

Ю. Ф. ПЯТАК

# О ГЛАДКОСТИ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ АНАЛОГОВ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

Рассмотрим в комплексной плоскости конечную односвязную область  $D$ , ограниченную контуром Ляпунова  $\Gamma$  с показателем  $\alpha$ .  $0 < \alpha < 1$  (т. е.  $D \in A_\alpha$ ; [3], гл. 1, § 1), и пусть  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ . На границе  $\Gamma$  задана функция  $\varphi(t)$ , относительно которой мы предполагаем, что  $\varphi(t) \in C_\alpha^0(\Gamma)$ , т. е.

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < S |t_1 - t_2|^\alpha, \quad t_1, t_2 \in \Gamma, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1)$$

Пусть ( $n \geq 0$ )

$$M_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left( \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - z} dt, \quad (2)$$

$$\xi + i\eta = t \in \Gamma, \quad x + iy = z \in D$$

и

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{(y - \eta)^n \varphi(t)}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^{n+1}} dt, \quad \text{Im } \lambda_j \neq 0. \quad (3)$$

Поскольку  $\varphi(t) \in C_\alpha^0(\Gamma)$ ,  $M_n(z, \varphi)$  и  $P_n(x, y; \varphi)$  определимы в каждой точке области  $D$ . Под  $M_n(t_0, \varphi)$ , когда  $t_0 \in \Gamma$ , будем понимать граничное значение этой функции (если оно существует) в точке  $t_0$ , когда  $z \rightarrow t_0$  из  $D$ . Аналогично определяется  $P_n(t_0, \varphi)$  при  $t_0 \in \Gamma$ .

Основной результат статьи заключается в доказательстве того факта, что  $M_n(z, \varphi) \in C_\alpha^0(\bar{D})$ ,  $P_n(x, y; \varphi) \in C_\alpha^0(\bar{D})$ .

Ввиду того, что  $D \in A_\alpha^1$ , внутренняя нормаль к  $\Gamma$  меняется непрерывно, когда  $t \in \Gamma$  пробегает весь контур. Более того, в  $D$  можно выделить такую окрестность  $\Gamma$  ширины  $\varepsilon = \varepsilon(\Gamma)$ , что каждая точка  $z \in D$  в этой окрестности будет лежать на одной и только одной нормали, проходящей через нормальную проекцию точки  $z$  на  $\Gamma$  (мы называем нормальной проекцией точки  $z \in D$  на  $\Gamma$  точку  $z' \in \Gamma$  такую, что нормаль, проводимая в точке  $z'$ , проходит через  $z$ ). Обозначим эту  $\varepsilon$ -окрестность через  $D'$ , причем  $D'$  не содержит  $\Gamma$ .

Очевидно, в  $D - (D' \cup \Gamma)$  функции (2) и (3) сколь угодно много раз дифференцируемы, и поэтому не вызывает сомнений, что при любом  $n$

$$M_n(z, \varphi) \in C_2^0(D - (D' \cup \Gamma)), P_n(x, y; \varphi) \in C_\alpha^0(D - (D' \cup \Gamma)). \quad (4)$$

Остается доказать это свойство для области  $D' \cup \Gamma \equiv \bar{D}'$ .

### § 1. Случай $n = 1$

Используя сделанное предположение относительно гладкости  $\Gamma$ , можно без труда показать, что для любых двух точек  $z_1$  и  $z_2$  из  $D'$  справедливо следующее неравенство:

$$|z_2' - z_1'| \leq A(\Gamma) |z_2 - z_1|; \quad (1.1)$$

здесь  $A(\Gamma)$  — постоянная, зависящая только от вида контура  $\Gamma$ ,  $z_1' \in \Gamma$ ,  $z_2' \in \Gamma$  — нормальные проекции точек  $z_1$  и  $z_2$ .

Интеграл

$$M_1(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \cdot \frac{\varphi(t)}{t - z} dt, \quad z \in D' \quad (2.1)$$

представим в виде

$$\begin{aligned} M_1(z, \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(z')}{t - z} + \frac{\varphi(z')}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \frac{dt}{t - z} \equiv \\ &\equiv \Psi_1(z, \varphi) + \varphi(z') J_1(z). \end{aligned} \quad (3.1)$$

В (3.1) введены следующие обозначения:  $z'$  — нормальная проекция точки  $z$  на  $\Gamma$  (это обозначение для нормальной проекции сохраняется всюду в дальнейшем), причем, в силу выбора области  $D'$ ,  $z'$  является однозначной функцией  $z$  в  $D'$ ,

$$\Psi_1(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(z')}{t - z} dt, \quad (4.1)$$

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \cdot \frac{dt}{t - z}. \quad (5.1)$$

Используя (1) и (1.1) получаем, что

$$|\varphi(z_2') - \varphi(z_1')| \leq B(\Gamma) |z_2 - z_1|^\alpha, \quad (6.1)$$

т. е.  $\varphi(z'(z)) \in C_\alpha^0(\bar{D}')$ .

Что же касается  $J_1(z)$ , то для  $z \in D'$  имеем

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \frac{dt}{t - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t}}{(t - z)^2} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\bar{t}')^2}{t - z} dt.$$

Но  $\frac{d\bar{t}}{dt} \in C_\alpha^0(\Gamma)$ , ибо  $D \in A_\alpha^1$ , поэтому на основании теории инте-

грала типа Коши, развитой в [1], можно утверждать, что

$$J_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \cdot \frac{dt}{t - z} \in C_a^0(\bar{D}'). \quad (7.1)$$

Из (6.1) и (7.1) следует, что

$$\varphi(z'(z)) \cdot J_1(z) \in C_a^0(\bar{D}'). \quad (8.1)$$

Остается доказать это утверждение для  $\Psi_1(z, \varphi)$ .

Предварительно сделаем следующее замечание. Легко видеть, что функция

$$\varphi_1(t, z') = \frac{\bar{t} - \bar{z}'}{t - z'} [\varphi(t) - \varphi(z')] \in C_a^0(\Gamma) \text{ по } t \text{ из,}$$

если  $\varphi(t) \in C_a^0(\Gamma)$ . В этом случае, ввиду регулярности (4.1), вспоминая (8.1), получим, что

$$M_1(t_0, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \cdot \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \in C_a^0(\Gamma), \quad t_0 \in \Gamma, \quad (9.1)$$

причем

$$\Psi_1(t_0, \varphi) = \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \in \Gamma \\ z \in D'}} \Psi_1(z, \varphi)$$

равномерно относительно положения  $t_0$  на  $\Gamma$  ( $t_0$  — произвольная точка на  $\Gamma$ ).

Докажем теперь, что

$$|\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| < C |z_2 - z_1|^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (10.1)$$

где  $C$  — постоянная. Рассмотрим случай, когда контур  $\Gamma$  содержит прямолинейный участок, границами которого являются точки  $R_1$  и  $R_2$  ( $R_1 < R_2$ ). Тогда, в соответствии с определением, мы можем взять в качестве части  $D'$ , соответствующей этому прямолинейному участку, множество тех точек  $z \in D$ , нормальные проекции которых удовлетворяют неравенству ( $\delta$  — достаточно малое фиксированное число)  $R_1 + \delta < z' < R_2 - \delta$ .

Ниже мы докажем справедливость (10.1) в окрестности выделенного прямолинейного участка, а затем обобщим это утверждение на случай, когда  $D \in A_a'$  — произвольный гладкий контур.

Выше мы уже установили, что  $J_1(z) \in C_a^0(\bar{D})$ . Поэтому

$$\max_{z \in \bar{D}'} |J_1(z)| < \infty.$$

Так как

$$\begin{aligned} |\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{t - z_2} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(z_2')}{t - z_2} dt - \int_{\Gamma} \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{t - z_1} \times \right. \\ &\times \left. \frac{\varphi(t) - \varphi(z_1')}{t - z_1} dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{(t - z_1)^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| + \end{aligned}$$

$$+ |\varphi(z_2') - \varphi(z_1')| \cdot \max_{z_1 \in D'} |f_1(z_1)| < C_2(\Gamma) |z_2 - z_1|^2 + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{(t - z_1)^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right|, \quad (11.1)$$

то (10.1) будет доказано, если мы убедимся, что

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{t - z_2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{t - z_1} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| < C_3 |z_2 - z_1|^2. \quad (12.1)$$

1. Пусть  $z_2 \in D'$ ,  $z_1 \equiv z_2' \in \Gamma$ . Преобразуем выражение  $\frac{1}{(t - z_2')^2}$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(t - z_2')^2} &= \frac{1}{(t - z_2 + z_2 - z_2')^2} = \frac{1}{(t - z_2)^2} \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{z_2 - z_2'}{t - z_2}\right)^2} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{(t - z_2)^2} \left[ 1 + \frac{2 - \frac{z_2' - z_2}{t - z_2}}{\left(1 - \frac{z_2 - z_2'}{t - z_2}\right)^2} \cdot \frac{z_2' - z_2}{t - z_2} \right]. \end{aligned} \quad (13.1)$$

Пусть теперь  $\gamma_1$  — все те точки  $\Gamma$ , для которых

$$|t - z_2'| < l |z_2 - z_2'|, \quad (14.1)$$

а  $\gamma_2$  — точки  $\Gamma$ , для которых

$$|t - z_2'| \geq l |z_2 - z_2'|. \quad (15.1)$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \left| \int_{\Gamma} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_2'}{(t - z_2')^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| \leq \\ &< \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_2'}{(t - z_2')^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_2} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_2'}{(t - z_2')^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right|. \end{aligned} \quad (16.1)$$

Если выполняется (15.1) ( $l$  — фиксированное число,  $1 < l < \infty$ ), то для любых  $z_2 \in \bar{D}'$  и  $z_2' \in \Gamma$

$$|t - z_2|^2 = |t - z_2'|^2 + |z_2 - z_2'|^2 \geq |t - z_2'|^2, \quad (17.1)$$

$$\left| \frac{z_2 - z_2'}{t - z_2} \right|^2 \leq \left| \frac{z_2 - z_2'}{t - z_2'} \right|^2 \leq \frac{1}{l^2} < 1.$$

Поэтому, ввиду (13.1)

$$\left| \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_2'}{(t - z_2')^2} \right| \leq \frac{|z_2 - z_2'|}{|t - z_2|^2} + \frac{|t - z_2'| \cdot |z_2 - z_2'|}{|t - z_2|^3} Q, \quad (18.1)$$

где, как легко проверить,  $Q = \frac{3l^2}{(l-1)^2} < \infty$ .

Из оценок (17.1) и (18.1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_2'}{(t - z_2')^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| &\leq \frac{|z_2 - z_2'|}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|\varphi(t) - \varphi(z_2')|}{|t - z_2|^2} |dt| + \\ + \frac{Q |z_2 - z_2'|}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|t - z_2'| |\varphi(t) - \varphi(z_2')|}{|t - z_2|^3} |dt| &< A \frac{|z_2 - z_2'|}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|t - z_2'|^\alpha}{|t - z_2|^3} d|t - z_2'| + \\ + A Q \frac{|z_2 - z_2'|}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|t - z_2'|^\alpha}{|t - z_2|^3} d|t - z_2'|; \end{aligned} \quad (19.1)$$

вводя новую переменную  $\lambda = |t - z_2|$  и обозначая через  $N$  интеграл по криволинейной части контура  $\Gamma$ , который является ограниченной величиной, продолжаем оценивать (19.1):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_2'}{(t - z_2')^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| &< - \frac{2A(1+Q)}{\pi(1-\alpha)} |z_2 - z_2'| \int_{|z_2 - z_2'|}^R d\lambda^{\alpha-1} + \\ + |z_2 - z_2'| \frac{N}{2\pi} &< |z_2 - z_2'| \frac{N}{2\pi} + \frac{2A(1+Q)}{\pi(1-\alpha)} |z_2 - z_2'| \cdot \left\{ \frac{1}{l^{1-\alpha} |z_2 - z_2'|^{1-\alpha}} - \frac{1}{R^{1-\alpha}} \right\} = \\ = \frac{|z_2 - z_2'|}{2\pi} \left\{ \frac{4A(1+Q)}{(1-\alpha)l^{1-\alpha}} - |z_2 - z_2'|^{1-\alpha} \left( \frac{1}{R^{1-\alpha}} - N \right) \right\} &< C_4 |z_2 - z_2'|^\alpha. \end{aligned} \quad (20.1)$$

Если же  $|t - z_2'| < l |z_2 - z_2'|$ , то  $|t - z_2|^2 = |t - z_2'|^2 + |z_2 - z_2'|^2 > > |z_2 - z_2'|^2$ .  
Откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_1} \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_2'}{(t - z_2')^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|\varphi(t) - \varphi(z_2')|}{|t - z_2|} |dt| + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{|\varphi(t) - \varphi(z_2')|}{|t - z_2|} |dt| &< 4A \int_0^{|z_2 - z_2'|} \frac{d\lambda}{\lambda^{1-\alpha}} \leq 4Al^\alpha |z_2 - z_2'|^\alpha < C_3 |z_2 - z_2'|^\alpha. \end{aligned} \quad (21.1)$$

Из полученных оценок (20.1) и (21.1) следует справедливость (12.1); поэтому, в силу (19.1),

$$|\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| < C |z_2 - z_2'|^\alpha = C |z_2 - z_1|^\alpha. \quad (22.1)$$

Если же  $z_1 \in \Gamma$  не совпадает с нормальной проекцией точки  $z_2$  на  $\Gamma$ , то  
 $|\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| \leq |\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_2', \varphi)| + |\Psi_1(z_2', \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)|. \quad (23.1)$

Для первого слагаемого в правой части (23.1) справедливо (22.1); для второго слагаемого аналогичное утверждение вытекает из (9.1).

Итак, справедливость (10.1) доказана в случае, когда  $z_1 \in \Gamma$ ,  $z_2 \in D'$ .

2. Пусть теперь  $z_1 \in D'$ ,  $z_2 \in D'$ . Как уже говорилось ранее, этим двум точкам соответствуют нормальные проекции  $z_1'$  и  $z_2'$ .

Пусть

$$h = \max \{|z_1 - z_1'|, |z_2 - z_2'|\} \quad (24.1)$$

(на рис. 1  $h = |z_2 - z_2'|$ ).

Возможны следующие случаи:

$$а) \quad |z_2 - z_1| > \frac{h}{k}, \quad (25.1)$$

$$б) \quad |z_2 - z_1| < \frac{h}{k}, \quad (26.1)$$

$k$  — фиксированное число,  $1 < k < \infty$ .

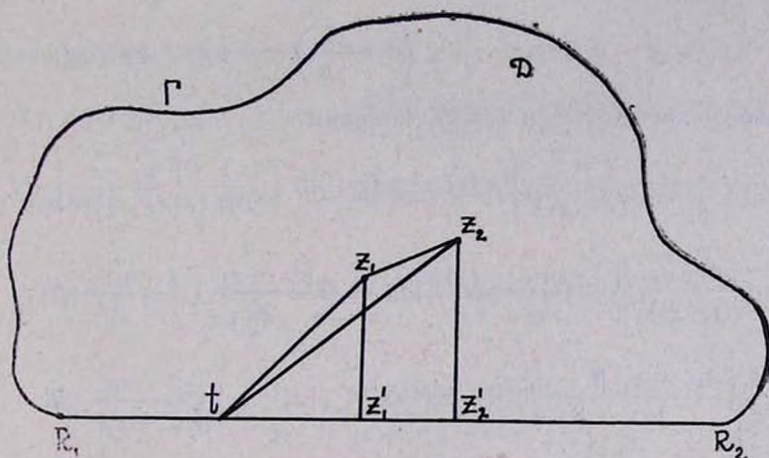


Рис. 1.

В случае а) неравенство (10.1) доказывается легко. Действительно, используя (22.1), получим

$$|\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| \leq |\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_2', \varphi)| + |\Psi_1(z_2', \varphi) - \Psi_1(z_1', \varphi)| + \\ + |\Psi_1(z_1', \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| \leq C|z_2 - z_2'|^2 + C|z_1 - z_1'|^2 + B|z_2' - z_1'|^2.$$

Воспользуемся (24.1), (25.1) и (1.1), имеем

$$|\Psi_1(z_2, \varphi) - \Psi_1(z_1, \varphi)| \leq 2Ch^2 + BA(\Gamma)|z_2 - z_1|^2 < C_6|z_2 - z_1|^2 \quad (27.1)$$

и (10.1) доказано. Рассмотрим случай б). Докажем справедливость (12.1). Из (26.1) следует, что

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{t - z_2} \right| < \frac{1}{k} < 1, \quad (28.1)$$

$$t \in \Gamma; \quad z_1, z_2 \in D'.$$

Повторю  $\frac{1}{(t - z_1)^2}$  можно преобразовать так же, как это было сдела-

но в (13.1), а именно

$$\frac{1}{(t-z_1)^2} = \frac{1}{(t-z_2)^2} \left[ 1 + \frac{2 - \frac{z_1 - z_2}{t - z_2}}{\left(1 - \frac{z_1 - z_2}{t - z_2}\right)^2} \cdot \frac{z_1 - z_2}{t - z_1} \right], \quad (29.1)$$

причем коэффициент при  $(z_1 - z_2)/(t - z_2)$  можно, ввиду (28.1), заменить константой  $L = \frac{3k^2}{(k-1)^2} < \infty$ .

С помощью (29.1) получаем

$$\left| \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{(t - z_1)^2} \right| \leq \left| \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} \right| + L |z_2 - z_1| \left| \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{(t - z_2)^2} \right|. \quad (30.1)$$

Замечая, что

$$|t - z_1| = |t - z_2 + z_2 - z_1| \leq \left(1 + \frac{1}{k}\right) |t - z_2| < 2 |t - z_2|, \quad (31.1)$$

воспользовавшись (30.1) и (31.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \left| \int \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{(t - z_1)^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \left\{ \int \left| \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} \right| + L |z_2 - \right. \\ &\quad \left. - z_1 \right| \left| \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{(t - z_2)^2} \right| |\varphi(t) - \varphi(z_2')| |dt| \leq A \frac{|z_2 - z_1|}{2\pi} \int \frac{|t - z_2'|^\alpha}{|t - z_2|^2} |dt| + \\ &\quad + \frac{AL}{2\pi} \int \frac{|z_2 - z_1| |t - z_1|}{|t - z_2|^2} |t - z_2'|^\alpha |dt| < \mu |z_2 - z_1| \int \frac{|t - z_2'|^\alpha}{|t - z_2|^2} |dt|. \end{aligned} \quad (32.1)$$

Так как, очевидно,  $|t - z_2'| < C_7 |t - z_2|$ , то

$$\int \frac{|t - z_2'|^\alpha}{|t - z_2|^2} |dt| \leq \frac{C_8}{|z_2 - z_2'|^{1-\alpha}}. \quad (33.1)$$

Из (26.1), (32.1) и (33.1) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int \left[ \frac{\bar{t} - \bar{z}_2}{(t - z_2)^2} - \frac{\bar{t} - \bar{z}_1}{(t - z_1)^2} \right] [\varphi(t) - \varphi(z_2')] dt \right| < C |z_2 - z_1|^\alpha, \quad (34.1)$$

т. е. соотношение (12.1). Ввиду (11.1) и (34.1) убеждаемся в справедливости (10.1).

Итак, мы доказали (10.1) в том случае, когда  $\Gamma$  содержит прямолинейный участок и только для таких точек  $z \in D'$ , нормальные проекции которых лежат строго внутри этого прямолинейного участка. При этом можно заметить, что константа Гельдера, входящая в (11.1), зависит, ввиду (1.1), только от вида контура  $\Gamma$  и не зависит от выбора точек  $z_1$  и  $z_2$  из  $D'$ . Пусть теперь  $\Gamma$  — произвольный контур ( $D \in A_z^1$ ), не обязательно содержащий прямолинейный участок. Выберем  $N = N(\Gamma)$

и разобьем  $\Gamma$  на  $N$  частей точками  $t_1, t_2, \dots, t_N$  таким образом, чтобы на каждом участке  $[t_j, t_{j+1}]$  ( $j = 1, 2, \dots, N-1$ ) значения функции  $t(s)$ , задающей контур  $\Gamma$ , мало отличались от прямой линии. Проводя в точках  $t_j$  нормали к  $\Gamma$  до пересечения с границей  $D'$ , мы тем самым разобьем область  $D' \cup \Gamma$  на  $N$  криволинейных четырехугольников. Для каждого из них, в силу построения и по определению области  $D'$ , мы можем аналогичными вышеприведенным рассуждениями доказать неравенство (10.1). Ввиду конечности  $N$  неравенство (10.1) справедливо в  $D' \cup \Gamma \equiv \bar{D}'$  с константой, зависящей от вида  $\Gamma$ .

Вспоминая (4) мы можем утверждать, что (10.1) справедливо во всей области  $\bar{D}$  и ввиду (8.1)  $M_1(z, \varphi) \in C_*^0(\bar{D})$ .

## § 2. Некоторые обобщения. Формулы Сохоцкого-Племеля

Рассмотрим теперь интеграл (2)

$$M_n(z, \varphi) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - z} dt = \Psi_n(z, \varphi) + \varphi(z') J_n(z). \quad (1.2)$$

Здесь введены следующие обозначения ( $z'$  — нормальная проекция  $z$  на  $\Gamma$ ):

$$\Psi_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t) - \varphi(z')}{t - z} dt, \quad (2.2)$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \right)^n \frac{dt}{t - z}. \quad (3.2)$$

Если воспользоваться обозначением (2.2), то нетрудно проверить, что

$$J_n(z) = \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)_{t=z'}^n + \sum_{k=0}^{n-1} \Psi_{n-1-k} \left( z, \frac{d\bar{t}}{dt} \right) \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)_{t=z'}^k. \quad (4.2)$$

Соотношения (1.2) и (4.2) дают нам возможность перенести утверждение § 1 на случай  $n > 1$ , ибо метод доказательства остается тем же самым. Сформулируем результат.

**Теорема 1.** Пусть  $\Gamma$  — гладкий замкнутый контур ( $D \in A_2^1$ ),  $\varphi(t) \in C_*^0(\Gamma)$ ,  $D$  — конечная односвязная часть плоскости, ограниченная  $\Gamma$ . Функция

$$M_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - z} dt \quad (n > 0) \quad (5.2)$$

принадлежит классу  $C_*^0(\bar{D})$  с константой Гельдера, зависящей от вида контура  $\Gamma$ ; под  $M_n(z_0, \varphi)$  при  $z_0 \in \Gamma$  понимается соответствующее граничное значение  $M_n^+(z_0, \varphi)$ .

Перейдем к рассмотрению интеграла (3). Пусть  $\zeta = (x + \lambda_j y)\zeta D$ ,  $\xi + \lambda_j \eta = \tau \in \Gamma$ ,  $\text{Im } \lambda_j \neq 0$ .

Разность  $y - \eta$ , фигурирующую в числителе (3), можно представить следующим образом:  $y - \eta = \frac{(\bar{\tau} - \bar{\zeta}) - (\tau - \zeta)}{\lambda_j - \bar{\lambda}_j}$ .

и поэтому ядро интеграла (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{(y - \eta)^n}{[\xi - x + \lambda_j (\eta - y)]^{n+1}} &= \frac{1}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \cdot \frac{[(\bar{\tau} - \bar{\zeta}) - (\tau - \zeta)]^n}{[\tau - \zeta]^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \cdot \frac{1}{\tau - \zeta} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left( \frac{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}{\tau - \zeta} \right)^{n-k}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Следовательно, (3) приводится к виду

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}{\tau - \zeta} \right)^{n-k} \frac{\varphi(t)}{\tau - \zeta} dt.$$

Если совершить теперь линейное преобразование координат

$$\begin{aligned} x + \lambda_j y &= X + iY \equiv Z, \\ \xi + \lambda_j \eta &= U + iV \equiv T, \end{aligned} \quad (7.2)$$

то, поскольку  $\text{Im } \lambda_j \neq 0$ , очевидно, что это линейное преобразование является неособенным и сохраняющим гладкость. Область  $D$  при этом перейдет в область  $\Omega$ , граница  $\Gamma$  — в некоторую кривую  $R$ , которая будет границей  $\Omega$ , причем  $R \in A_a^1$ . Ясно также, что (7.2) сохраняет прямые и углы между ними.

В таком случае

$$\begin{aligned} P_n(x, y; \varphi) &= \frac{1}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{\tau} - \bar{\zeta}}{\tau - \zeta} \right)^{n-k} \frac{\varphi(t)}{\tau - \zeta} dt = \\ &= \frac{1}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \int \left( \frac{\bar{T} - \bar{Z}}{T - Z} \right)^{n-k} \frac{\varphi_2(T)}{T - Z} \cdot \frac{dT}{dT} dT \equiv \\ &\equiv \frac{1}{(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k W_{n-k}(Z, \varphi), \end{aligned} \quad (8.2)$$

где  $\varphi_2(T) \equiv \varphi(t(T))$ , а через  $W_{n-k}(Z, \varphi)$  обозначен интеграл

$$W_{n-k}(Z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{T} - \bar{Z}}{T - Z} \right)^{n-k} \cdot \frac{\varphi_2(T)}{T - Z} \frac{dT}{dT} dT. \quad (9.2)$$

Функция  $dt/dT$ , ввиду предположенной гладкости контура  $\Gamma$  и сказанного относительно преобразования (7.2), принадлежит классу  $C_a^0(R)$ .

Используя (8.2), (9.2) и теорему 1, убеждаемся, что справедлива

**Теорема 2.** Пусть  $D$  — конечная односвязная часть плоскости, ограниченная гладким контуром  $D \in A_n^1$ ,  $\varphi(t) \in C_n^0(\Gamma)$ . Тогда функция

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^n \varphi(t)}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^{n+1}} dt$$

при  $n \geq 0$  принадлежит классу  $C_n^0(\bar{D})$ , причем под значениями этого интеграла в точках границы  $\Gamma$  следует понимать соответствующие граничные значения (предел изнутри области  $D$ ), которые мы будем обозначать  $P_n^+(\xi, \eta; \varphi)$ .

Из теорем 1 и 2 можно получить такое следствие: если  $D \in A_n^1$  и  $\varphi(t) \in C_n^0(\Gamma)$ , то интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - z}{t - z} \right)^n \varphi(t) dt, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^n \varphi(t)}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^n} dt$$

при  $n \geq 1$  принадлежат классу  $C_n^1(\bar{D})$ .

Докажем справедливость следующих соотношений:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \in \Gamma \\ z \in D}} M_n(z, \varphi) \equiv M_n^+(t_0, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt + \frac{\varphi(t_0)}{2} \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^n_{t=t_0}, \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \in \Gamma \\ z \in D}} P_n(x, y; \varphi) \equiv P_n^+(\xi_0, \eta_0; \varphi) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(y - \eta_0)^n \varphi(t)}{[\xi - \xi_0 + \lambda_j(\eta - \eta_0)]^{n+1}} dt + \\ &+ \frac{\varphi(t_0)}{2(\bar{\lambda}_j - \lambda_j)^n} \left( 1 - \frac{d\bar{T}}{dT} \right)^n \frac{dt}{dT} \Big|_{t=t_0}, \end{aligned} \quad (11.2)$$

где сингулярные интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Рассмотрим сначала (10.2). Ввиду (1.2) и (4.2)

$$M_n(z, \varphi) = \Psi_n(z, \varphi) + \varphi(t_0) \sum_{k=0}^n \Psi_{n-1-k} \left( z, \frac{d\bar{t}}{dt} \right) \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^k_{t=t_0} + \varphi(t_0) \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^n_{t=t_0}, \quad (12.2)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \in \Gamma \\ z \in D}} M_n(z, \varphi) &= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \sum_{k=0}^n \Psi_{n-1-k} \left( t_0, \frac{d\bar{t}}{dt} \right) \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^k_{t=t_0} + \\ &+ \varphi(t_0) \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^n_{t=t_0}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Главное же значение для  $M_n(t_0, \varphi)$ , как легко проверить, вычисляется по следующей рекуррентной формуле:

$$M_n(t_0, \varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\epsilon} \left( \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_z} \frac{(\bar{t} - \bar{t}_0)^n}{(t - t_0)^{n+1}} dt = \\
&= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \left[ -n \left( \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^n \right]_{\Gamma_z} + \left[ \left( \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^{n-1} \frac{d\bar{t}}{dt} dt \right]_{\Gamma_z} = \\
&= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) M_{n-1} \left( t_0, \frac{d\bar{t}}{dt} \right).
\end{aligned} \tag{14.2}$$

Применяя (14.2) к интегралам  $M_{n-k}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), получим следующую формулу для главного значения:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{t}_0}{t - t_0} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt &= \Psi_n(t_0, \varphi) + \varphi(t_0) \sum_{k=0}^n \Psi_{n-1-k} \left( t_0, \frac{d\bar{t}}{dt} \right) \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^k + \\
&+ \frac{\varphi(t_0)}{2} \left( \frac{d\bar{t}}{dt} \right)^n_{t=t_0}.
\end{aligned} \tag{15.2}$$

Внося (15.2) в (13.2), получаем (10.2).

Обращаясь к (11.2), мы замечаем из (8.2), что  $P_n(x, y; \varphi)$  есть линейная комбинация интегралов типа (2). Поэтому, используя (10.2) и производя суммирование, получаем (11.2).

Теоремы 1 и 2 о гладкости функций  $M_n(z, \varphi)$  и  $P_n(x, y; \varphi)$  ( $n \geq 1$ ) играют в теории эллиптических систем примерно такую же роль, (см. [4]), какую играет аналогичная теорема для интеграла типа Коши в теории эллиптических систем вида

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu = 0.$$

Настоящая заметка была написана по предложению Н. Е. Товмасыана. Автор искренне благодарит его за постоянное внимание и многочисленные советы.

Институт математики  
Сибирского отделения АН СССР

Поступило 4.II.1967

### Յ. Յ. ՊՅԱՏԱԿ

ՓԱԿ ՏԻՐՈՒՅԹՈՒՄ ԿՈՇՈՒ ՏԻՊԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼԻ  
ԱՆԱՎՈԳՆԵՐԻ ՈՂՈՐԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Ն Ն

Դիտարկենք վերջավոր միակապ  $D$  տիրույթը, սահմանափակված  $\Gamma \in A_1^1$  եզրագծով և նշանակենք  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ .  $\Gamma$  եզրագծի վրա տրված է  $\varphi(t) \in C_x^0(\Gamma)$  ֆունկցիան:

Դիցուք ( $n \geq 0$ )

$$M_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - z} dt,$$

$$t = \xi + i\eta \in \Gamma, \quad z = x + iy \in D,$$

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^n \varphi(t) dt}{[\xi - x + \lambda_j (\eta - y)]^{n+1}}, \quad \operatorname{Im} \lambda_j \neq 0.$$

Հոդվածում ասիմպտոտիկորեն, որ  $M_n(z, \varphi) \in C_{\alpha}^0(\bar{D})$ ,  $P_n(x, y; \varphi) \in C_{\alpha}^0(\bar{D})$  և բերված են բանաձևեր նշված ֆունկցիաների սահմանային արժեքների համար:

Yu. F. PJATAK

## A SMOOTHNESS IN THE CLOSED DOMAIN OF CAUCHY TYPE INTEGRAL ANALOGUES

### S u m m a r y

Consider a finite simply connected domain  $D$ , bounded by the curve  $\Gamma \in A_{\alpha}^1$  and denote  $\bar{D} = D \cup \Gamma$ .

For  $\varphi(t) \in C_{\alpha}^0(\Gamma)$  we introduce

$$M_n(z, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left( \frac{\bar{t} - \bar{z}}{t - z} \right)^n \frac{\varphi(t)}{t - z} dt,$$

$$t = (\xi + i\eta) \in \Gamma, \quad x + iy = z \in D,$$

$$P_n(x, y; \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^n \varphi(t)}{[\xi - x + \lambda_j (\eta - y)]^{n+1}} dt, \quad \operatorname{Im} \lambda_j \neq 0.$$

It is proved in the article, that  $M_n(z, \varphi) \in C_{\alpha}^0(\bar{D})$ ,  $P_n(x, y; \varphi) \in C_{\alpha}^0(\bar{D})$ . The formulae are presented for the above mentioned functions' boundary values.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Н. И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, Москва, 1962.
2. И. Н. Векуа. Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
3. А. В. Бицадзе. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, Москва, 1966.
4. Н. Е. Товмасян. Общая краевая задачи для эллиптических систем второго порядка с постоянными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, II, № 1 1966.