ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
3, № 1, 1968

В. В. ЮРАШЕВ

О КРИВИЗНЕ РИЧЧИ ГЕОМЕТРИИ, ОПРЕДЕЛЯЕМОЙ В ОБЛАСТИ $D \subset C^n$ С ПОМОЩЬЮ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

В работе [2] Б. А. Фуксом была получена оценка кривизны Риччи бергмановой метрики для систем $\{\varphi_\sigma(Z)\}$ голоморфных функций, замкнутых в классе $L^2(D)$ и ортонормированных по отношению к области D (здесь D — ограниченная область пространства C_Z^n, $Z=(z^1\cdots z^n)$ и $L_2(D)$ — класс голоморфных в D функций $f(Z)$, для которых $\int\limits_D |f(Z)|^2 dV_Z < +\infty$ (см. [1], стр. 76—96). Оказывается, что всегда $\rho < n+1$, где ρ — кривизна Риччи по направлению произвольного вектора $U=(u^1,\cdots,u^n)$. Если мы не будем допускать замкнутость и ортонормальность последовательности $\{\varphi_\alpha\}$, то, как будет показано, кривизна Риччи $\rho \leqslant n+1$. Кроме того, область D не предполагается ограниченной. Заметим, что аналогичный результат был получен Хуа-Ло-Кэном для кривизны Римана R (см. [4]). Он обобщил результаты Б. А. Фукса (см. [3]), показавшего, что для бергмановой метрики в ограниченной области $D \subset C_Z^n$ в любой точке $Z \in D$ по произвольному аналитическому направлению $R < 2$. Если не допускать замкнутость и ортонормальность последовательности $\{\varphi_\alpha\}$ и не предполагать ограниченность области D, то, как показал Хуа-Ло-Кэн, $R \leqslant 2$.

2. О метрике с фундаментальным тензором $T_{i\bar{j}}$

Рассмотрим в области D последовательность $\{\varphi_\alpha(Z)\}$ голоморфных функций, и пусть ряд

$$\sum_{\alpha=0}^{\infty} \varphi_\alpha(Z)\overline{\varphi_\alpha(Z)} = K(Z,\overline{Z}) \tag{2.1}$$

равномерно сходится в любом компакте $D^* \subset D$. Обозначим через T матрицу

$$T = \begin{pmatrix} T_{1\bar{1}} & T_{1\bar{2}} \cdots & T_{1\bar{n}} \\ T_{2\bar{1}} & T_{2\bar{2}} \cdots & T_{2\bar{n}} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ T_{n\bar{1}} & T_{n\bar{2}} \cdots & T_{n\bar{n}} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

элементы которой

$$T_{i\bar{j}} = \frac{\partial^2 \ln K(Z\bar{Z})}{\partial z^i \, \partial \bar{z}^j} . \tag{2.3}$$

Мы предположим далее для существования $\ln K(Z\bar{Z})$, что $\varphi_\alpha(Z)$ не только голоморфные функции, но и не имеют общего нуля в области D. Если мы подставим выражение (2.1) в (2.8), то получим

$$T_{i\bar{j}} = K^{-2} \sum_{\alpha > \beta} (\varphi_\alpha \varphi_\beta^i - \varphi_\beta \varphi_\alpha^i)\overline{(\varphi_\alpha \varphi_\beta^j - \varphi_\beta \varphi_\alpha^j)}, \tag{2.4}$$

где

$$\varphi_\beta^i = \frac{\partial \varphi_\beta}{\partial z^i}, \; \varphi_\alpha^i = \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial z^i}, \; \bar{\varphi}_\beta^j = \frac{\partial \bar{\varphi}_\beta}{\varphi \bar{z}^j}, \; \bar{\varphi}_\alpha^j = \frac{\partial \bar{\varphi}_\alpha}{\partial \bar{z}^j} .$$

Теперь эрмитову дифференциальную форму $dZTd\bar{Z}'$ можно записать в виде

$$dZTd\bar{Z}' = K^{-2} \sum_{\alpha > \beta} |\varphi_\alpha d\varphi_\beta - \varphi_\beta d\varphi_\alpha|^2. \tag{2.5}$$

Из выражения (2.5) следует, что если $\varphi_0(Z), \varphi_1(Z), \cdots$ — последовательность функций, голоморфных в D без общего нуля в D, и если ряд $K(Z\bar{Z}) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \varphi_\alpha(Z)\overline{\varphi_\alpha(Z)}$ сходится равномерно в любом компакте $D^* \subset D$, то эрмитова дифференциальная форма $dZ\bar{T}dZ' \geqslant 0$, причем равенство нулю имеет место лишь в том случае, когда ранг матрицы $(n \times \infty)$

$$\begin{pmatrix} \varphi_\alpha \varphi_\beta^1 - \varphi_\beta \varphi_\alpha^1 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \varphi_\alpha \varphi_\beta^n - \varphi_\beta \varphi_\alpha^n \end{pmatrix}_{\alpha > \beta > 0} \tag{2.6}$$

меньше n. Мы будем называть, как обычно, линейным замыканием последовательности $\{\varphi_\nu\}$ совокупность функций $f(Z)$, представимых рядом $f(Z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(Z)$, где a_ν — некоторые постоянные, равномерно сходящимся в любом компакте $D^* \subset D$. Можно показать, что если линейное замыкание последовательности $\{\varphi_\nu\}$ содержит функции $1, z^1, z^2, \cdots, z^n$, то $dS^2 = dZTd\bar{Z}' > 0$. Очевидно, что $dS^2 > 0$, если $\{\varphi_\nu\}$ — полная ортонормированная система голоморфных функций.

3. Представление $n+1-\rho$ через сумму квадратов

В этом пункте будет показано, что если $D \subset \mathbf{C}_Z^n$, то выражение $n+1-\rho$ может быть представлено через сумму квадратов некоторых функций. Здесь ρ — кривизна Риччи, вычисляемая по формуле

$$\rho = \frac{U\tilde{R}U'}{UT\bar{U}'}, \tag{3.1}$$

где $U = (u^1 \cdots u^n)$ — произвольный вектор, T выражается по формуле (2.2), а $\overline{R}$ — матрица кривизны Риччи, элементами которой служат величины $R_{p\bar{q}} = -(\ln\det T)^{\cdot}_{z^p \bar{z}^q}$, стоящие на пересечении p-ой строки и q-ого столбца.

Представим

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{1\bar{1}} \cdots T_{n\bar{1}} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ T_{n\bar{1}} \cdots T_{n\bar{n}} \end{vmatrix}$$

в виде

$$\det T = K^{-(n+1)} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\beta_n=0}^{\infty} \begin{vmatrix} \varphi_\alpha \cdot \bar{\varphi}_\alpha & \varphi^1_\alpha \cdot \bar{\varphi}_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \cdot \bar{\varphi}_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} \cdot \bar{\varphi}^1_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} \cdot \bar{\varphi}^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \cdot \bar{\varphi}^1_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} \cdot \bar{\varphi}^n_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} \cdot \bar{\varphi}^n_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \cdot \bar{\varphi}^n_{\beta_n} \end{vmatrix} =$$

$$= K^{-(n+1)} \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\beta_n=0}^{\infty} \bar{\varphi}_\alpha \bar{\varphi}^1_{\beta_1} \cdots \bar{\varphi}^n_{\beta_n} \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix} = \tag{3.2}$$

$$= K^{-(n+1)} \sum_{\alpha > \beta_1 > \cdots > \beta_n} \overline{\begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix}} \times \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix}.$$

Мы получили, что

$$\det T = K^{-(n+1)} \sum_{\alpha > \beta_1 > \cdots > \beta_n} \overline{\Psi_{\alpha\beta_1\cdots\beta_n}(Z)}\, \Psi_{\alpha\beta_1\cdots\beta_n}(Z), \tag{3.3}$$

где

$$\Psi_{\alpha\beta_1\cdots\beta_n} = \begin{vmatrix} \varphi_\alpha & \varphi^1_\alpha & \cdots & \varphi^n_\alpha \\ \varphi_{\beta_1} & \varphi^1_{\beta_1} & \cdots & \varphi^n_{\beta_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_{\beta_n} & \varphi^1_{\beta_n} & \cdots & \varphi^n_{\beta_n} \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Расположим $(\alpha\beta_1 \cdots \beta_n)$, где $\alpha > \beta_1 > \cdots > \beta_n$, в следующем порядке: если $\alpha = \gamma_0$, $\beta_1 = \gamma_1, \cdots$, $\beta_{r-1} = \gamma_{r-1}$, но $\beta_r > \gamma_r$, то $(\gamma_0\gamma_1 \cdots \gamma_n)$ следует за $(\alpha\beta_1 \cdots \beta_n)$. Пронумеруем эту последовательность $\omega = 0, 1, 2 \cdots$.

Тогда

$$\det T = K^{-(n+1)} \sum_{\omega=0}^{\infty} \overline{\Psi_\omega(Z)}\, \Psi_\omega(Z). \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.1), мы получаем

$$\rho = n + 1 - (UT\overline{U}')^{-1} \sum_{\omega > \mu} |\Psi_\omega \breve{d}\Psi_\mu - \Psi_\mu \breve{d}\Psi_\omega|^2 \Big(\sum_{\omega=0}^{\infty} |\Psi_\omega|^2 \Big)^{-1}, \tag{3.6}$$

где $\breve{d} = \dfrac{\partial}{\partial z^p} \cdot u^p, \ \bar{\breve{d}} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}^q} \cdot \bar{u}^q$.

Поскольку элементы матрицы $\breve{R}$: $R_{p\bar{q}} = -\Big(\ln K^{-(n+1)} \sum\limits_{\omega=0}^{\infty} \overline{\Psi}_\omega \Psi_\omega\Big)'' z^p \bar{z}^q$, то, очевидно, что для существования логарифма, функции $\Psi_\omega(Z)$ из последовательности $\{\Psi_\omega(Z)\}$ не должны иметь общего нуля в области D. Но $\Psi_\omega(Z)$ выражается через функции $\varphi_\nu(Z) \in \{\varphi_\nu(Z)\}$ (см. (3.4)). Пусть в точке $Z = Z_0$, $\varphi_{\beta_n}(Z_0) \neq 0$, тогда

$$\begin{vmatrix} \varphi_\alpha \varphi_\alpha^1 \cdots \varphi_\alpha^n \\ \varphi_{\beta_1} \varphi_{\beta_1}^1 \cdots \varphi_{\beta_1}^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \varphi_{\beta_n} \varphi_{\beta_n}^1 \cdots \varphi_{\beta_n}^n \end{vmatrix} = \varphi_{\beta_n}^{n+1} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial z^1}\Big(\dfrac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\beta_n}}\Big) & \dfrac{\partial}{\partial z^2}\Big(\dfrac{z_\alpha}{\varphi_{\beta_n}}\Big) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial z^n}\Big(\dfrac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\beta_n}}\Big) \\ \dfrac{\partial}{\partial z^1}\Big(\dfrac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta_n}}\Big) & \dfrac{\partial}{\partial z^2}\Big(\dfrac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta_n}}\Big) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial z^n}\Big(\dfrac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta_n}}\Big) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial}{\partial z^1}\Big(\dfrac{\varphi_{\beta_{n-1}}}{\varphi_{\beta_n}}\Big) & \dfrac{\partial}{\partial z^2}\Big(\dfrac{\varphi_{\beta_{n-1}}}{\varphi_{\beta_n}}\Big) & \cdots & \dfrac{\partial}{\partial z^n}\Big(\dfrac{\varphi_{\beta_{n-1}}}{\varphi_{\beta_n}}\Big) \end{vmatrix}. \tag{3.7}$$

Из (3.7) следует, что если последовательность $\{\varphi_\nu(Z)\}$ содержит n независимых функций $\dfrac{\varphi_\alpha}{\varphi_{\beta_n}}, \dfrac{\varphi_{\beta_1}}{\varphi_{\beta_n}}, \cdots, \dfrac{\varphi_{\beta_{n-1}}}{\varphi_{\beta_n}}$, то в точке $Z = Z_0$ $\det T$ не обращается в нуль. Отсюда следует

Теорема. Если в области $D \subset \mathbf{C}_Z^n$ существует последовательность голоморфных функций $\{\varphi_\nu(Z)\}$, обладающих следующими свойствами:

1. Ряд $K(Z\overline{Z}) = \sum\limits_{\alpha=0}^{\infty} \overline{\varphi_\alpha(Z)}\, \varphi_\alpha(Z)$ сходится равномерно в любом компакте $D^* \subset D$;

2. Функции $\varphi_\nu(Z) \in \{\varphi_\nu(Z)\}$ не имеют общего нуля в области D;

3. Последовательность $\{\varphi_\nu/\varphi_0\}_{\nu=1,2,\cdots}$ ($\varphi_0 \neq 0$ в точке $Z = Z_0$) содержит не менее n независимых функций.

Тогда в любой точке $Z_0 \in D$ по направлению произвольного вектора $U = (u^1 \cdots u^n)$ кривизна Риччи $\rho \leqslant n+1$.

Следствие 1. Если в качестве элементов последовательности $\{\varphi_\nu(Z)\}$ возьмем функции $1, z^1, z^2, \cdots, z^n$, тогда в любой точке $Z_0 \in D$ кривизна Риччи по направлению произвольного вектора $U = (u^1 \cdots u^n)$ равна $n+1$.

Следствие 2. Если в качестве элементов последовательности $\{\varphi_\nu(Z)\}$ возьмем функции $1, z^1, z^2, \cdots, z^n, z^i \cdot z^j$ $(1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n)$, тогда в любой точке $Z_0 \in D$ кривизна Риччи по направлению произвольного вектора $U = (u^1 \cdots u^n)$ меньше $n+1$.

Московский институт электронного машиностроения
Поступило 17.V.1967

Վ. Վ. ՅՈՒՐԱՇԵՎ

ՌԻՉԻԻ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹՅԱՆ ԿՈՐՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ ՈՐՈՇՎԱԾ ՀՈԼՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋՈՑՈՎ $D \subset C^n$ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Դիտարկվում է Ռիչիի երկրաչափության կորության գնահատական, որոշված կամայական $D \subset C^n$ տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիաների հաջորդականության օգնությամբ։

Դիտարկված մետրիկայի մասնավոր դեպքը հանդիսանում է Բերգմանի մետրիկան։ Այդ դեպքում հեղինակի կողմից ստացված գնահատականը համընկնում է Բ. Ա. Ֆուքսի կողմից ստացված գնահատականի հետ։

V. V. YURASHEY

ON THE RICCI CURVATURE OF THE GEOMETRY DEFINED IN A DOMAIN $D \subset C^n$ WITH THE AID OF A SYSTEM OF ANALYTIC FUNCTIONS

S u m m a r y

The estimation of the Ricci curvature of the geometry defined in an arbitrary domain $D \subset C^n$ with the aid of a system of analytic functions is considered.

The Bergman metric is a particular case of the metric in question. For this case the estimation obtained by the author coincides with that obtained by Fuchs.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. А. Фукс.* Специальные главы теории аналитических функций многих комплексных переменных, М., Гос. изд. ф.-м. лит., 1963.
2. *Б. А. Фукс.* О кривизне Риччи бергмановой метрики, инвариантной при биголоморфных отображениях, ДАН, 167, № 3, 1966, 996—999.
3. *Б. А. Фукс.* Uber geodäsische Manigtaltigkeiten einer invarianten Geometrie, Матем. сб., 2, 1937, 567—594.
4. *Хуа-Ло-Кэн.* On the Rimannian curvature in the space of several variables, Schrift Forschungsinst, Math. 1, 1957, 245—263.