ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 3, № 1, 1968 Математика

С. Н. СЛУГИН

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫЕ АНАЛОГИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Здесь строятся топологические полуупорядоченные аналоги некоторых функциональных пространств. Факты из теории линейных топологических пространств используются в терминах [1]; из теории полуупорядоченных пространств—в терминах [2].

§ 1. КТ-линеал. Распространение нормальной топологии на К-пополнение

1. Множество V называется нормальным в К-линеале X, если из соотношений $|x| \leqslant |y|$, $y \in V$ следует $x \in V$. Из нормальности следует уравновешенность [1]. Под сходимостью направления [2] $x_a \to x$ понимается сходимость топологическая. Фундаментальная система окрестностей нуля называется базисом.

Определение 1. Базис, состоящий из нормальных] окрестностей, называем *нормальным.*

Определение 2. Отделимое линейное топологическое пространство, являющееся К-линеалом и обладающее нормальным базисом, назовем КТ-*линеалом.*

Топологию КТ-линеала называем нормальной.

КТ-линеал обладает основными свойствами KN-линеала. В частности, он—архимедов К-линеал. Структурные операции топологически непрерывны. Из структурной ограниченности множества следует его топологическая ограниченность.

2. Нормальная топология КТ-линеала распространяется на его К-пополнение.

Теорема 1. *К-пополнение Y КТ-линеала X с нормальным базисом $\{V\}$ является КТ-линеалом с нормальным базисом $\{O\}$, где $y \in O$, если существует элемент $x \geqslant |y|$, $x \in V$. При этом*

$$V = O \cap X. \tag{1}$$

Для любого элемента y К-пополнения Y найдется элемент $x \in X$, $x \geqslant |y|$. Элемент x линейного топологического пространства X поглощается любой окрестностью V нуля: $x \in \lambda V$ при $|\lambda| \geqslant \lambda_V$. По определению множества $O = O_V$ элемент $y \in \lambda O$ при этих λ, то есть O—поглощающее.

Для множества O_0, определенного через V_0 (из данного базиса), возьмем окрестность V такую, что алгебраическая сумма $V+V\subset V_0$. Тогда $O+O\subset O_0$.

Нормальность O очевидна.

Отделимость. Для элемента $y\neq 0$ K-пополнения Y имеется элемент $z\in X$, $0<z\leqslant|y|$. Для элемента $z\neq 0$ отделимого пространства X есть окрестность V нуля такая, что $z\bar{\in}V$. Если бы $y\in O$, то, по определению окрестности O, должен существовать элемент $x\in V$, $x>|y|$. Но тогда $0<z\leqslant x\in V$, $z\in V$ вследствие нормальности V; противоречие; следовательно $y\bar{\in}O$.

Равенство (1) следует из нормальности V.

§ 2. Аналог пространства измеримых функций. Непрерывное погружение КТ-линеала

1. Пусть в базе I K-пространства Z с единицей 1 имеется система множеств $\Gamma\subset I$, удовлетворяющая условиям:

(Г1) *Для любых* Γ_i *существует* $\Gamma\subset\Gamma_1\cap\Gamma_2$.

(Г2) *Для каждого* Γ_0 *имеется* Γ *такое, что, если* $e_i\in\Gamma$, *то* $e_1 ve_2\in\Gamma_0$.

(Г3) Γ *нормально содержатся в* I.

(Г4) $\bigcap\Gamma=\{0\}$.

Обозначим через $e[z]$ след положительной части элемента $|z|-1$ и определим множество

$$W_\Gamma=\{z\colon\ e[z]\in\Gamma\}.$$

Теорема 2. *Если элементы какого-либо фундамента Y K-пространства Z поглощаются множествами W_Γ, то Y является КТ-линеалом с нормальным базисом $\{Y\cap\varepsilon W_\Gamma\}$, где числа $\varepsilon\in(0, 1]$. Можно считать, что Y содержит подлинеал ограниченных элементов K-пространства Z.*

Если $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_i$, $\Gamma\subset\bigcap\limits_i\Gamma_i$, то $\varepsilon W_\Gamma\subset\bigcap\limits_i\varepsilon_i W_{\Gamma_i}$ $(i=1, 2)$.

Пользуясь условием (Г2), покажем, что

$$\frac{1}{2}W_\Gamma+\frac{1}{2}W_\Gamma\subset W_{\Gamma_0}. \tag{2}$$

Пусть z, $u\in\dfrac{1}{2}W_\Gamma$, то есть следы $e[2z]$, $e[2u]\in\Gamma$. Тогда

$$e[z+u]\leqslant e[2|z|\vee 2|u|]\leqslant e[2z]\vee e[2u]\in\Gamma_0.$$

По условию (Г3) след $e[z+u]\in\Gamma_0$, элемент $z+u\in W_{\Gamma_0}$, включение (2) верно.

Из условия (Г3) и определения множества W_Γ следует его нормальность.

Отделимость. Пусть элемент $z\in\bigcap\varepsilon W_\Gamma$, тогда следы $e[nz]\in\Gamma$ при всех Γ и n. По условию (Г4) $e[nz]=0$, $z=0$.

Отметим, что всеми установленными здесь свойствами обладает не только система $\{\varepsilon W_\Gamma\}$, но и $\{Y_0 \cap \varepsilon W_\Gamma\}$ для любого фундамента Y_0. А так как элементы $y \in Y$, по условию, поглощаются множествами W_Γ, то Y является КТ-линеалом с указанным базисом.

След $e[1] = 0 \in \Gamma$ по условию (Г4), поэтому W_Γ поглощает любой элемент вида $\lambda 1$, а в силу нормальности W_Γ—и любой ограниченный элемент z_0 в Z. Ясно, что W_Γ поглощает любые элементы z, удовлетворяющие неравенству $|z| \leqslant |y| + |z_0|$. Но такие элементы составляют фундамент, поэтому можно полагать, что подлинеал ограниченных элементов $Z_0 \subset Y$.

Теорема 3. *База I является топологическим подпространством КТ-линеала Y. Ее топология определяется системой множеств $\Gamma = I \cap \varepsilon W_\Gamma$. Сходимость направления $e_\alpha \to e$ в I означает, что симметричная разность $e_\alpha Ce + eCe_\alpha \in \Gamma$ при $\alpha \geqslant \alpha_\Gamma$.*

Здесь обозначено $Ce = 1 - e$, $ee_0 = e \wedge e_0$. Докажем топологическую замкнутость базы. Если $e_\alpha \in I$, $e_\alpha \to y$, то $0 = e_\alpha Ce_\alpha \to y \wedge (1-y)$ вследствие непрерывности структурных соотношений в КТ-линеале Y. Поэтому $y \wedge (1-y) = 0$, $y \in I$. Если $e_\alpha \to e$, то $e_\alpha Ce + eCe_\alpha = |e_\alpha - e| \to 0$ по той же причине.

Теорема 4. *Для того чтобы некоторый нормальный подлинеал Y, содержащий единицу К-пространства Z, был КТ-линеалом с базисом $\{Y \cap \varepsilon W_\Gamma\}$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$(RI)\ \textit{Если } e_n \in I,\ e_n > e_{n+1} \xrightarrow{(r)} 0 \textit{ в } Y, \textit{ то } e_n \to 0 \textit{ в } I.$$

Необходимость очевидна. Для проверки достаточности построим последовательность следов $e_n = e\left[\frac{y}{n}\right] \leqslant \frac{y}{n}$. Тогда $e_n > e_{n+1} \xrightarrow{(r)} 0$ в Y, $e_n \in \Gamma$ при некотором n по условию (RI). Поэтому $y \in nW_\Gamma \subset \lambda W_\Gamma$ при $|\lambda| \geqslant n$, окрестности W_Γ поглощают элементы из Y. Применяем теорему 2.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие*

$$(AI)\ \textit{если } e_n \downarrow 0, \textit{ то } e_n \to 0.$$

Тогда Z является КТ-линеалом с нормальным базисом $\{\varepsilon W_\Gamma\}$. Действительно, из условия (AI) следует условие (RI) для $Y = Z$.

Теорема 5 верна, в частности, для расширенного К-пространства (универсального полуполя [3]) Z.

Сходимость в КТ-линеале Z с базисом $\{\varepsilon W_\Gamma\}$ в случае $Z = S$ означает сходимость по мере, поэтому построенная здесь топология является обобщением топологии пространства измеримых функций.

2. Эквивалентную топологию можно задать системой окрестностей W_Γ (см. [3]). Условие (AI) или (RI) для $Y = Z$ слабее данного в аксиоме 6; здесь не использована также аксиома 8 ([3], стр. 52). Кроме того, при построении топологии в Y после погружения КТ-линеала X в Z (см. ниже п. 4) постулат (AI) не потребуется.

3. Системой окрестностей W_Γ можно задать аналогичную топологию в фундаменте более общего объекта—архимедова К-линеала с единицей, (b)-полного в смысле [4, 5].

В таком К-линеале вводятся [5] абстрактные функции, порожденные непрерывными функциями нескольких переменных. Можно доказать, что такая функция топологически непрерывна вблизи (топологически) тех точек, где она имеет смысл.

4. Покажем, что произвольный КТ-линеал можно топологически непрерывно погрузить в некоторый КТ-линеал Y с указанным выше базисом.

КТ-линеал X с нормальным базисом $\{V\}$, по теореме 1, топологически гомеоморфно погружается в свое К-пополнение X_0, являющееся КТ-линеалом с нормальным базисом $\{O\}$. В базе I максимального расширения Z К-пространства X_0 определим множества $\Gamma = O \cap I$. Тогда выполняются все условия (Г1—4). В частности, условие (Г2) следует из непрерывности структурных соотношений в КТ-линеале X_0. Так как множество $W_\Gamma \supset O$, то оно поглощает любой элемент линейного топологического пространства X_0 и, следовательно, любой элемент фундамента

$$Y = \{z\colon z \in Z,\ |z| \leqslant |x_0| + |z_0|,\ x_0 \in X_0,\ z_0 \in Z_0\},$$

где Z_0— подлинеал ограниченных элементов в Z (см. доказательство теоремы 2). Из включений

$$X \subset X_0 \subset Y,\ V \subset O \subset Y \cap W_\Gamma$$

следует

Теорема 6. *Любой КТ-линеал топологически непрерывно погружается в некоторый КТ-линеал Y с базисом* $\{Y \cap \varepsilon W_\Gamma\}$. Ясно, что топологии, индуцированные в $X \cap I$ из КТ-линеалов X и Y, совпадают.

5. Можно показать, что условие, выставленное в аксиоме 8 [3], не только достаточно, но и необходимо для топологической непрерывности обратного отображения КТ-линеала X с базисом $\{X \cap \varepsilon W_\Gamma\}$ в КТ-линеал X с базисом $\{V\}$.

§ 3. Аналог линеала Орлича

1. Теперь X—а. п. н. К-линеал, то есть архимедов внутренне-нормальный (b)-полный в смысле [5] К-линеал с ф. с. е. э.—фундаментальной системой единичных элементов $\{e_\nu\}$.

Отметим, что топологически счетно-полный КТ-линеал (b)-полон в указанном смысле. Действительно, (b)-пополнение (в этом смысле) дает часть топологического счетного пополнения, поскольку из такой (b)-сходимости следует топологическая.

Как известно, частными случаями а. п. н. К-линеала являются K_δ-пространство с единицей и произвольное К-пространство.

А. п. н. К-линеал X является [5] фундаментом некоторого К-линеала Z с единицей, реализуемого К-линеалом всех непрерывных функций, допускающих бесконечные значения на нигде не плотных подмножествах.

В дальнейшем $\varphi(u)$ означает числовую неотрицательную непрерывную функцию, определенную на всей числовой оси, четную, неубывающую при $u>0$, для которой имеется такое число k, что

$$(\Delta_2) \quad \varphi(2u) \leqslant k\varphi(u).$$

При наличии в К-линеале X единицы Δ_2-условие [6] выставляем лишь для достаточно больших u.

В Z имеют смысл [5] абстрактные функции φ, порожденные непрерывными функциями; x, $\varphi(x) \in Z$.

Для подмножеств $A \subset X$ образуем (ср. [7]) множества

$$A_\varphi = \{x\colon x \in Z,\ \varphi(x) \in A\}.$$

Теорема 7. *X_φ является нормальным подлинеалом в Z и, следовательно, К-линеалом.*

Пусть $x \in Z$, $|x| \leqslant |y|$, $y \in X_\varphi$. Тогда

$$0 \leqslant \varphi(|x|) \leqslant \varphi(|y|) = \varphi(y) \in X,\ \varphi(x) = \varphi(|x|) \in X,$$

так как X нормально в Z. По определению, $x \in X_\varphi$; X_φ нормально в Z.

Если $x \in X_\varphi$, то $\lambda x \in X_\varphi$, так как по Δ_2-условию при всех u $\varphi(\lambda x) \leqslant k^n \varphi(x)$ для $|\lambda| \leqslant 2^n$, $k^n\varphi(x) \in X$, $\varphi(\lambda x) \in X$. Если же Δ_2-условие выполняется лишь при $u \geqslant u_0 > 0$ и в X есть единица 1, то, обозначая

$$w = |x| \vee u_0\, 1, \tag{3}$$

находим, что для $|\lambda| \leqslant 2^n$, $\varphi(\lambda x) = \varphi(|\lambda x|) \leqslant \varphi(|\lambda|\, w) \leqslant k^n \varphi(w) \in X$, так как

$$\varphi(u_0 1) = \varphi(u_0)\, 1 \in X,$$

$$\varphi(w) = \varphi(x) \vee \varphi(u_0 1) \in X.$$

Если $x, y \in X_\varphi$, то $|x| \vee |y| \in X_\varphi$, $x + y \in X_\varphi$:

$$\varphi(|x| \vee |y|) = \varphi(x) \vee \varphi(y) \in X;$$

$$\varphi(x+y) \leqslant \varphi(2|x| \vee 2|y|) \in X,\ \varphi(x+y) \in X.$$

Соотношение $\lambda x + y \in X_\varphi$ указывает, что X_φ—подлинеал. Теорема 7 доказана.

Пусть X, кроме того, —КТ-линеал с нормальным базисом $\{V\}$, функция $\varphi(u) > 0$ при $u > 0$ и существует такое число $l < 1$, что

$$\varphi(u) \leqslant l\varphi(2u).$$

При наличии в а. п. н. К-линеале X единицы последнее требование выставляем лишь для достаточно больших u.

Теорема 8. *X_φ—КТ-линеал с нормальным базисом $\{V_\varphi\}$.*

Ясно, что множества V_φ нормальны и для любой их пары найдется третье, содержащееся в их пересечении.

Покажем, что V_φ—поглощающее. Пусть $x \in X_\varphi$. Элемент $\varphi(x)$ линейного топологического пространства X поглощается любой окрестностью V, $\varphi(x) \in l^{-n}\, V$ при некотором n. По условию (4)

$$\varphi(2^{-n}x)\leqslant l^n\varphi(x),\quad x\in 2^n V_\varphi.$$

Если же (4) имеет место лишь при $u\geqslant u_0>0$ и в X есть единица 1, то, применяя обозначение (3), для $x\in X_\varphi$ находим $\varphi(w)\in X$, $\varphi(w)\in l^{-m}V$ при некотором m,

$$\varphi(2^{-m}w)\leqslant l^m\varphi(w)\in V,\ w\in 2^m V_\varphi,\ x\in 2^m V_\varphi.$$

Докажем теперь существование для множества V_φ^0 такого множества V_φ, что $V_\varphi+V_\varphi\subset V_\varphi^0$. В КТ-линеале структурные соотношения непрерывны, поэтому для любой окрестности V^0 имеется такая окрестность V, что, если $z,t\in V$, то $k(z\vee t)\in v^0$. Пусть $x, y\in v_\varphi$, тогда элементы $z=\varphi(x)$, $t=\varphi(y)\in V$, $\varphi(x+y)\leqslant k(z\vee t)\in V^0$, $x+y\in V_\varphi^0$.

Отделимость. Если $x\neq 0$, то $\varphi(x)\neq 0$, существует окрестность V нуля в отделимом пространстве X такая, что $\varphi(x)\bar{\in} V$, $x\bar{\in} V_\varphi$. Теорема 8 доказана.

Пусть, кроме того, φ строго возрастает и $\varphi(0)=0$, $\varphi(\infty)=\infty$.

Теорема 9. *КТ-линеалы X и X_φ топологически гомеоморфны, $\varphi(X_\varphi)=X$, $\varphi(V_\varphi)=V$. К-линеал X_φ является фундаментом в Z с той же ф. с. е. э. Если X—К-пространство, то X_φ тоже К-пространство.*

В этих условиях преобразование φ обратимо.

Так как $\varphi(e)=\varphi(1)e$, то система $\{e_\nu\}$ остается ф. с. е. э. и в X_φ.

Если X — К-пространство и в X_φ $0\leqslant x_\xi<x$, то в X $0\leqslant\psi(x_\xi)\leqslant\leqslant\psi(x)$ (где $\psi=\varphi^{-1}$), существует $v=\sup\psi(x_\xi)\in X$. Очевидно $\varphi(v)=\sup x_\xi\in X_\varphi$.

2. Примером такой функции $\varphi(u)$ является N-функция [6], удовлетворяющая Δ_2-условию. Частным случаем КТ-линеала X_φ является пространство X_M, построенное в [7] и, в частности, *линейный класс Орлича* [6].

3. Взяв $\varphi(u)=|u|^p$ (где $p>0$), строим КТ-линеал

$$X_p=\{x\colon x\in Z,\ |x|^p\in X\},\ V_p=\{x\colon x\in Z,\ |x|^p\in V\}.$$

КВ-пространство X_p определено в [7].

§ 4. Аналог пространства L_p

1. Введем топологический полуупорядоченный аналог пространства L_p, где $p>0$.

Определение 3. Пусть нормальный базис $\{V\}$ КТ-линеала X удовлетворяет условию: если $x, y>0$, $x+y\in V$, то имеются такие числа λ, $\mu>0$, что

$$x\in\lambda V,\ y\in\mu V,\ \lambda^p+\mu^p=1.$$

Тогда будем говорить, что X удовлетворяет условию (L_p).

Теорема 10. *Топологически ограниченно-полный КТ-линеал, удовлетворяющий условию (L_p), является К-пространством.*

Пусть $0\leqslant x_\xi\leqslant x_0$. Составим возрастающее направление граней всевозможных конечных наборов $y_\alpha=\sup x_{\xi_i}$, где множество A индексов частично упорядочено по включению. Тогда $0 \leqslant y_\alpha \leqslant x_0$. Докажем существование грани $\sup y_\alpha \in X$ (которая, очевидно, и будет гранью $\sup x_\xi$).

Введем функционалы

$$N_V(x) = \inf \{|\lambda|^p: \quad x \in \lambda V\}.$$

При фиксированной V числовое возрастающее направление $N_V(y_\alpha)$ ограничено сверху числом $N_V(x_0)$ и, следовательно, сходится в себе. По условию (L_p) при $\beta \geqslant \alpha$, $\beta \in A$

$$N_V(y_\beta - y_\alpha) \leqslant N_V(y_\beta) - N_V(y_\alpha) \to 0,$$

направление $y_\beta - y_\alpha \to 0$ по множеству A^2 при $\beta \geqslant \alpha$ и, следовательно, по множеству A^2 независимых пар индексов. Но множество элементов y_α топологически ограничено, пространство X топологически ограниченно-полно, существует $\lim y_\alpha = y$. Переходя в КТ-линеале X к пределу в неравенствах $y_\alpha \leqslant y_\beta \leqslant x_0$ при $\alpha \leqslant \beta$ по множеству A индексов β, находим, что $y_\alpha \leqslant y \leqslant x_0$, то есть $y = \sup y_\alpha$. Теорема 10 доказана.

2. Остановимся вкратце на локально выпуклом случае.

Определение 4. Окрестность V называем p-выпуклой, если из соотношений

$$x, y \in V, \ |\lambda|^p + |\mu|^p = 1$$

следует $\lambda x + \mu y \in V$.

Можно показать, что, если выполнены условия теоремы 10 и определения 4, то X локально выпукло и реализуется пространством функций, суммируемых в p-ой степени на некотором экстремальном бикомпакте [2] с абстрактной мерой. Доказательство можно провести, например, привлекая пространство X_r (см. § 3, п. 3), где $pr = 1$, и теоремы 9, 10. В нормированном случае получаем пространство L_p, мера числовая.

Горьковский государственный
университет

Поступило 26.II.1967

Ս. Ն. ՍԼՈՒԳԻՆ

ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼ ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՏՈՊՈԼՈԳԻԱԿԱՆ ԿԻՍԱԿԱՐԳԱՎՈՐՎԱԾ ԱՆԱԼՈԳՆԵՐԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Կառուցված են Օրլիչի լինեալի և չափելի ու հանրագումարելի ֆունկցիաների տարածությունների տոպոլոգիական կիսակարգավորված անալոգներ։

S. N. SLUGUIN

TOPOLOGICAL LATTICE ANALOGS OF FUNCTIONAL SPACES

S u m m a r y

The topological lattice analogs of spaces of measurable and summerable functions and Orlich's lineal are constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., Физматгиз, 1959.
2. *Б. З. Вулих.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
3. *М. Я. Антоновский, В. Г. Болтянский, Т. А. Сарымсаков.* Топологические алгебры Буля, Ташкент, Издан. АН УзбССР, 1963.
4. *М. Г. Крейн, С. Г. Крейн.* Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном множестве, ДАН СССР, 27, № 5, 1940.
5. *Б. З. Вулих.* Некоторые вопросы теории линейных полуупорядоченных множеств, ИАН СССР, серия матем., 17, № 4, 1953.
6. *М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий.* Выпуклые функции и пространства Орлича, М., Физматгиз, 1958.
7. *Г. Я. Лозановский.* О рефлексивных пространствах, обобщающих рефлексивные пространства Орлича, ДАН СССР, 163, № 3, 1965.