ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 1, 1968 Математика

В. С. ЗАХАРЯН

РАДИАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ И РАДИАЛЬНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ $B_\alpha(z; z_k)$

1°. **Введение.** Пусть $\{z_k\}_1^\infty$, $(0<|z_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, пронумерованных в порядке неубывания их модулей.

Как хорошо известно, если

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty, \tag{1}$$

то бесконечное произведение Бляшке

$$B(z; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\cdot\frac{|z_k|}{z_k} \tag{2}$$

сходится в круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию обращающуюся в нуль на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$.

Известно также [1], что произведение Бляшке имеет предел

$$B(e^{i\vartheta}; z_k)=\lim_{r\to 1-0}B(re^{i\vartheta}; z_k),$$

если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|z_k|}{|e^{i\vartheta}-z_k|}<+\infty. \tag{3}$$

В работах [2, 3] М. М. *Джрбашяна* для каждого значения параметра α $(-1<\alpha<\infty)$ построена функция $B_\alpha(z; z_k)$, являющаяся естественным обобщением произведения Бляшке.

Пусть вместо (1) последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{4}$$

где $\alpha\in(-1, \infty)$ — фиксированное число. Тогда произведение $B_\alpha(z; z_k)$ имеет следующий вид:

$$B_\alpha(z; z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z; z_k)}, \tag{5}$$

где при $|z|<1$ и $|\zeta|<1$ положено

$$W_\alpha(z, \zeta) = \int_{|\zeta|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)} \Bigg\{ \zeta^{-k} \int_{0}^{|\zeta|} (1-x)^\alpha x^{k-1} dx -$$

$$- \bar{\zeta}^k \int_{|\zeta|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1} dx \Bigg\} z^k. \tag{6}$$

Произведение $B_\alpha(z;\ z_k)$ равномерно и абсолютно сходится в любом замкнутом круге $|z| \leqslant r < 1$ и $B_0(z;\ z_k) = B(z;\ z_k)$ [3].

В работах [4, 5], в частности, доказано, что для произведения $B_\alpha(z;\ z_k)$ при $-1<\alpha<0$ предел

$$\lim_{r \to 1-0} B_\alpha(re^{i\vartheta};\ z_k) = B_\alpha(e^{i\vartheta};\ z_k) \tag{7}$$

существует всюду, кроме, быть может, некоторого множества E, γ-емкость которого нуль, где $1+\alpha<\gamma<1$ — любое число.

В первом параграфе настоящей статьи доказывается, что при $-1<\alpha<0$ условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\vartheta}-z_k|} \right)^{1+\alpha} < +\infty \tag{8}$$

достаточно для того, чтобы в точке $e^{i\vartheta}$ существовал предел (7).

Говорят, что функция, голоморфная в открытом единичном круге D, имеет конечное сегментное изменение в точке $e^{i\vartheta}$, если посредством этой функции сегмент, соединяющий $e^{i\vartheta}$ с точкой, лежащей в D, отображается на спрямляемую кривую. Если радиус с концом в $e^{i\vartheta}$ отображается на спрямляемую кривую, то говорят, что функция имеет конечное радиальное изменение в точке $e^{i\vartheta}$.

Ясно, что в данной точке из конечности радиального изменения вытекает существование конечного радиального предела для данной функции в этой точке.

Во втором параграфе рассматривается вопрос о радиальном изменении произведения $B_\alpha(z;\ z_k)$.

Карго [6] показал, что, если выполняется условие (3), то в точке $e^{i\vartheta}$ произведение Бляшке $B(z;\ z_k)$ имеет конечное радиальное изменение, более того, $B(z;\ z_k)$ имеет конечное сегментное изменение [7].

В настоящей статье доказывается, что условие (8) достаточно также для того, чтобы в точке $e^{i\vartheta}$ произведение $B_\alpha(z;\ z_k)$ имело конечное радиальное изменение.

В работе [8] Рудиным было доказано, что, если последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|) \ln \frac{1}{1-|z_k|} < +\infty, \tag{9}$$

то произведение $B(z;\ z_k)$ имеет конечное радиальное изменение почти всюду на $[0, 2\pi]$.

В конце настоящей работы доказывается, что, если вместо (9) предположить сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty\quad(-1<\alpha<0),$$

то множество, где радиальное изменение произведения $B_\alpha(z;\,z_k)$ $(-1<\alpha<0)$ становится бесконечностью, имеет нулевую $(1+\alpha)$-емкость.

§ 1. Радиальные пределы произведения $B_\alpha(z;\,z_k)$ в данной точке

2°. Вспомогательные леммы. Приведем сперва следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $-1<\alpha<0$, $|\zeta|<1$ *и* $0\leqslant r<1$, *тогда, если*

$$J_\alpha^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{k}-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}|\zeta|^{-2k}\int_0^{|\zeta|^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right](r\bar{\zeta})^k,$$

то

$$|J_\alpha^{(1)}|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha},\tag{10}$$

*где c не зависит от r и ζ**.

Доказательство. Заметив, что

$$\int_0^1(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx=\frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k)}{\Gamma(1+\alpha+k)},$$

$J_\alpha^{(1)}$ можем записать в следующем виде:

$$J_\alpha^{(1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left[\int_0^1(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\right.$$

$$\left.-\int_0^1(1-|\zeta|^2x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right](r\bar{\zeta})^k.$$

В интеграле

$$\int_0^1[(1-x)^\alpha-(1-|\zeta|^2x)^\alpha]\,x^{k-1}\,dx$$

после замены $\dfrac{1-x}{1-|\zeta|^2x}=t$ получим

$$J_\alpha^{(1)}=(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\left(\frac{1-t}{1-|\zeta|^2t}\right)^k\frac{dt}{(1-|\zeta|^2t)^{1+\alpha}}(r\bar{\zeta})^k.$$

---

* Через c мы в дальнейшем будем обозначать абсолютные константы, не обязательно равные между собой.

В силу разложения

$$\frac{1}{(1-w)^{1+\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\,w^k,\quad |w|<1 \tag{11}$$

будем иметь

$$J_\alpha^{(1)}=(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{[1-|\zeta|^2t-(1-t)\,r\bar\zeta]^{1+\alpha}}-$$

$$-(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{(1-|\zeta|^2t)^{1+\alpha}}.$$

Так как

$$\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{(1-|\zeta|^2t)^{1+\alpha}}\leqslant\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{(1-t)^{1+\alpha}}<c,$$

то

$$|J_\alpha^{(1)}|\leqslant(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\int_0^1\frac{t^\alpha-1}{1-t}\,\frac{dt}{|1-r\bar\zeta-t\,(r-\zeta)\,\bar\zeta|^{1+\alpha}}+c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}. \tag{12}$$

Имеем также

$$|1-r\bar\zeta-t\,(r-\zeta)\bar\zeta|\geqslant|1-r\bar\zeta|-t\,|r-\zeta|\,|\zeta|\geqslant$$

$$\geqslant|1-r\bar\zeta|\cdot\left(1-t\left|\frac{r-\zeta}{1-r\bar\zeta}\right||\zeta|\right)\geqslant|1-r\bar\zeta|\,(1-t\,|\zeta|)\geqslant|1-r\bar\zeta|\,(1-t). \tag{13}$$

Подставив это неравенство в (12), получим

$$|J_\alpha^{(1)}|\leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}+c\,\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{14}$$

Заметим теперь, что

$$\left|r-\frac{1}{\bar\zeta}\right|\geqslant\left|1-\frac{1}{\bar\zeta}\right|-|r-1|\ \text{и}\ \left|r-\frac{1}{\bar\zeta}\right|\geqslant|r-1|,$$

следовательно

$$\left|r-\frac{1}{\bar\zeta}\right|\geqslant\frac{1}{2}\left|1-\frac{1}{\bar\zeta}\right|=\frac{1}{2}\,|1-\zeta|\cdot|\zeta|^{-1}. \tag{15}$$

Из неравенств (14) и (15) вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Пусть* $-1<\alpha<0$, $|\zeta|<1$ *и* $0\leqslant r<1$. *Обозначим*

$$J_\alpha^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\Bigg[\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx-$$

$$-\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int_{|\zeta|^2}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\Bigg]\,(r\bar\zeta)^k.$$

Тогда

$$|J_\alpha^{(2)}| \leqslant \frac{c}{|\zeta|^{1+\alpha}}\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{16}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int\limits_{|\zeta|^2}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx = \int\limits_{|\zeta|}^{1}\left(1-\frac{|\zeta|^2}{x}\right)^\alpha x^{-k-1}\,dx.$$

Теперь, если в интеграле

$$\int\limits_{|\zeta|}^{1}\left[(1-x)^\alpha-\left(1-\frac{|\zeta|^2}{x}\right)^\alpha\right]x^{-k-1}\,dx$$

сделаем замену переменной

$$\frac{1-x}{x-|\zeta|^2}=t,$$

то получим

$$J_\alpha^{(2)}=(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\int\limits_0^{1/|\zeta|}\left[t^\alpha-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^\alpha\right]\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^k\frac{dt}{(1+t)^{1+\alpha}}\,(r\bar\zeta)^k.$$

Снова используя разложение (11), имеем

$$|J_\alpha^{(2)}|\leqslant(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\int\limits_0^{1/|\zeta|}\left[t^\alpha-\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^\alpha\right]\left(\frac{1+t|\zeta|^2}{1+t}\right)^{1+\alpha}\times$$

$$\times\frac{dt}{|1-r\bar\zeta+t\bar\zeta\,(r-\zeta)|^{1+\alpha}}+c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}.$$

Отсюда так же, как и для $J_\alpha^{(1)}$, получается

$$|J_\alpha^{(2)}|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha}\int\limits_0^{1/|\zeta|}\frac{t^\alpha\,dt}{(1-t|\zeta|)^{1+\alpha}}+c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{17}$$

Для завершения доказательства леммы остается сослаться на неравенство (15).

3°. Теорема о радиальных пределах. Следующая теорема аналогична теореме Фростмана для произведений Бляшке и при $\alpha=0$ совпадает с ней.

Теорема 1. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{18}$$

то при $-1<\alpha<0$

$$\lim_{r\to 1-0} B_\alpha(re^{i\vartheta};\ z_k)=B_\alpha(e^{i\vartheta};\ z_k)$$

существует и конечен.

Доказательство. Так как

$$B_\alpha(re^{i\vartheta};\ z_k)=B_\alpha(r;\ z_k e^{-i\vartheta})$$

и

$$\frac{1-|z_k e^{-i\vartheta}|}{|1-z_k e^{-i\vartheta}|}=\frac{1-|z_k|}{|e^{i\vartheta}-z_k|},$$

то достаточно доказать теорему в том частном случае, когда $\vartheta=0$. Введем следующие обозначения:

$$b_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_\alpha(z;\zeta)} \tag{19}$$

и

$$J_\alpha(z;\ \zeta)=1-b_\alpha(z;\ \zeta).$$

В силу известного признака сходимости бесконечных произведений [6] для существования $\lim\limits_{r\to 1-0} B_\alpha(r;\ z_k)$ достаточно, чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}|J_\alpha(r;\ z_k)| \tag{20}$$

сходился равномерно относительно r в интервале $0\leqslant r\leqslant 1$.

Имеем

$$|J_\alpha(r;\ \zeta)|\leqslant|1-b_0(r;\zeta)|+|b_0(r;\ \zeta)-b_\alpha(r;\ \zeta)|. \tag{21}$$

Но так как $b_0(r;\zeta)=\dfrac{r-\zeta}{1-r\bar\zeta}\cdot\dfrac{|\zeta|}{\zeta}$, то

$$|1-b_0(r;\ \zeta)|\leqslant c\,\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}, \tag{22}$$

ввиду неравенства (15) (см. также [10], стр. 469).

Заметим теперь, что

$$|b_0(r;\ \zeta)-b_\alpha(r;\ \zeta)|\leqslant|b_0(r;\ \zeta)|\,|1-e^{W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)}|.$$

Но, как известно [4, 5], при $-1<\alpha<0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}\,[W_\alpha(r;\zeta)-W_0(r;\zeta)]\geqslant 0 \tag{23}$$

и, поскольку для $\operatorname{Re}\ z\geqslant 0$ имеем

$$|1-e^{-z}|\leqslant|z|,$$

то

$$|1-e^{W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)}|\leqslant|W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\ \zeta)|. \tag{24}$$

Поскольку

$$|b_0(r;\ \zeta)|\leqslant 1, \tag{25}$$

то

$$|b_0(r;\ \zeta)-b_\alpha(r;\ \zeta)|\leqslant|W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)|. \tag{26}$$

Из (6) вытекает, что

$$W_\alpha(r;\zeta)-W_0(r;\zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx-\sum_{k=1}^{\infty}\Big\{\frac{1}{k}-$$

$$-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\Big[\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int\limits_{0}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\Big]\Big\}(r\bar\zeta)^k=$$

$$=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx-J_\alpha^{(1)}-J_\alpha^{(2)}. \qquad (27)$$

Легко видеть, что

$$\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha-1}{x}\,dx\leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha}.$$

Тогда, применив леммы 1 и 2, получим

$$|W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \qquad (28)$$

Из неравенств (22), (28) и (26) следует

$$|J_\alpha(r;\zeta)|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \qquad (29)$$

В силу условия (18) теоремы (при $\vartheta=0$) и согласно неравенству (29), мы получим, что ряд (20) и, следовательно, произведение $B_\alpha(r;z_k)$ сходятся равномерно по r на отрезке $[0, 1]$, что и доказывает теорему.

Используя оценки (14) и (17), легко получить неравенство

$$|W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)|\leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-r\bar\zeta|}\right)^{1+\alpha}, \qquad (30)$$

которое в дальнейшем будет нами использовано.

§ 2. Радиальные изменения произведения $B_\alpha(z;z_k)$

4°. Вспомогательные леммы. Следующие три леммы нам понадобятся в дальнейшем, причем первая из них имеет и самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Пусть* $-1<\alpha<0$ *и* $|\zeta|<1$, *тогда*

$$J_\alpha=\int\limits_0^1\frac{dr}{|1-r\bar\zeta|^{2+\alpha}}<\frac{c_\alpha}{|1-\zeta|^{1+\alpha}}. \qquad (31)$$

Доказательство. Обозначим через $\eta=1-\frac{|1-\bar\zeta|}{2}$, $0<\eta<1$ и запишем интеграл J_α в следующем виде:

$$J_\alpha = \int_0^\eta \frac{dr}{|1 - r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}} + \int_\eta^1 \frac{dr}{|1 - r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}} = J_\alpha^{(1)} + J_\alpha^{(2)}.$$

Так как $|1 - r\bar{\zeta}| \geqslant 1 - r$, то для $J_\alpha^{(1)}$ получим

$$J_\alpha^{(1)} \leqslant \int_0^\eta \frac{dr}{(1 - r)^{2+\alpha}} \leqslant \frac{c_\alpha}{|1 - \bar{\zeta}|^{1+\alpha}}.$$

Для оценки $J_\alpha^{(2)}$ применим неравенство (15). Имеем

$$J_\alpha^{(2)} \leqslant c \int_\eta^1 \frac{dr}{|1 - \zeta|^{2+\alpha}} = c\, \frac{1 - \eta}{|1 - \bar{\zeta}|^{2+\alpha}} = \frac{c}{|1 - \bar{\zeta}|^{1+\alpha}}.$$

Оценки, полученные для $J_\alpha^{(1)}$, $J_\alpha^{(2)}$, доказывают неравенство (31).

Лемма 4. *Пусть* $-1 < \alpha < 0$, $|\zeta| < 1$ *и* $0 \leqslant r < 1$, *тогда, если*

$$A_\alpha^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[1 - \frac{\Gamma(1 + \alpha + k)}{\Gamma(1 + \alpha)\,\Gamma(k)} |\zeta|^{-2k} \int_0^{|\zeta|^2} (1 - x)^\alpha x^{k-1}\, dx \right] (r\bar{\zeta})^{k-1},$$

то

$$|A_\alpha^{(1)}| \leqslant \frac{c}{|\zeta|^{1+\alpha}} \frac{(1 - |\zeta|)^{1+\alpha}}{|1 - r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 1 мы можем $A_\alpha^{(1)}$ представить в следующем виде:

$$A_\alpha^{(1)} = (1 - |\zeta|^2)^{1+\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha + k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)} \times$$

$$\times \int_0^1 (t^\alpha - 1) \left(\frac{1 - t}{1 - t|\zeta|^2} \right)^{k-1} \frac{dt}{(1 - t|\zeta|^2)^{2+\alpha}} (r\bar{\zeta})^{k-1};$$

в силу разложения

$$\frac{1 + \alpha}{(1 - w)^{2+\alpha}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(1 + \alpha + k)}{\Gamma(1 + \alpha)\,\Gamma(k)} w^{k-1}, \quad |w| < 1, \tag{32}$$

будем иметь, что

$$A_\alpha^{(1)} = \frac{(1 - |\zeta|^2)^{1+\alpha}}{1 + \alpha} \int_0^1 (t^\alpha - 1) \frac{dt}{[1 - |\zeta|^2 t - r\bar{\zeta}(1 - t)]^{2+\alpha}}.$$

Используя неравенство (13), получим

$$|A_\alpha^{(1)}| \leqslant c\, \frac{(1 - |\zeta|)^{1+\alpha}}{|1 - r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}} \int_0^1 \frac{t^\alpha - 1}{(1 - t)^{2+\alpha}}\, dt \leqslant c\, \frac{(1 - |\zeta|)^{1+\alpha}}{|1 - r\bar{\zeta}|^{2+\alpha}}.$$

Лемма 5. Пусть $-1 < \alpha < 0$, $|\zeta| < 1$ и $0 \leqslant r < 1$, если

$$A_\alpha^{(2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k)}\left[\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-\alpha k-1}dx-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int_{|\zeta|^2}^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right](r\bar\zeta)^{k-1},$$

то

$$|A_\alpha^{(2)}|\leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar\zeta|^{2+\alpha}}.$$

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2, получим, что

$$A_\alpha^{(2)}=(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(k)}\int_0^{1/|\zeta|}\left[t^\alpha-\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^\alpha\right]\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^{k-1}\times$$

$$\times\frac{dt}{(1+t)^\alpha(1+t|\zeta|^2)}(r\bar\zeta)^{k-1}.$$

Еще раз используя разложение (32), получим

$$A_\alpha^{(2)}=\frac{(1-|\zeta|^2)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\int_0^{1/|\zeta|}\left[t^\alpha-\left(\frac{1+t}{1+t|\zeta|^2}\right)^\alpha\right]\frac{(1+t|\zeta|^2)^{1+\alpha}}{(1+t)^\alpha}\frac{dt}{[1-r\bar\zeta+t\bar\zeta(r-\zeta)]^{2+\alpha}}.$$

Отсюда, в силу неравенства (13), получим

$$|A_\alpha^{(2)}|\leqslant c\,\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\bar\zeta|^{2+\alpha}}\int_0^{1/|\zeta|}\left\{\left[\frac{1+t}{t(1+t|\zeta|^2)}\right]^\alpha-1\right\}\frac{t^\alpha\,dt}{(1-t|\zeta|)^{2+\alpha}}.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что последний интеграл сходится.

5°. **Радиальное изменение в данной точке.** Теперь докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\vartheta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{33}$$

то в точке $e^{i\vartheta}$ *произведение* $B_\alpha(z;\,z_k)$ *при* $-1<\alpha<0$ *имеет конечное радиальное изменение.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 1, не нарушая общности, мы можем считать, что $\vartheta=0$.

Согласно обозначению (19) имеем

$$B_\alpha(z;\,z_k)=\prod_{k=1}^{\infty}b_\alpha(z;\,z_k).$$

Тогда, вычислив логарифмическую производную произведения $B_\alpha(z;\,z_k)$, получим

$$B_\alpha'(z;\,z_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_\alpha'(z;\,z_k)}{b_\alpha(z;\,z_k)}B_\alpha(z;\,z_m).$$

Так как при $-1<\alpha<0$ имеем [4, 5]

$$|B_\alpha(z;\ z_m)|<|B_0(z;\ z_m)|\leqslant 1,$$

то

$$|B'_\alpha(z;\ z_k)|\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|b'_\alpha(z;\ z_k)| \tag{34}$$

для всех z из единичного круга.

Теперь, обозначая через $V(f;\ \vartheta)$ радиальное изменение функции $f(z)$ в точке $e^{i\vartheta}$, а именно

$$V(f,\vartheta)=\int_0^1|f'(re^{i\vartheta})|\,dr,$$

получим

$$V(B_\alpha,\ 0)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1|b'_\alpha(r;\ z_k)|\,dr. \tag{35}$$

Оценим следующий интеграл:

$$\int_0^1|b'_\alpha(r;\ \zeta|\,dr=K_\alpha.$$

Имеем

$$K_\alpha\leqslant\int_0^1|b'_0(r;\zeta)|\,dr+\int_0^1|b'_\alpha(r;\ \zeta)-b'_0(r;\ \zeta)|\,dr=K_\alpha^{(1)}+K_\alpha^{(2)}. \tag{36}$$

Так как $b_0(z;\ z_k)$ — дробно-линейная функция, которая отображает единичный круг на себя, то ясно, что

$$K_\alpha^{(1)}\leqslant\frac{\pi}{2}|b_0(0;\ \zeta)-b_0(1;\ \zeta)|=\frac{\pi}{2}(1+|\zeta|)\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\leqslant\pi\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}. \tag{37}$$

Для оценки $K_\alpha^{(2)}$ заметим, что

$$b_\alpha(r;\ \zeta)-b_0(r;\ \zeta)=b_0(r;\ \zeta)\left[e^{W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)}-1\right]$$

и, следовательно,

$$b'_\alpha(r;\ \zeta)-b'_0(r;\zeta)=b'_0(r;\ \zeta)\left[e^{W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)}-1\right]+$$
$$+b_0(r;\ \zeta)\,e^{W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)}\left[W'_0(r;\ \zeta)-W'_\alpha(r;\zeta)\right].$$

Согласно (23), (24) и (25) получим

$$|b'_\alpha(r;\ \zeta)-b'_0(r;\zeta)|\leqslant|W_0(r;\zeta)-W_\alpha(r;\zeta)|\,|b'_0(r;\zeta)|+|W'_0(r;\ \zeta)-W'_\alpha(r;\zeta)|. \tag{38}$$

Таким образом, имеет место оценка

$$K_\alpha^{(2)}\leqslant\int_0^1|W_0(r;\zeta)-W(r;\zeta)|\,|b'_0(r;\zeta)|\,dr+$$
$$+\int_0^1|W'_0(r;\zeta)-W'_\alpha(r;\zeta)|\,dr=\overline{K}_\alpha^{(2)}+\widetilde{K}_\alpha^{(2)}. \tag{39}$$

Имея в виду неравенства (28) и (37), получим

$$\overline{K}_{\alpha}^{(2)} \leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{2+\alpha}. \tag{40}$$

Для оценки $\widetilde{K}_{\alpha}^{(2)}$ заметим, что из (27) следует

$$W_{\alpha}'(r;\zeta)-W_0'(r;\zeta)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k}-\frac{\Gamma(1+\zeta+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left[\frac{1}{|\zeta|^{2k}}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}\,dx-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}\,dx\right]\right\}kr^{k-1}\overline{\zeta}^{k}=-\overline{\zeta}A_{\alpha}^{(1)}-\overline{\zeta}A_{\alpha}^{(2)}.$$

Согласно леммам 4 и 5 имеем

$$|W_{\alpha}'(r;\zeta)-W_0'(r;\zeta)|\leqslant c\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\overline{\zeta}|^{2+\alpha}}. \tag{41}$$

Теперь на основании леммы 3 получим оценку

$$\widetilde{K}_{\alpha}^{(2)} \leqslant c\left(\frac{1-|\zeta|}{|1-\zeta|}\right)^{1+\alpha}. \tag{42}$$

Из неравенств (36)—(39), согласно (35), следует утверждение теоремы.

Заметим, что, так как

$$b_0'(r;\zeta)=\frac{|\zeta|\,(|\zeta|^2-1)}{|\zeta|\,(1-r\overline{\zeta})^2}, \tag{43}$$

то из (38), в силу (30) и (41), следует

$$|b_{\alpha}'(r;\zeta)-b_0'(r;\zeta)|\leqslant c\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{|1-r\overline{\zeta}|^{2+\alpha}}. \tag{44}$$

6°. **Радиальное изменение на единичной окружности.** Пусть множество $E\subset[0,2\pi]$, измеримое по Борелю, имеет положительную $(1+\alpha)$-емкость $(-1<\alpha<0)$. Это означает, что существует такое неотрицательное распределение μ, сосредоточенное на E, а именно

$$\int_0^{2\pi}d\mu=\int_E d\mu=1,$$

что интеграл

$$U_{\alpha}(x;r)=\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(t)}{|1-re^{i(x-t)}|^{1+\alpha}}$$

остается равномерно ограниченным по x при $r\to 1-0$ [11]:

$$\sup_{0<r<1}\{\max_{0<x<2\pi}U_{\alpha}(x;r)\}<+\infty. \tag{45}$$

Теорема 3. *Пусть множество* $E\subset[0,2\pi]$ *имеет положительную* $(1+\alpha)$*-емкость* $(-1<\alpha<0)$ и μ*—такое распределение на* E, *что выполняется условие* (45). *Тогда,* если

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1-|z_k|} < +\infty, \tag{46}$$

то

$$\int_0^{2\pi} V(B_\alpha;\ \vartheta)\, d\mu(\vartheta) < \infty. \tag{47}$$

Доказательство. Из неравенства

$$|b_\alpha'(z;\ \zeta)| \leqslant |b_0'(z;\ \zeta)| + |b_0'(z;\zeta) - b_\alpha'(z;\ \zeta)|$$

имеем

$$\int_0^1\int_0^{2\pi} |b_\alpha'(re^{i\vartheta};\ \zeta)|\, dr d\mu(\vartheta) \leqslant \int_0^1\int_0^{2\pi} |b_0'(re^{i\vartheta};\ \zeta)|\, dr d\mu(\vartheta) +$$

$$+ \int_0^1\int_0^{2\pi} |b_0'(re^{i\vartheta};\ \zeta) - b_\alpha'(re^{i\vartheta};\ \zeta)|\, dr d\mu(\vartheta) = A_1 + A_2. \tag{48}$$

Согласно (43) для $\zeta = |\zeta|\, e^{i\varphi}$ имеем

$$A_1 \leqslant (1-|\zeta|) \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{dr d\mu(\vartheta)}{|1-r|\zeta|\, e^{i(\vartheta-\varphi)}|^2} \leqslant$$

$$\leqslant (1-|\zeta|)^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{dr}{1-r|\zeta|} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1-r|\zeta|\, e^{i(\vartheta-\varphi)}|^{1+\alpha}}.$$

Отсюда, используя условие (45), получим

$$A_1 \leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1-|\zeta|}. \tag{49}$$

Для оценки A_2 используем оценку (44). Тогда

$$A_2 \leqslant (1-|\zeta|)^{1+\alpha} \int_0^1 \frac{dr}{1-r|\zeta|} \int_0^{2\pi} \frac{d\mu(\vartheta)}{|1-r|\zeta|\, e^{i(\vartheta-\varphi)}|^{1+\alpha}}$$

и, в силу (45), получим

$$A_2 \leqslant c\,(1-|\zeta|)^{1+\alpha} \ln \frac{1}{1-|\zeta|}. \tag{50}$$

Так как согласно (34)

$$V(B_\alpha;\ \vartheta) = \int_0^1 |B_\alpha'(re^{i\vartheta};\ z_k)|\, dr \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 |b_\alpha'(re^{i\vartheta};\ z_k)|\, dr,$$

то из (49) и (50), в силу неравенства (48) и условия (46) теоремы, получим доказательство неравенства (47).

Заметим, что из теоремы 3 следует, что при условии (46) произведение $B_\alpha(z;\ z_k)$ всюду на $[0,\ 2\pi]$ имеет конечное радиальное изменение, кроме, может быть, некоторого исключительного множества E, $(1+\alpha)$-емкость которого—нуль.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 23.V.1967

Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

$B_z(z;\ z_k)$ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼԻ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՍԱՀՄԱՆԸ ԵՎ ՇԱՌԱՎՂԱՅԻՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ապացուցված է, որ եթե $\{z_k\}_1^{\infty}$ հաջորդականությունը բավարարում է հետևյալ պայմանին

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_k|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

ապա $B_\alpha(z;\ z_k)$ արտադրյալի շառավղային սահմանը և շառավղային փոփոխությունը $e^{i\theta}$ կետում վերջավոր է։

Ցույց է տրված նաև, որ եթե

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

ապա, ամենուրեք $[0,\ 2\pi]$ հատվածի վրա, բացի գուցե մի բազմությունից, որի $(1+\alpha)$-ունակությունը զերո է, $B_\alpha(z;\ z_k)$ արտադրյալը ունի վերջավոր շառավղային փոփոխություն։

V. S. ZAKARIAN

RADIAL LIMITS AND RADIAL VARIATIONS OF $B_\alpha(z;\ z_k)$ PRODUCTS

S u m m a r y

It is proved in the paper, that if the sequence $\{z_k\}_1^{\infty}$ satisfied the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z|}{|e^{i\theta}-z_k|}\right)^{1+\alpha}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

then the radial limit and the radial variance of the product $B_\alpha(z;z_k)$ at the point $e^{i\theta}$ are both finite.

It is proved also, that under the condition

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}\ln\frac{1}{1-|z_k|}<+\infty,\ -1<\alpha\leqslant 0,$$

the $B_\alpha(z;\ z_k)$ product has finite variance in every point of $[0,\ 2\pi]$, except, may be, of a set whose $(1+\alpha)$ capacity is equal zero.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Otto Frostman*. Sur les produits de Blaschke, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, vol. 12, 1942, 169—182.
2. *М. М. Джрбашян*. О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
3. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966.
4. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян* О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.
5. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян*. Граничные свойства мероморфных функций класса N_α, Изв. АН АрмССР, Математика, 2, № 5, 1967, 275—294.
6. *G. T. Cargo*. The radial images of Blaschke products, The Journal of the London Mathematical Society, vol. 36, 1961, 424—430.
7. *G. T. Cargo*. The segmental variation of Blaschke products, Duke Mathematical Journal, vol. 30, 1963, 143—149.
8. *W. Rudin*. The radial variation of analytic functions, Duke Mathematical Journal, vol. 22, 1955, 235—242.
9. *А. И. Маркушевич*. Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.
10. *О. А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, том 1, М., 1965.
11. *Н. Бари*. Тригонометрические ряды, М., 1961.