alpha_1| + |\alpha_2|. \tag{7}$$

Теорема 1. *Пусть функции a, b и yc непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ по x $2p + 2$ раза ($p \geqslant 0$), функции A, B и f — $2p + 3$ раза, а функции ν и μ, соответственно, $2p+4$ и $2p + 5$ раз; кроме того A и B непрерывно дифференцируемы в D по y.*

Если для некоторого i ($= 1, 2$)

$$\int_0^y t\Delta^*(t)\, d\left|f_p^i(t)\exp\left(\int_t^y \alpha^*(\tau)\,d\tau\right)\right| < +\infty \quad (y>0), \tag{8}$$

где

$$f_p^i(y) = \int_0^y \alpha_i^*(t_1)(y-t_1)\int_0^{t_1} \alpha_i^*(t_2)(t_1-t_2)\cdots$$

$$\cdots\int_0^{t_p} \alpha_i^*(t_{p+1})(t_p-t_{p+1})\,dt_{p+1}\cdots dt_1, \tag{8'}$$

то задача (3)—(4) *имеет единственное решение* U, *обладающее непрерывными в* $\overline{D}$ *производными* $\frac{\partial^k U}{\partial x^{k-i}\partial y^i}$ $(i=0,\ 1,2;\ i\leqslant k\leqslant p+1)$. *Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям* f_i, μ_i *и* ν_i $(i=1,\ 2)$ *соответствуют решения* U_i. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что из оценки*

$$\sum_{k=0}^{2p+3}\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f_1-f_2)\right| + \sum_{k=0}^{2p+4}\max_{x}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\nu_1-\nu_2)\right| +$$

$$+\sum_{k=0}^{2p+5}\max_{x}\left|\frac{\partial^k}{\partial x^k}(\mu_1-\mu_2)\right| < \delta \tag{9}$$

следует

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{k=i}^{p+1}\max_{\overline{D}}\left|\frac{\partial^k(U_1-U_2)}{\partial x^{k-i}\partial y^i}\right| < \varepsilon. \tag{9'}$$

2°. Зафиксируем некоторую область Ω комплексной плоскости $z=x+it$, содержащую отрезок $(t=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$. Непрерывную в $\overline{D}$ функцию $\varphi(x,y)$ отнесем к классу $H(D,\Omega)$, если при каждом фиксированном $y\geqslant 0$ она аналитически продолжается по x в область Ω.

Теорема 2. *Если функции* A, B, Δ, a, b, c, f, μ *и* ν *принадлежат классу* $H(D,\Omega)$, *то задача* (3)—(4) *имеет единственное решение* $U(x,y)\in H(D,\Omega_1)$, *где область* Ω_1 *также содержит отрезок* $(t=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1)$ *и зависит только от* Ω.

Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям f_i, μ_i *и* ν_i $(i=1,\ 2)$ *соответствуют решения* U_i. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует такое* $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, *что если*

$$|f_1(z,y)-f_2(z,y)|+|\mu_1(z)-\mu_2(z)|+|\nu_1(z)-\nu_2(z)|<\delta,\ z\in\Omega,\ y\geqslant 0, \tag{10}$$

то

$$|U_1(z,y)-U_2(z,y)|<\varepsilon,\ z\in\Omega_1,\quad y\geqslant 0. \tag{10'}$$

Упомянутый во введении пример И. С. Березина показывает, что из оценки (10) при $\operatorname{Im} z=0$, вообще говоря, не следует оценка (10) при $\operatorname{Im} z=0$. В то же время из этого примера, аналогичного известному примеру Адамара для уравнения Лапласа, и из теоремы 2 следует, что задача (3)—(4) может обладать свойствами, присущими задаче Коши для эллиптического уравнения.

§ 2. Система интегральных уравнений. Прежде всего заметим, что без ограничения общности условия (4) можно считать однородными

$$U(x, +0)=0,\ U_y(x, +0)=0 \quad (0 \leq x \leq 1). \tag{4'}$$

Действительно, если $U(x, y)$ — решение задачи (3)—(4), то функция

$$\widetilde{U}(x, y)=U(x, y)-\mu(x)-\int\limits_x^{x+y} \nu(t)\, dt$$

является решением задачи (3)—(4') с измененным свободным членом.

Обозначив правую часть уравнения (3) через $F(x, y, U, U_x, U_y)$, перепишем его в следующих двух эквивалентных формах:

$$\sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial}{\partial s_1}\sqrt{1+\Phi_2^2}\frac{\partial U}{\partial s_2}=F+(\Phi_{2y}+\Phi_1\Phi_{2x})\,U_x,$$

$$\sqrt{1+\Phi_2^2}\frac{\partial}{\partial s_2}\sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial U}{\partial s_1}=F+(\Phi_{1y}+\Phi_2\Phi_{1x})\,U_x, \tag{11}$$

где через s_1 и s_2 обозначены составляющие с осью $x=0$ острый угол направления характеристик (5) при $i=1, 2$ соответственно.

Здесь учтены очевидные соотношения

$$\sqrt{1+\Phi_i^2}\frac{\partial}{\partial s_i}=\frac{\partial}{\partial y}+\Phi_i\frac{\partial}{\partial x} \quad (i=1, 2). \tag{11'}$$

Если U — решение задачи (3)—(4'), то уравнения (11) перепишутся в виде*

$$\sqrt{1+\Phi_2^2}\frac{\partial U}{\partial s_2}=\int\limits_{l_1}\{F+(\Phi_{2y}+\Phi_1\Phi_{2x})\,U_x\}\,dy,$$

$$\sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial U}{\partial s_1}=\int\limits_{l_2}\{F+(\Phi_{1y}+\Phi_2\Phi_{1x})\,U_x\}\,dy, \tag{12}$$

где через $l_i=l^i(x, y)$ $(i=1, 2)$ обозначен кусок характеристики, заключенный между точкой (x, y) и осью $y=0$.

Воспользовавшись формулами (11) и обозначив

$$V=U_x,\ W=\sqrt{1+\Phi_1^2}\frac{\partial U}{\partial s_1}, \tag{13}$$

придем к системе

$$2V\Delta=\int\limits_{l_2}\{F+(\Phi_{1y}+\Phi_2\Phi_{1x})\,V\}\,dy-$$

---

* Здесь и далее мы пользуемся криволинейными интегралами второго рода, содержащими дифференциал ординаты.

$$-\int_{\gamma_i}^{y} \{F+(\Phi_{2y}+\Phi_1\Phi_{2x})\,V\}\,dy \equiv R\,(V,\ W), \tag{14}$$

$$W=\int_{l_0}^{y} \{F+(\Phi_{1y}+\Phi_2\Phi_{1x})\,V\}\,dy \equiv S\,(V,\ W), \tag{15}$$

где

$$F=F\left(x,\,y,\,\int_{l_1}^{y} W dy,\ V,\ W-\Phi_1 V\right). \tag{15'}$$

Таким образом, если существует непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$ решение U задачи (3)—(4′), оно восстанавливается из некоторого решения системы (14)—(15) по любой из формул

$$U=\int_{l_1}^{y} W dy,\quad U=\int_{0}^{y} (W-\Phi_1 V)\,dy. \tag{16}$$

§ 3. **Сведение к системе (14)—(15).** Система (14)—(15), вообще говоря, не эквивалентна задаче (3)—(4′).

Действительно, пусть, например, в уравнении (3) $b\equiv c\equiv f\equiv 0$, а функции A, B и a не зависят от x, $\Delta(0)=0$. Легко проверить, что в этом случае система (14)—(15) имеет ненулевое решение

$$V=1,\quad W=\int_{0}^{y} a\,(t)\,dt+\Phi_1-B(0),$$

однако формулы (16) представляют различные функции, причем при $a\equiv 0$ ни одна из них не является решением уравнения (3).

Из решений системы (14)—(15) нужное нам решение выделяет следующая

Лемма 1. *Пусть система* (14)—(15) *имеет непрерывно дифференцируемое в D решение* $(V,\ W)$, *причем* $V(x,\ +0)=0$ *и* (см. (6))

$$\int_{0}^{y} |W_x-(\Phi_1 V)_x|^*\,dy<+\infty\quad (y>0). \tag{17}$$

Тогда функция U, восстанавливаемая по любой из формул (16), *является одним и тем же решением задачи* (3)—(4′).

Доказательство. Из (14) и (15)

$$\sqrt{1+\Phi_2^2}\,\frac{\partial W}{\partial s_2}-\sqrt{1+\Phi_1^2}\,\frac{\partial}{\partial s_1}\,(W-2V\Delta)=$$
$$=(\Phi_{1y}-\Phi_{2y}+\Phi_{1x}\Phi_2-\Phi_{2x}\Phi_1)\,V\quad (y>0).$$

С другой стороны, согласно формулам (11′) это же выражение записывается в виде

$$2\,\{(V\Delta)_y+\Phi_1\,(V\Delta)_x-\Delta W_x\}.$$

Воспользовавшись соотношениями (5'), получим, что

$$V_y = W_x - (\Phi_1 V)_x.$$

Проинтегрировав это равенство, из условий леммы получим

$$V = \int_0^y \{W_x - (\Phi_1 V)_x\}\, dy.$$

Таким образом, функция

$$U = \int_0^y (W - \Phi_1 V)\, dy$$

дифференцируема по x и $U_x = V$. Так как, очевидно, $U_y = W - \Phi_1 V$, то по (11')

$$\sqrt{1+\Phi_1^2}\,\frac{\partial U}{\partial s_1} = U_y + \Phi_1 U_x = W$$

или, согласно уравнению (15),

$$\sqrt{1+\Phi_2^2}\,\frac{\partial}{\partial s_2}\sqrt{1+\Phi_1^2}\,\frac{\partial U}{\partial s_2} = F + (\Phi_{1y} + \Phi_2\Phi_{1x})\, U_x,$$

где $F = F(x, y, U, U_x, U_y)$.

Лемма доказана, так как, очевидно $U(x, +0) = 0$ и $U_y(x, +0) = 0$, а уравнения (11) эквивалентны уравнению (3).

§ 4. **Вспомогательные построения.** В этом параграфе устанавливаются некоторые вспомогательные предложения, на которые опирается доказательство основных теорем.

1°. Рассмотрим уравнение

$$U(y) = \int_0^y K(t)U(t)\, dt + f(y) \quad (0 < y < y_0), \tag{18}$$

где функции K и f непрерывны при $y > 0$ и

$$\int_0^{y_0} K(t)\, dt = \infty. \tag{18'}$$

Уравнение (18) иногда не имеет решения (например, при $f = 1$ и $K(y) > 0$). С другой стороны, если $K > 0$, то функция

$$U_0(y) = \exp\left\{\int_{y_0}^y K(t)\, dt\right\} \tag{19}$$

очевидно является непрерывным ненулевым решением однородного уравнения.

Если функция f удовлетворяет условию

$$\int_0^{y_0} \frac{K(t)\,|f(t)|}{U_0(t)}\, dt < +\infty, \tag{20}$$

то единственным решением уравнения (18), удовлетворяющим условию

$$U(y) = U_0(y)\, o(1), \ y \to +0 \tag{20'}$$

будет функция

$$u(y) = f(y) + U_0(y) \int_0^y \frac{K(t)}{U_0(t)} f(t)\, dt = U_0(y) \int_0^y \frac{f'(t)}{U_0(t)}\, dt, \tag{21}$$

причем правая часть этой формулы соответствует дифференцируемой функции f.

Формула (21), очевидным образом видоизмененная для уравнения на характеристической кривой, в дальнейшем будет неоднократно применена.

Лемма 2. *Пусть ряд* $\varepsilon(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(y)$, *где* $\varepsilon_n(y) > 0$ — *непрерывные при* $0 < y < y_0$ *функции, равномерно сходится, и* $\varepsilon(y)$ *удовлетворяет условию* (20). *Если*

$$\omega_n(y) < \int_0^y K(t)\, \omega_{n-1}(t)\, dt + \varepsilon_n(y) \ (n \geqslant 1, \ \omega_0 = \varepsilon_0, \ 0 < y < y_0), \tag{22}$$

то ряд $\omega(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(y)$ $(0 < y < y_0)$ *равномерно сходится и его сумма удовлетворяет условию* (20').

Очевидно, что можно ограничиться случаем, когда в соотношениях (22) стоит знак равенства. В этом случае

$$\omega_n(y) = \int_0^y K(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_{n-k}}{k!} \left(\int_t^y K(\tau)\, d\tau \right)^k dt + \varepsilon_n(y),$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{p} \omega_n(y) = \int_0^y K(t) \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(\int_t^y K(\tau)\, d\tau \right)^k \sum_{l=0}^{p-k} \varepsilon_l(t)\, dt + \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_n(y) \quad (p \geqslant 0).$$

В силу условий леммы можно под знаком интеграла перейти к пределу при $p \to +\infty$, поэтому

$$\omega(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \omega_n(y) = U_0(y) \int_0^y \frac{K(t)\, \varepsilon(t)}{U_0(t)}\, dt + \varepsilon(y).$$

Поскольку функция ω, очевидно, непрерывна, по известной теореме Дини (см., например, [10], стр. 454) ряд $\sum \omega_n$ сходится равномерно.

Сделаем некоторые замечания. Легко усмотреть, что если в оценке (22) к функции K прибавить интегрируемую при $y > 0$ функцию K_1, то утверждение леммы 2 останется справедливым. Менее очевидно следующее замечание: лемма 2 останется справедливой, если вместо (22)

$$\omega_n(y) \leqslant \int\limits_0^y K(t)\left\{1+\int\limits_t^y a(\tau)\,d\tau\right\}\omega_{n-1}(t)\,dt+\varepsilon_n(y), \tag{22'}$$

где функция $a(y) \geqslant 0$ интегрируема при $y \geqslant 0$.

Нетрудно видеть, что достаточно доказать существование решения уравнения

$$U(y)=\int\limits_0^y\left\{K(t)\,U(t)+a(t)\int\limits_0^t K(\tau)\,U(\tau)\,d\tau\right\}dt+f(y), \tag{18'}$$

удовлетворяющего условию (20), если f этому условию удовлетворяет. Для этого, обозначив

$$F(y)=\int\limits_0^y K(t)\,U(t)\,dt,$$

перепишем (18') в виде

$$U(y)=F(y)+\int\limits_0^y a(t)\,F(t)\,dt+f(y),$$

откуда

$$F(y)=U(y)-f(y)-\int\limits_0^y a(t)\exp\left(-\int\limits_t^y a(\tau)\,d\tau\right)(U(t)-f(t))\,dt$$

или

$$U(y)=\int\limits_0^y\left\{K(t)+a(t)\exp\left(-\int\limits_t^y a(\tau)\,d\tau\right)\right\}U(t)\,dt+$$

$$+\int\limits_0^y a(t)\exp\left(-\int\limits_t^y a(\tau)\,d\tau\right)f(t)\,dt+f(y),$$

и это уравнение, согласно первому замечанию к лемме, имеет нужное нам решение.

2°. Докажем, что уравнение*

$$U\Delta=\int\limits_{l_2}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial s_2}+\alpha\Delta\right)U\,dy+\iint(\beta U+f)\,dx\,dy, \tag{23}$$

где функции $\max\limits_x|\alpha|$, $\max\limits_x|\beta|$ и $\max\limits_x|f|$ интегрируемы при $y \geqslant 0$, имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $U(x,+0)=0$. Для этого обозначим

$$\alpha_1(x, y)=(s_2)\int\limits_y^{y_0}\alpha\,dy,$$

* Двойной интеграл здесь и далее считается распространенным по характеристическому треугольнику с вершиной в точке (x, y).

где $y_0 > 0$ — некоторая постоянная, а интеграл взят по части характеристики с направлением s_2, проходящей через точку (x, y). Зафиксировав определенную характеристику и воспользовавшись формулой (21), без труда можно доказать, что уравнение (23) эквивалентно следующему:

$$U = e^{\alpha_1} \int_{l_2} \frac{e^{-\alpha_1}}{\Delta} \frac{\partial}{\partial s_2} \left[\iint (\beta U + f)\, dxdy \right] dy. \tag{23'}$$

Обозначим теперь через

$$\xi = \varphi(\eta, x, y)$$

уравнение характеристики с направлением s_1, проходящей через точку (x, y). Так как функция φ непрерывно дифференцируема по x, то уравнение (23') можно переписать в виде

$$U = 2e^{\alpha_1} \int_{l_2} e^{-\alpha_1} \int_{l_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\beta U + f)\, d\eta dy, \tag{24}$$

а к этому уравнению уже без помех можно применить обычный метод последовательных приближений.

3°. Пусть теперь функции α, β и f непрерывно дифференцируем в $\overline{D}$ по x $p+1$ раз ($p \geqslant 0$).

Рассмотрим оператор

$$LV = 2\int_{l_2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial s_2} + \beta\Delta \right) V dy + \int_{l_2 - l_1} (\alpha V + f)\, dy =$$

$$= 2\int_{l_2} \left(\frac{\partial \Delta}{\partial s_2} + \beta\Delta \right) V dy + \iint (\alpha V + f)_x\, dxdy. \tag{25}$$

В частном случае, когда $b \equiv c \equiv 0$, система (14) — (15) сводится к уравнению

$$2V\Delta = LV, \quad (x, y) \in D, \tag{26}$$

где

$$\alpha = a + \Phi_{2y} + \Phi_1 \Phi_{2x}, \quad \beta = -\Phi_{2x}. \tag{26'}$$

Это уравнение, как мы увидим ниже, уже заключает в себе все те специфические особенности задачи (3)—(4'), которые являются следствием вырождения типа уравнения (3).

Рассмотрим далее функции $V^k_{p-k}(x, y)$ $(k = 0, 1, \cdots, p)$, определяемые системой

$$2V^k_{p-k}\Delta = 2\int_{l_2} \Delta' \; V^k_{p-k} dy + \iint \sum_{l=0}^{k+1} C^l_{k+1} \, a^{(k+1-l)} \; V^l_{p-l}\, dxdy +$$

$$+ \iint f^{(k+1)} dxdy, \quad k = 0, 1, \cdots, p-1; \quad V^p_0 \equiv 0 \;\; (p \geqslant 0), \tag{27}$$

где функции a и f дифференцированы по x, а функции A и B считаются не зависящими от x.

Нетрудно убедиться, что решение системы (27) сводится к последовательному решению уравнений типа (24), так что существует нужная нам функция $V_p^0(x, y)$ и $V_p^0(x, +0) = 0$.

В случае, когда A и B зависят и от x, уравнения (27) составляются следующим образом: уравнение (26) формально дифференцируется по x k раз ($k = 0, 1, \cdots, p-1$) и вместо $\dfrac{\partial^k V}{\partial x^k}$ подставляется V_{p-k}^k.

В этом случае мы получим, разумеется, гораздо более громоздкие выражения, однако и в этом случае оказывается справедливой следующая

Лемма 3. *Пусть*

$$f_p(x, y) = 2V_p^0\Delta - LV_p^0, \ (x, y) \in D. \tag{28}$$

Тогда (см. обозначение (6))

$$|f_p| \leqslant \text{const} \int_0^y \alpha^*(t) \int_t^y \Delta^*(\tau)\, d\tau \int_0^t \alpha^*(t_1)(t-t_1) \times$$

$$\times \int_0^{t_1} \alpha^*(t_2)(t_1-t_2) \cdots \int_0^{t_{p-2}} \alpha^*(t_{p-1})(t_{p-2}-t_{p-1})\, t_{p-1}^2\, dt_{p-1} \cdots dt_1 dt \ (p > 1).$$

Доказательство наметим в предположении, что A и B от x не зависят.

Обозначим

$$\alpha_k = V_{p-k}^k - \frac{\partial}{\partial x} V_{p-k+1}^{k-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, p).$$

Из формул (27) имеем

$$2V_p^0\Delta - LV_p^0 = 2V_p^0\Delta - 2\int_{l_1}^{y} \Delta' V_p^0\, dy -$$

$$- \int\int (\alpha V_p^0)_x\, dxdy = \int\int \alpha\alpha_1\, dxdy. \tag{29}$$

С другой стороны, функции α_k удовлетворяют системе

$$2\alpha_k\Delta = 2\int_{l_1}^{y} \Delta'\alpha_k\, dy + \int\int \alpha\alpha_{k+1}\, dxdy +$$

$$+ \int\int \sum_{i=0}^{k-1} C_k^i\, \alpha^{(k-i)}\, \alpha_{i+1}\, dxdy \quad (k = 1, 2, \cdots, p-1;\ p > 1). \tag{30}$$

$$2\alpha_p\Delta = -2\Delta \frac{\partial}{\partial x} V_1^{p-1} = 2\int_{l_1}^{y} \Delta'\alpha_p\, dy -$$

$$- \frac{\partial}{\partial x}\int\int \sum_{i=0}^{p-1} C_{k+1}^i\, \alpha^{(k+1-i)}\, V_{p-i}^i\, dxdy - \int\int f^{(p-1)}\, dxdy.$$

Применив результаты предыдущего пункта к системе (30), получим оценки (см. обозначение (6))

$$\overset{*}{\alpha}_1 < \text{const} \int\limits_0^y (y-t)\, \alpha^*(t)\, \alpha_1(t)\, dt,$$

$$\overset{*}{\alpha}_k < \text{const} \int\limits_0^y (y-t) \left(\alpha\alpha^* + \sum_{i=1}^{k-1} \overset{*}{\alpha}_i\right) dt <$$

$$< \text{const} \int\limits_0^y (y-t)\, \alpha^*(t)\, \alpha_{k+1}(t)\, dt \quad (k = 2, 3, \cdots, p-1),$$

$$\overset{*}{\alpha}_p < \text{const}\, y^2.$$

Применив эти оценки к формуле (29), получим оценку (28′).

4°. Применим к уравнению (26) следующий метод последовательных приближений:

$$2V_n\Delta = 2\int\limits_{l_2} \left(\frac{\partial\Delta}{\partial s_2} - \Phi_{2x}\Delta\right) V_n\, dy +$$

$$+ \iint (\alpha V_{n-1} + f)_x\, dxdy. \tag{31}$$

Согласно результатам пункта 2°, при заданном V_{n-1} это уравнение имеет единственное решение V_n, удовлетворяющее условию $V_n(x, +0) = 0$.

Обозначим $\omega_n = V_n - V_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

Лемма 4. *Если α и f принадлежат $H(D, \Omega)$ (см. § 1, п.2°), то*

$$|\omega_n(x, y)| < M_1 M_2^n\, y^{2n}, \tag{32}$$

где M_1 и M_2 не зависят от x и y.

Доказательство проведем в случае, когда A и B не зависят от x. Тогда (см. п. 2°)

$$\omega_n = 2\iint\limits_{l_2\, l_1} (\alpha\omega_{n-1})_x\, d\eta\, dy \quad (n \geqslant 2), \tag{33}$$

$$\omega_1 = 2\iint\limits_{l_2\, l_1} f_x\, dxdy.$$

Пусть теперь $\alpha, f \in H(D, \Omega)$. Тогда, как известно,

$$\left|\frac{\partial^k \alpha}{\partial x^k}\right|, \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}\right| < C_1 C_2^k\, k!\ (k \geqslant 0), \tag{34}$$

где C_1 и C_2 не зависят от x и y.

С другой стороны, из формул (33)

$$\omega_n = 2^n \iint\limits_{l_2\, l_1} \frac{\partial}{\partial x}\, \alpha \iint\limits_{l_2\, l_1} \frac{\partial}{\partial x}\, \alpha \cdots \iint\limits_{l_2\, l_1} \frac{\partial}{\partial x} (\alpha\omega_1)\, d\eta_n dy_n \cdots d\eta_1 dy_1. \tag{33′}$$

Обозначим

$$A_n = \left| \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, \eta_1) \frac{\partial}{\partial x} \alpha(x, \eta_2) \cdots \frac{\partial}{\partial x} [\alpha(x, \eta_n) w_1(x, \eta_n)] \right|.$$

Тогда, применив оценку (34), получим

$$A_n \leqslant C_3^n \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=n} i_1!\, i_2! \cdots i_n! = C_3^n\, n! \sum_{i_1=0}^{n} \sum_{i_2=0}^{i_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{i_{n-1}} 1 \leqslant$$

$$\leqslant C_3^n (2n+1)^n \leqslant C_4^n\, n!,$$

откуда и из (33′) следует оценка (32).

В случае, когда A и B зависят и от x, формула (33′) сильно усложнится, так как в формуле (31) контуры l_1 и l_2 могут деформироваться при изменении x. Однако можно показать, что это повлияет только на значения постоянных M_1 и M_2.

§ 5. **Доказательство теорем.** 1°. В частном случае, когда $b \equiv c \equiv 0$, теорема 2 непосредственно следует из леммы 4. Действительно, из оценки (32) следует, что при малых y последовательность V_n, построенная по формуле (31), равномерно сходится к решению V уравнения (26). В то же время, формально продифференцировав формулу (31) по x k раз ($k \geqslant 1$), можно показать, что функция V удовлетворяет оценке типа (34), т. е. принадлежит классу $H(D, \Omega)$. Это замечание очевидно в случае, когда функции A и B от x не зависят, так как в этом случае формулы (33) можно дифференцировать по x под знаком интеграла.

Если же A и B зависят от x, соответствующие формулы имеют, естественно, довольно громоздкий вид, что, однако, не отражается на результате. Что же касается устойчивости в смысле формулировки теоремы 2, то она следует из того факта, что если $|f(z, y)| < \delta$ при $z \in \Omega$, $y \geqslant 0$, то в оценке (34) для функции f можно положить $C_1 = \delta$, а число M_1 в оценке (32), как нетрудно видеть, можно взять сколь угодно малым при $\delta \to 0$.

В общем случае, когда b или C не равны тождественно нулю, идея доказательства та же, и мы лишь набросаем схему построения последовательности (V_n, W_n).

Положим (см. (14)—(15))

$$2V_n\Delta = 2\int_{l_2}\left(\frac{\partial\Delta}{\partial s_2} - \Phi_{2x}\Delta\right)V_n\, dy + \int\int \{F + (\Phi_{2y} + \Phi_1\Phi_{2x})\, V_{n-1}\}_x\, dxdy,$$

$$W_n = \int_{l_1} \{F + (\Phi_{1y} + \Phi_2\Phi_{1x})\, V_{n-1}\}\, dy,\ n \geqslant 1,\ V_0 \equiv 0, \tag{35}$$

причем вместо V и W в функцию F (см. (15′)) подставлены соответственно значения V_{n-1}, W_n. Второе из этих уравнений определяет функцию W_n через V_{n-1}, так как фактически является вольтерровским уравнением с непрерывным ядром (при $c \equiv 0$ можно даже выписать явную формулу). Решив первое из уравнений (35) относительно V_n (см. п. 2° § 4), можно, повторив все этапы доказательства леммы 4, получить оценку (32), которая, как уже указывалось, позволяет доказать теорему 2.

2°. Покажем сначала, что при $b = c = 0$ теорема 1 непосредственно следует из лемм 1 и 3. Для этого построим для системы (14)—(15) разрешающую последовательность

$$\begin{gathered} 2V_n\Delta = R(V_{n-1}, W_n), \\ W_n = S(V_{n-1}, W_n), \; n \geqslant 1, \end{gathered} \tag{36}$$

где принято $V_0 = V_p^0$ (см. п. 3° § 4).

При $b = c = 0$ эта система сводится к одному первому уравнению, причем, согласно лемме 3

$$2(V_1 - V_p^0)\Delta = f_p, \tag{37}$$

откуда, обозначив $\omega_n = V_n - V_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$, получим, что

$$2\omega_n\Delta = \int_{l_1}^{y} \alpha_2\omega_{n-1}\,dy - \int_{l_1}^{y} \alpha_1\omega_{n-1}\,dy \quad (n \geqslant 2),$$

$$2\omega_1\Delta = f_p, \tag{37'}$$

где α_1 и α_2 определены в п. 2° § 1.

В тех же обозначениях из формулы (37′), положив $2\omega_n\Delta = \sigma_n$, получим оценку

$$\dot{\sigma}_n(y) \leqslant \int_0^y \alpha^*(t)\,\dot{\sigma}_{n-1}(t)\,dt \quad (n \geqslant 2), \quad \dot{\sigma}_1(y) = \dot{f}_p(y). \tag{38}$$

Если теперь выполняется критерий (8) при $i = 1$, то, применив лемму 2 к последовательности $\dot{\sigma}_n$, получим, что последовательность $\{V_n\}_0^{+\infty}$ равномерно сходится. Дифференцируемость функции $V = \lim V_n$ по x вытекает из следующих соображений: если формально продифференцировать уравнение (36) по x, (а это допустимо, согласно условиям теоремы 1, и так как функция V_n зависит от производных f по x до $p+1$ порядка), то для определения V_{nx} и W_{nx} получим *такую же* систему, как и (36), отличающуюся от (36) лишь тем, что f заменено на f_x и справа добавлены слагаемые, являющиеся интегралами от V_n и W_n. В результате вместо оценки (38) (при $b = c = 0$) для функции $\sigma_n = 2(V_n - V_{n-1})_x\,\Delta$ получим оценку типа (22) и можем применить лемму 2 (так как сходимость $\{V_n\}_0^{+\infty}$ уже доказана).

Нетрудно провести такие же рассуждения и в общем случае, когда $b = 0$ или $c = 0$, только нужно воспользоваться замечаниями к лемме 2.

Таким образом, воспользовавшись леммой 1, можно утверждать, что решение задачи (3)—(4) существует и обладает дифференциальными свойствами, указанными в теореме 1. Последнее вытекает из возможности формального дифференцирования системы (36) (и применения леммы 3 для доказательства сходимости решения), вообще говоря, не более чем $p+1$ раз. Из изложенного следует также устойчивость в указанном в теореме 1 смысле.

Остается доказать утверждение теоремы 2 о единственности решения. Рассмотрим и здесь сначала простейший случай $b \equiv c \equiv 0$. Пусть $V(x, y)$ — решение однородной системы (14)—(15) (сходящейся к одному уравнению), обладающее требуемой гладкостью.

Так как уравнение (31) удовлетворяется при $f \equiv 0$ и $V_n = V$, то, применив формулу (24), получим

$$V = e^{\beta} \int\limits_{l_2} e^{-\beta} \int\limits_{l_1}^{*} \frac{\partial \varphi}{\partial x} (\alpha_1 V)_x \, d\tau \, dy, \tag{39}$$

где β — интеграл функции $-\Phi_{2x}$ по соответствующему куску характеристики.

Согласно условиям теоремы равенство (39) можно дифференцировать p раз по x. Поэтому, составив p-тую итерацию формулы (39) и воспользовавшись тем, что функция $\dfrac{\partial^{p+1} V}{\partial x^p \, \partial y}$ непрерывна в $\overline{D}$, без труда получим оценку (см. обозначения (6) и (8'))

$$V^* (y) \leqslant \mathrm{const} \; f_p^1 (y).$$

С другой стороны, обозначив $V\Delta = \omega$, из уравнения (14) имеем

$$\omega^* (y) \leqslant \int\limits_0^y \alpha^* (t) \, \omega^* (t) \, dt \quad (y > 0). \tag{39'}$$

И, наконец, воспользовавшись условием (8) и применив лемму 2 (при $\varepsilon_0 = \omega_n = \omega$, $\varepsilon_n = 0$ $(n \geqslant 1)$), получим, что $\omega^* \equiv 0$, т. е. $V \equiv 0$, откуда следует, что $W \equiv 0$ и, значит, $U \equiv 0$ (см. (16)).

§ 6. **Задача Коши для системы**. Рассмотрим систему

$$U_{iy} + A_i U_{1x} + B_i U_{2x} = F_i (x, y, U_1, U_2) \; (i = 1, 2; \; y > 0, \; 0 \leqslant x \leqslant 1), \tag{40}$$

гиперболическую при $y > 0$ и, возможно, вырождающуюся при $y = 0$, т. е.

$$\Delta^2 (x, y) = (A_1 - B_2)^2 + 4 A_2 B_1 \; (y > 0), \; \Delta (x, +0) \geqslant 0. \tag{40'}$$

Изучается задача Коши

$$U_i (x, +0) = \mu_i (x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1, \quad i = 1, 2). \tag{41}$$

Частный случай этой задачи изучал С. А. Терсенов [7].

Характеристики системы (40) определяются из уравнений

$$dx = \lambda_i (x, y) \, dy \quad (i = 1, 2), \tag{42}$$

где

$$2\lambda_1 = \Delta - (A_1 + B_2), \; 2\lambda_2 = - \Delta - (A_1 + B_2). \tag{42'}$$

Без ограничения общности можно считать, что $A_1 \geqslant B_2$. Случай $A_2 \equiv B_1 \equiv 0$ неинтересен, так как, очевидно, в этом случае задача

(40)—(41) корректна. Дополнительно потребуем, чтобы при $y>0$ $A_2>0$ (это условие можно было бы наложить на B_1). Обозначив

$$c = A_1 - B_2 + \Delta \geqslant \Delta,\ c_1 = 2\Delta - c < \Delta,$$

$$2A_2 V_1 = 2A_2 U_1 - cU_2;\ 2A_2 V_2 = 2A_2 U_1 + c_1 U_2, \tag{43}$$

сведем систему (40) к виду

$$\sqrt{1+\lambda_1^2}\,\frac{\partial V_1}{\partial s_1} \equiv V_{1y} - \lambda_1 V_{1x} = F_1 - \frac{c}{2A_2} F_2 - \left\{\left(\frac{c}{2A_2}\right)_y - \lambda_1\left(\frac{c}{2A_2}\right)_x\right\} U_2, \tag{44}$$

$$\sqrt{1+\lambda_2^2}\,\frac{\partial V_2}{\partial s_2} \equiv V_{2y} - \lambda_2 V_{2x} =$$

$$= F_1 - \frac{c}{2A_2} F_2 + \frac{\Delta}{A_2} F_2 + \left\{\left(\frac{c_1}{2A_2}\right)_y - \lambda_2\left(\frac{c_1}{2A_2}\right)_x\right\} U_2, \tag{45}$$

где в аргументах функций F_1 и F_2 подставлено

$$U_1 = V_1 + \frac{c}{2\Delta}(V_2 - V_1),\ U_2 = \frac{A_2}{\Delta}(V_1 - V_2). \tag{46}$$

Как обычно, без ограничения общности, в условиях (41) можно положить $\psi_i(x) \equiv 0$ ($i = 1, 2;\ 0 \leqslant x \leqslant 1$). Тогда в обозначениях

$$V = U_2,\ W = V_1,\ \omega A_2 = \Delta \tag{47}$$

задача (40)—(41) сведется к следующей системе:

$$\omega V = \int\limits_{l_2 - l_1} F dy + \int\limits_{l_2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial s_2} + \Delta\beta + \omega F_2\right) V\, dy, \tag{48}$$

$$W = \int\limits_{l_1} F d\,y, \tag{49}$$

где

$$F = F_1 - \frac{c}{2A_2} F_2 - V\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{c}{2A_2}\right),\ \beta = \left(\frac{c}{2A_2}\right)_x \tag{50}$$

с учетом обозначений (46) и (47) в аргументах функций F_1 и F_2.

Разумеется, как и в случае одного уравнения второго порядка, система (48)—(49), вообще говоря, не эквивалентна задаче (40)—(41), однако не представляет труда доказать здесь лемму, отличающуюся от леммы 1 лишь заменой в условии (17) функции Φ_1 на $\dfrac{c}{2A_2}$.

Как мы видим, система (48)—(49) вполне аналогична системе (14)—(15), и поэтому при ее исследовании можно применить развитый выше метод. Не останавливаясь на несущественных видоизменениях доказательств, приведем формулировки результатов в линейном случае

$$F_i = a_i u_1 + b_i u_2 - f_i\ (i = 1, 2;\ y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1). \tag{51}$$

Как обычно, через D обозначим открытый характеристический треугольник, опирающийся на отрезок ($y = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$). Обозначим также

$$2d = A_1 + B_2,\ 2A_2e = c,\ \alpha_1 = b_1 + e_y + de_x +$$
$$+ e(a_1 - ea_2 - b_2),\ \alpha_2 = a_1 + \omega_y + d\omega_x,\ \omega\alpha = |\alpha_1| + |\alpha_2|. \tag{52}$$

Аналог теоремы 1 формулируется следующим образом: пусть функции a_i, b_i и c непрерывны в $\overline{D}$ вместе с производными по x до $2p+2$-го ($p \geqslant 0$) порядка, A_i, B_i и f_i — до $2p+3$-го, а μ_i до $2p+4$-го порядка; кроме того, пусть функции A_i, B_i и c непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ по y. Тогда, если (см. обозначение (6)) при некотором $i\ (=1,\ 2)$

$$\int_0^y t\omega^*(t)\ \frac{d}{dt}\left\{f_p^i(t) \exp\left(\int_t^y \alpha^*(\tau)\,d\tau\right)\right\} dt < \infty \quad (y>0), \tag{53}$$

где

$$f_p^i(y) \leqslant \int_0^y A_2(t_1) \int_0^{t_1} \alpha_i^*(t_2) \cdots \int_0^{t_{2p}} A_2^*(t_{2p+1}) \int_0^{t_{2p+1}} \alpha_i^*(t_{2p+2})\,dt_{2p+2} \cdots dt_1, \tag{53'}$$

то задача (40)—(41) имеет единственное решение (U_1, U_2), обладающее непрерывными в $\overline{D}$ производными

$$\frac{\partial^k U_i}{\partial x^{k-l}\,\partial y^l}\ (i = 1,\ 2;\ j = 0,\ 1;\ j \leqslant k \leqslant p+1).$$

Это решение устойчиво в следующем смысле: пусть функциям μ_i^j и $f_i^j\ (i,\ j = 1,\ 2)$ соответствуют решения $U^j = (U_1^j, U_2^j)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из оценки

$$\sum_{k=0}^{2p+3} \sum_{j=1}^{2} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}\,(f_j^1 - f_j^2) \right| +$$
$$+ \sum_{k=0}^{2p+1} \sum_{j=1}^{2} \max_{x} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k}\,(\mu_j^1 - \mu_j^2) \right| < \delta \tag{54}$$

следует, что

$$\sum_{l=0}^{1} \sum_{k=l}^{p+1} \sum_{j=1}^{2} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^k (U_j^1 - U_j^2)}{\partial x^{k-l}\,\partial y^l} \right| < \varepsilon. \tag{54'}$$

Теорема 2 остается справедливой и для задачи (40)—(41), если функции A_i, B_i, a_i, b_i, f_i ($i = 1,\ 2$), c, d, e и ω принадлежат классу $H(D,\ \Omega)$.

§ 7. **Другие обобщения и уточнения.** 1°. Теорему 1 можно обобщить на случай, когда правая часть уравнения (3) является нелинейной функцией $F(x,\ y,\ u,\ u_x,\ u_y)$. Для простоты остановимся на случае $p = 0$. Пусть функция F дважды непрерывно дифференцируема по x в области ($0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant h$, $\max\{|U-\mu|,\ |U_x - \mu_x|,\ |U_y - \nu|\} \leqslant \gamma = \text{const}$), и в этой же области существуют непрерывные производные F_u, F_{u_x}, F_{u_y} (это условие можно было бы заменить условием Липшица). Тогда, если

$$\int_0^y t\Delta^*(t)\,d\left\{\int_0^t \beta(\tau)(t-\tau)\,d\tau \exp\left(\int_t^y \alpha^*(\tau)\,d\tau\right)\right\} < \infty \quad (y>0), \tag{55}$$

где (см. обозначение (6))

$$\beta(y) = \{B_y + \Delta_y + B(B_x + \Delta_x)\}^* + a(y) + b(y)B^*, \tag{55'}$$

$$a(y) = \max_{x,\,u,\,u_x,\,u_y} |F_{u_x}|, \quad b(y) = \max_{x,\,u,\,u_x,\,u_y} |F_{u_y}|, \quad \alpha\Delta = \beta,$$

то в некоторой области $D_1 = D \cap (0 \leqslant y \leqslant h_1 < h,\ 0 \leqslant x \leqslant 1)$ (D — основной характеристический треугольник) соответствующая нелинейная задача (3)—(4) имеет единственное решение U, обладающее непрерывными в $\overline{D}_1$ производными $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^{2-i}\,\partial y^i}$ $(i = 0, 1, 2)$. Устойчивость решения характеризуется оценками (9) и (9′) при $p = 0$ (с заменой области D на D_1).

Нетрудно сформулировать соответствующий результат и при $p > 0$, а также перенести эти обобщения на задачу (40)—(41).

2°. Теорема 1 для задачи (40)—(41) (см. § 6) останется справедливой, если в правой части системы (40) добавить член вида

$$\sum_{j=1}^{2} \int_0^y K_j^i(x, y, \tau)\, U_j(x, \tau)\, d\tau \quad (i = 1, 2;\ y > 0), \tag{56}$$

где непрерывные функции K_j^i достаточно гладкие по x.

Для доказательства этого утверждения достаточно повторить схему § 5 и воспользоваться замечаниями к лемме 2. С другой стороны, уравнение (3) обозначением $U_x = U_1$, $U_y = U_2$ сводится к системе (40) с добавкой члена вида (56). Таким образом, задачу (3)—(4) можно считать частным случаем задачи (40)—(41). Отметим также, что добавка (56) может содержать также криволинейные интегралы вольтерровского типа.

3°. В ходе доказательства теоремы 1 фактически был получен также следующий результат: пусть (в обозначениях (6) и (7)) для некоторого i $(=1, 2)$

$$\int_0^y \Delta^*(t) \exp\left\{\int_t^y \alpha^*(\tau)\,d\tau\right\} df_p^i(t) < \infty \quad (y > 0), \tag{57}$$

где

$$f_p^i(y) = \int_0^y \alpha_i^*(t_1)(y - t_1)\,y \int_0^{t_p} \alpha_i^*(t_{p-1})\,(t_p - t_{p-1})\,t_{p-1}^*\,dt_{p-1} \cdots dt_1, \quad (p \geqslant 0) \tag{57'}$$

и функции a, b, yc непрерывно дифференцируемы в $\overline{D}$ по x $r+2$ раза $(r \geqslant p)$, A, B и f — $r+3$ раза, а ν и μ, соответственно, $r+4$ и $r+5$ раз, кроме того, A и B непрерывно дифференцируемы в D по

y. Тогда существует решение U задачи (3)—(4) (получаемое методом последовательных приближений п. 1° § 5), обладающее непрерывными производными $\frac{\partial^{s+2} U}{\partial x^{s+2-i} \partial y^i}$ $(i = 0, 1, 2;\ s = r - p > 0)$. В этом случае единственности решения доказать не удалось, однако нетрудно видеть, что если решение единственно, то оно устойчиво в следующем смысле: пусть функциям f_i, μ_i, ν_i $(i = 1, 2)$ соответствуют решения U_i. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из оценки

$$\sum_{k=0}^{n+3} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 - f_2) \right| + \sum_{k=0}^{n+4} \max_{x} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\nu_1 - \nu_2) \right| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n+5} \max_{x} \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\mu_1 - \mu_2) \right| < \delta \quad (p \leqslant n \leqslant r) \tag{58}$$

следует, что

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{k=i}^{n-p+2} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^k (U_1 - U_2)}{\partial x^{k-i} \partial y^i} \right| < \varepsilon. \tag{58'}$$

Критерий существования (57) при $r = 2p$ заметно сильнее критерия корректности (8).

Нетрудно сформулировать соответствующее уточнение и для задачи (40)—(41).

4°. Теорему 1 можно усилить, отказавшись от непрерывности функций a, b и yc при $y = 0$. Действительно, в доказательстве ничего не нужно менять, если предположить, что (см. обозначение (6)) функции $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} a\right)^*$, $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} b\right)^*$ и $y\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} c\right)^*$ $(i = 1, 2;\ k = 0, 1, \cdots 2p+2)$ (или функции $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} a_i\right)^*$ и $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} b_i\right)^*$ $(i = 1, 2;\ k = 0, 1, \cdots, 2p+2)$ в задаче (40)—(41)) интегрируемы при $y \geqslant 0$.

Что же касается функции f, то в условиях теоремы 1 можно потребовать, чтобы функции $\left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} f\right)^*$ $(k = 0, 1, \cdots, 2p+3)$ мажорировались некоторой функцией $g(y) \geqslant 0$, интегрируемой при $y > 0$. В этом случае нетрудно доказать следующий результат: если в условии (8) под знаком интеграла заменить сомножитель t на $\int\limits_0^t g(\tau)\, d\tau$, то существует единственное U задачи (3)—(4) с непрерывными в $\overline{D}$ производными $\frac{\partial^k U}{\partial x^{k-i} \partial y^i}$ $(i = 0, 1,\ 0 \leqslant k \leqslant p+2)$ и непрерывными при $y > 0$ производными

$$\left| \frac{\partial^{k+2} U}{\partial x^k \partial y^2} \right| \leqslant \mathrm{const}\ g(y) \quad (k = 0, 1, \cdots, p). \tag{59}$$

Вместо оценок (9) и (9′) устойчивость характеризуется, соответственно, следующими оценками:

$$\sum_{k=0}^{2p+3} \max_x \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (f_1 - f_2) \right| < \varepsilon g(y) \quad (y > 0),$$

$$\sum_{k=0}^{2p+4} \max_x \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\nu_1 - \nu_2) \right| + \sum_{k=0}^{2p+5} \max_x \left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\mu_1 - \mu_2) \right| < \varepsilon, \tag{60}$$

$$\sum_{l=0}^{1} \sum_{k=l}^{p+2} \max_{\overline{D}} \left| \frac{\partial^k (U_1 - U_2)}{\partial x^{k-l} \partial y^l} \right| < \varepsilon,$$

$$\sum_{k=0}^{p} \max_x \left| \frac{\partial^{k+2} (U_1 - U_2)}{\partial x^k \partial y^2} \right| < \varepsilon g(y), \ (y > 0). \tag{60′}$$

Соответствующий результат можно сформулировать и для задачи (40)—(41).

5°. Если дополнительно потребовать непрерывной n-кратной $(0 \leqslant n \leqslant p)$ дифференцируемости параметров задачи (3)—(4) в $\overline{D}$ по y то, очевидно, решение U будет иметь непрерывные в $\overline{D}$ производные $\frac{\partial^k U}{\partial x^{k-i} \partial y^i}$ $(i = 0, 1, \cdots, n+2;\ i \leqslant k \leqslant p+2)$. Соответственно усилится характеристика устойчивости (9)—(9′).

6°. Очевидно, что задача (3)—(4) при $\mu \equiv \nu \equiv 0$ (или (40) — (41) при $\mu_l \equiv 0$) всегда имеет хотя бы одно дважды непрерывно дифференцируемое в $\overline{D}$ решение, если в условиях теоремы 1 при $p = 0$ вместо оценки (8) потребовать, чтобы функции $f^*(y)$ и $(f_x)^*$ (или функции f_l^* и $(f_{lx})^*$ в случае задачи (40)—(41)) достаточно быстро стремились к нулю при $y \to +0$.

§ 8. **Анализ результатов**. 1°. Для сравнения полученных результатов (теоремы 1 с уточнением п. 4° § 7) с известными ранее (см. введение) рассмотрим задачу (0.1)—(0.2) с условиями (0.3). Прежде всего заметим, что даже без условия монотонности $\Delta(y)$ эта задача корректна, если функция $\frac{1}{\Delta}$ интегрируема при $y \geqslant 0$ (поскольку в этом случае условие (8) выполняется при $p = 0$). Предположим теперь, что

$$a(x, y) = \bar{a}(x, y)\, \Delta'(y), \tag{61}$$

где функция $\bar{a}$ ограничена в $\overline{D}$. Тогда функция (8′) оценивается так

$$f_p^!(y) \leqslant \text{const} \cdot [y\Delta(y)]^{p-1}, \tag{61′}$$

причем последняя оценка тем грубее, чем быстрее стремится к нулю $\Delta(y)$ при $y \to +0$. Условие (8) заведомо выполняется, если

$$\overline{\lim_{y \to +0}} \max_x |\bar{a}(x, y)| = q,$$

$$\int_0^y t^{p+2}[\Delta(t)]^{1+p-q}\Delta'(t)\,dt<\infty \quad (y>0). \tag{62}$$

Таким образом, задача (0.1)—(0.2) корректна в смысле теоремы 1, если, независимо от скорости убывания $\Delta(y)$, $q<p+2$.

В том случае, когда $\Delta(y)=y^{\alpha}$ $(\alpha>0)$ в обозначении (0.4), из (62) следует, что достаточна оценка

$$a_0(x)<(\alpha+1)(p+2) \quad (0\leqslant x\leqslant 1). \tag{63}$$

Эта оценка усиливает все известные ранее критерии корректности задачи (0.1)—(0.2) при $\Delta(y)=y^{\alpha}$.

2. Из условия (0.4) заведомо следует выполнение условия (8) при $p=0$, поэтому можно усилить критерий Проттера. Однако не удобно улучшать этот критерий в терминах функции $a_0(x)$ в случае, когда $\Delta(y)$ стремится к нулю быстрее любой степени y. Действительно, применение критерия (62) к функции $\Delta(y)=\exp\{-y^{-\beta}\}$ $(\beta>0)$ дает следующее условие корректности в смысле теоремы 1:

$$\varlimsup_{y\to+0}\frac{y^{\beta+1}|a(x,y)|}{\Delta(y)}<\beta(p+1) \quad (0\leqslant x\leqslant 1), \tag{64}$$

откуда видно, что функция $a_0(x)$ может быть равна $+\infty$.

Нетрудно заметить из условия (62), что чем быстрее убывает $\Delta(y)$ при $y\to 0$, тем грубее критерий (0.4).

Выбор Проттером критерия корректности в форме (0.4) продиктован случаем $\Delta(y)=y^{\alpha}$ $(\alpha>0)$, и при подробном рассмотрении оказывается, что доказательство этого критерия проведено в работе [6] (вопреки утверждению автора в конце § 3) лишь в случае, когда $\Delta(y)$ убывает медленнее некоторой степени y. Во всяком случае, изложенный в [6] метод доказательства не проходит даже в случае $a=0$, если

$$\gamma=\varlimsup_{y\to+0}\frac{\int_0^y\frac{\Delta'(t)}{\Delta(t)}\int_0^t\Delta(\tau)\,d\tau\,dt}{\int_0^y\Delta(t)\,dt}=1, \tag{65}$$

так как автор по существу использовал условие $\gamma<1$ (см. [6], второе из условий (17), используемое в третьей снизу на стр. 549 формуле). Пример функции $\Delta(y)=y^{-\beta-1}\exp\{-y^{-\beta}\}$ $(\beta>0)$ показывает, что условие (65) выполняется для быстро убывающих функций. Действительно, для этой функции имеем

$$\frac{\Delta'(y)}{\Delta(y)}\int_0^y\Delta(t)\,dt=\left(1-\frac{\beta+1}{\beta}y^{\beta}\right)\Delta(y) \quad (y>0), \tag{65'}$$

откуда и следует равенство (65).

3°. Из условия (53) следует, что задача (40)—(41) всегда корректна (даже если функции F_i нелинейны и удовлетворяют обычным в таких случаях условиям Липшица), если функция $(\min_{r} \omega)^{-1}$ интегрируема при $y > 0$. Это относится, например, к системе

$$
\begin{aligned}
&u_{1y} + A(x, y)\, u_{1x} + y^{\alpha}\, \varepsilon(y)\, u_{2x} = F_1(x, y, u_1, u_2),\\
&u_{2y} + \varepsilon(y)\, u_{1x} + A(x, y)\, u_{2x} = F_2(x, y, u_1, u_2),
\end{aligned} \tag{66}
$$

где $0 \leqslant \alpha < 2$, $\varepsilon(y) > 0$ $(y > 0)$, $\varepsilon(+0) = 0$, хотя дискриминант этой системы $\Delta^2 = y^{\alpha}\varepsilon^2(y)$ может при $y \to 0$ стремиться к нулю с любой наперед заданной скоростью.

4°. В работе Чи Минь-ю [11] общее решение уравнения

$$
-y^2 u_{xx} + u_{yy} = a u_x \quad (y > 0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1) \tag{67}
$$

при $a = \mathrm{const}$ получено в явном виде. В частном случае, когда $a = 4n + 1$ ($n \geqslant 0$ — целое), задача Коши с начальными данными $u(x, +0) = \mu(x)$, $u_y(x, +0) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ имеет следующее единственное решение:

$$
u(x, y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{\pi}\, y^{2k}}{k!\,(n-k)!\,\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} \frac{\partial^k}{\partial x^k}\, \mu\left(x + \frac{y^2}{2}\right). \tag{67'}
$$

Отсюда следует, что при больших a эта задача имеет только обобщенное решение, если функция μ не бесконечно дифференцируемая. В то же время формула (67′) дает явную зависимость характера устойчивости решения от величины a.

Непосредственное применение к этой задаче критерия (63) дает несколько более ограничительное условие корректности (от μ требуется примерно вдвое больше производных), однако этот же пример показывает, что теорема 1 не может быть существенно улучшена.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 1.XII.1967

Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ՎԵՐԱՑՎՈՂ ՀԻՊԵՐԲՈԼԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ ԿՈՇԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում հետազոտվում է Կոշու խնդիրը այն դեպքում, երբ տվյալները տրված են պարաբոլական գծի վրա, իսկ հավասարումը տիրույթում հիպերբոլական է։ Ընդհանրացվում և ճշտվում են հայտնի կոռեկտության հայտանիշները։ Արդյունքները տարածվում են երկրորդ կարգի սիստեմների վրա

A. B. NERSESIAN

ON CAUCHY PROBLEM FOR DEGENERATING HYPERBOLIC EQUATION OF SECOND ORDER

S u m m a r y

In the paper the correctness of Cauchy problem for the hyperbolic equation of second order (two independent variables), whith initial conditions given on the line of parabolic degeneration is investigated. The known sufficient conditions for the correctnes of this problem are generalised and made more precise. The results are transfered to the case of the hyperbolic system of the second order.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. В. Бицадзе.* Уравнения смешанного типа, Изд. АН СССР. 1959.
2. *Л. Берс.* Математические вопросы дозвуковой и околозвуковой газовой динамики, ИЛ, М., 1961.
3. *L. Bers.* On the continuation of a potential gas flow across the sonic line, NACA Technical Note, 2058, 1950.
4. *M. H. Protter.* The Cauchy problem for a hyperbolic second order equation with data on the parabolic line, Canad. J. Math., 6, 4, 1954, 542—553.
5. *M. H. Protter.* On partial equations of mixed type, „Proceedings of the conference on differential equations (dedicated to A. Weinstein)", Univ. of Maryland Book Store, 1956.
6. *Qi Min-You.* On the Cauchy problem for second order hyperbolic equations in the variables with initial data on the parabolic degenerating line, Acta Math. Sinica, v. 12, 1, 1962, 68—76.
7. *С. А. Терсенов.* О задаче Коши с данными на линии вырождения для систем уравнений гиперболического типа, ДАН СССР, 155, 2, 1964.
8. *S. Gellerstedt.* Sur un probleme aux limites pour une equation lineaire aux derivecs partielle du second ordre de type mixte, These, Uppsala, 1935.
9. *И. С. Березин.* О задаче Коши для линейных уравнений второго порядка с начальными данными на линии параболичности, Мат. сборник, 24, 1949, 301—320.
10. *Г. М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том II, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
11. *Чи Минь-Ю.* О задаче Коши для одного класса гиперболических уравнений с начальными данными на линии параболического вырождения, Acta Math Sinica, v. 8, 4, 1958, 521—529