

Р. А. ШАХБАГЯН

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СВЕРТКАХ
С ПЕРЕМЕННЫМ СИМВОЛОМ

1°. В полупространстве $R_+^n = R^n(x; x_n > 0)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, рассмотрим интегральное уравнение вида

$$\mathfrak{M}u \equiv u(x) - \int_{R_+^n} K(x, x-y) u(y) dy = f(x), \quad x \in R_+^n. \quad (1)$$

Ядро $K(x, z)$ уравнения (1) предполагается гладким по x и принадлежащим пространству $L_1(R^n)$ по z при всех x (точная формулировка условий, налагаемых на функцию $K(x, z)$ приводится в п. 2°).

Теория интегральных уравнений вида (1) на полупрямой с ядрами, принадлежащими пространству $L_1(-\infty, +\infty)$ и зависящими только от разности аргументов, развита М. Г. Крейном в [1].

В работах [2], [3], [4] некоторые результаты, полученные в [1], перенесены на случай многомерных интегральных уравнений вида (1), рассматриваемых в полупространстве R_+^n , с ядрами, зависящими только от разности аргументов. Построение общей теории таких уравнений в известном смысле проще построения теории соответствующих одномерных уравнений, ибо, как выяснено*, при $n > 1$ индекс уравнения (1) равен нулю, если ядро его $K(z) \in L_1(R^n)$ подчинено некоторым естественным ограничениям.

Теория уравнений в свертках вида (1) в ограниченной области с положительно однородными по ξ символами $A(x, \xi)$ изложена в работе М. И. Вишика и Г. И. Эскина [5].

В настоящей заметке обобщаются результаты, полученные в [3], [4], относящиеся к интегральным уравнениям вида (1), а именно, при довольно естественных ограничениях, налагаемых на их ядра, доказывается, что оператор $\mathfrak{M}$, задаваемый левой частью уравнения (1), является Φ -оператором в пространстве $E(R_+^n)**$.

2°. Пусть ядро $K(x, z)$ уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) Существует неотрицательная функция $h(z)$, принадлежащая пространству $L_1(R^n)$, такая, что

$$|K(x, z)| \leq h(z) \quad (2)$$

для всех $x \in R_+^n$, $z \in R^n$;

* См. [2], [3].

** Определение пространства E будет дано ниже.

6) Ядро $K(x, z)$ непрерывно относительно x при любом z . Существует число $l > 0$ такое, что при $|x| > l$ $K(x, z) = K_0(z)^*$, где $K_0(z)$ — суммируемая в пространстве R^n функция, удовлетворяющая условию

$$\bar{K}_1(\xi) = 1 - \bar{K}_0(\xi) \neq 0 \text{ при всех } \xi \in \tilde{R}^n, \quad (3)$$

где через $\bar{K}_0(\xi)$ обозначено преобразование Фурье функции $K_0(z)$.

Тогда, как доказано в [3], справедлива

Теорема 1. Пусть ядро $K_0(z)$ уравнения

$$u(x) - \int_{R_+^n} K_0(x-y) u(y) dy = f(x) \quad (4)$$

удовлетворяет условию (3). Тогда при любой правой части $f(x) \in L_2(R_+^n)$ уравнение (4) имеет одно и только одно решение $u(x)$, принадлежащее пространству $L_2(R_+^n)$. Оператор, определяемый левой частью уравнения (4), осуществляет гомеоморфное отображение пространства $L_2(R_+^n)$ на себя.

Замечание. В формулировке теоремы 1 мы ограничились рассмотрением уравнения (4) в пространстве $L_2(R_+^n)$. Можно доказать, воспользовавшись результатом работы [2], существование и единственность решения уравнения (4) в ряде других функциональных пространств, а именно, в пространстве $E(R_+^n)$. Под $E(R_+^n)$ понимается одно из пространств:

$$L_p(R_+^n) (p > 1), C_0(R_+^n) \subset C(R_+^n) \subset M^u(R_+^n) \subset M^c(R_+^n) \subset M(R_+^n).$$

Перечисленные пространства определяются аналогично одномерному случаю [1] с естественными видоизменениями.

в) Функция $K(x, z)$ равномерно непрерывна относительно x в метрике пространства $L_1(R^n)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x \in S_l$ (S_l — шар $|x| < l$)

$$\int_{R^n} |K(x+h, z) - K(x, z)| dz < \varepsilon \text{ при } |h| < \delta; \quad (5)$$

г) Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\int_{R^n} |K(x, z+h) - K(x, z)| dz < \varepsilon \quad (6)$$

при всех $x \in S_l$, $|h| < \delta$.

* Вместо этого достаточно было бы считать, что существует $\lim_{|x| \rightarrow \infty} K(x, z) = K_0(z)$, причем разность $K(x, z) - K_0(z)$ стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ быстрее любой степени $|x|$.

Теорема 2. Пусть ядро $K(x, z)$ уравнения (1) удовлетворяет условиям а) — г). Тогда оператор $\mathfrak{M}$, действующий в пространстве $E(R_+^n)$, является Φ -оператором.

Доказательство. Для простоты приведем доказательство теоремы в случае пространства $L_2(R_+^n)$, после чего совершенно очевидным становится доказательство теоремы в случае пространства E . Воспользовавшись условием (2), легко доказать, что интеграл, входящий в левую часть уравнения (1), является ограниченным оператором, действующим в пространстве $L_2(R_+^n)$.

Перепишем уравнение (1) в следующем виде:

$$u(x) - \int_{R_+^n} [K(x, x-y) - K_0(x-y)] u(y) dy - \int_{R_+^n} K_0(x-y) u(y) dy = f(x), \quad x \in R_+^n. \quad (1^*)$$

Введем обозначения:

$$A_0 u(x) = \int_{R_+^n} K_0(x-y) u(y) dy, \\ A_1 u(x) = \int_{R_+^n} [K(x, x-y) - K_0(x-y)] u(y) dy.$$

Оператор $(E - A_0)$ (E — оператор тождественного преобразования), действующий в пространстве $L_2(R_+^n)$, в силу условия б) теоремы, обратим. Рассмотрим оператор

$$A_1 u = \int_{R_+^n} K_1(x, x-y) u(y) dy,$$

где $K_1(x, z) = K(x, z) - K_0(z)$. Очевидно, что $K_1(x, z) \equiv 0$ при $|x| > l$. Докажем полную непрерывность оператора A_1 . Установим сначала его ограниченность. Обозначим через $K_2(z) = \max_{x \in S_l} |K_1(x, z)|$.

Имеем

$$|A_1 u| \leq \int_{R^n} |K_2(x-y)| |u(y)| dy,$$

откуда, в силу неравенства Минковского, получим

$$\|A_1 u\|_{L_2(S_l)} \leq \|K_2\|_{L_1(R^n)} \|u\|_{L_2(R_+^n)}, \quad (7)$$

что свидетельствует о непрерывности оператора A_1 , как оператора, действующего из пространства $L_2(R_+^n)$ в пространство $L_2(S_l)$.

Рассмотрим ограниченное в $L_2(R_+^n)$ семейство функций $\{u(x)\}$

$$\|u\|_{L_2(R_+^n)} \leq M, \quad (8)$$

где M — некоторая константа, и докажем равномерную ограниченность и равностепенную непрерывность семейства $\{A_1 u\}$. Равномерная ограниченность этого семейства непосредственно вытекает из оценки (7). Для доказательства равностепенной непрерывности $\{A_1 u\}$ рассмотрим разность

$$\begin{aligned} v(x+h) - v(x) &= A_1 u(x+h) - A_1 u(x) = \\ &= \int_{R_+^n} [K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x-y)] u(y) dy. \end{aligned}$$

Преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\begin{aligned} v(x+h) - v(x) &= \int_{R_+^n} [K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x+h-y)] u(y) dy + \\ &+ \int_{R_+^n} [K_1(x, x+h-y) - K_1(x, x-y)] u(y) dy \equiv J_1(x) + J_2(x), \end{aligned} \quad (9)$$

$|x| < l$. Оценим первое слагаемое выражения (9).

Имеем

$$\begin{aligned} |J_1(x)| &\leq \int_{R^n} |K_1(x+h, x+h-y) - K_1(x, x+h-y)| |u(y)| dy = \\ &= \int_{R^n} |K_1(x+h, z) - K_1(x, z)| |u(x+h-z)| dz \leq \\ &\leq \int_{R^n} \max_{x \in S_l} \{|K_1(x+h, z) - K_1(x, z)|\} |u(x+h-z)| dz. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (10), учитывая условие (5) и неравенство (8), получаем оценку

$$\begin{aligned} \|J_1\|_{L_2(S_l)} &\leq \int_{R^n} \max_{x \in S_l} \{|K_1(x+h, z) - K_1(x, z)|\} \|u\|_{L_2(R_+^n)} dz < \\ &< \varepsilon \|u\|_{L_2(R_+^n)} \leq \varepsilon M \end{aligned} \quad (11)$$

при $|h| < \delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$; $\|u\|_{L_2(R_+^n)}$ — норма функции u в пространстве $L_2(R_+^n)$ по x . При выводе последнего неравенства мы воспользовались свойством инвариантности L_2 -нормы относительно сдвига.

Перейдем к оценке второго слагаемого выражения (9).

Имеем

$$\begin{aligned} |J_2(x)| &\leq \int_{R^n} |K_1(x, x+h-y) - K_1(x, x-y)| |u(y)| dy = \\ &= \int_{R^n} |K_1(x, z+h) - K_1(x, z)| |u(x-z)| dz \leq \\ &\leq \int_{R^n} \max_{x \in S_l} \{|K_1(x, z+h) - K_1(x, z)|\} |u(x-z)| dz. \end{aligned} \quad (12)$$

Воспользовавшись условием (6) и (8), получим из (12) аналогично предыдущему

$$\begin{aligned} \|J_2\|_{L_1(S_l)} &\leq \int_{R^n} \max_{x \in S_l} \{|K_1(x, z+h) - K_1(x, z)|\} \|u\|_{L_1(R_+^n)} dz < \\ &< \varepsilon \|u\|_{L_1(R_+^n)} \leq \varepsilon M \end{aligned} \quad (13)$$

при $|h| < \delta_2 = \delta_2(\varepsilon)$. Если теперь взять в качестве $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, то при $|h| < \delta = \delta(\varepsilon)$ из (11) и (13) окончательно получим

$$\|v(x+h) - v(x)\|_{L_1(S_l)} \leq 2\varepsilon M = \varepsilon_1,$$

что свидетельствует о том, что семейство функций $\{v(x) = A_1 u(x)\}$ равномерно непрерывно. Таким образом, мы доказали, что оператор $\mathfrak{M}$, действующий из пространства $L_2(R_+^n)$ в пространство $L_2(S_l)$, вполне непрерывен. Этим и завершается доказательство теоремы, поскольку мы получили представление оператора $\mathfrak{M}$ в виде суммы обратимого и вполне непрерывного операторов, откуда, согласно теореме И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [6], следует, что оператор $\mathfrak{M}$ является Φ -оператором. Теорема доказана.

Следствие. Индекс Φ -оператора $\mathfrak{M}$ равен нулю.

Случай $n=1$. Используя теорему М. Г. Крейна (см. [1], § 9) можно получить аналог теоремы 2. А именно, справедлива

Теорема 3. Пусть ядро $K(t, z)$ уравнения

$$x(t) - \int_0^t K(t, t-s) x(s) ds = f(t), \quad t \in (0, \infty) \quad (14)$$

удовлетворяет условиям теоремы 2, а функция $K_0(z) = K(t, z)$ при $t > l$ удовлетворяет дополнительно условиям

$$K_0(z) \in L_1(-\infty, \infty), \quad 1 - \tilde{K}_0(\lambda) \neq 0 \quad \text{при} \quad -\infty < \lambda < +\infty,$$

$$\nu = \text{ind}(1 - \tilde{K}_0(\lambda)) = \frac{1}{2\pi} [\arg(1 - \tilde{K}_0(\lambda))]_{-\infty}^{+\infty} \leq 0$$

($\tilde{K}_0(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $K_0(z)$).

Тогда оператор, определяемый левой частью уравнения (14), является Φ -оператором в пространстве $E(0, \infty)$ с индексом, равным $|v|$.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного
университета

Поступило 12.V.1967

Ռ. Լ. ՇԱԽԲԱԳՅԱՆ

ՇԱԼՔԻ ՏԻՊԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐ
ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՍԻՄՎՈԼՆԵՐՈՎ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածը նվիրված է ծալքի տիպի ինտեգրալ հավասարումների՝ մի բավականաչափ լայն դասի լուծման ուսումնասիրությանը:

Պարզվում է, որ բավական ընդհանուր պայմանների բավարարման դեպքում, ուսումնասիրվող հավասարումներին համապատասխանող օպերատորները հանդիսանում են նետերի տիպի օպերատորներ մի շարք ֆունկցիոնալ տարածություններում, որոնք բնական ձևով կապված են հավասարումների դիտարկվող դասի հետ:

R. L. SHAKHBAGIAN

INTEGRAL EQUATIONS IN CONVOLUTIONS WITH VARIABLE SYMBOL

S u m m a r y

The paper is devoted to the problem of so called normal solvability of a class of integral equations of convolution type with variable symbol.

For such equations under rather general assumptions imposed on their kernels, the noetherity of the corresponding operators in a number of functional spaces is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. М. Г. Крейн. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 5 (83), 1958, 3—120.
2. Л. С. Гольденштейн и И. Ц. Гохберг. О многомерном интегральном уравнении на полупространстве с ядром, зависящим от разности аргументов и его дискретном аналоге, ДАН СССР, 131, № 1, 1960, 9—12.
3. Р. Л. Шахбалян. Уравнения в свертках в полупространстве, Матем. сборник, 70 (112): 2, 1966, 266—296.
4. Р. Л. Шахбалян. Интегральные уравнения в полупространстве, Доклады АН Армянской ССР, XLII, № 1, 1966, 9—14.
5. М. И. Вишик и Г. И. Эскин. Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН, XIX, вып. 3 (123), 1965, 99—161.
6. И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, XIII, вып. 2 (80), 1958, 3—72.