ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 3, № 1, 1968 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН и А. Б. НЕРСЕСЯН

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ И ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Операция интегирования произвольного порядка была введена в анализ Риманом и Лиувиллем. Обращение интегрального уравнения Абеля естественным образом привело к понятию производной произвольного, вообще говоря не целого, порядка.

В дальнейшем эти понятия нашли важное применение в различных вопросах анализа, причем неоднократно замечалось, что ряд свойств и приложений обычных операций интегрирования и дифференцирования присущ также соответствующим операциям дробного порядка.

Понятие дробного интегро-дифференцирования нашло ряд новых применений в некоторых работах авторов данной статьи.

Например, в работе [1] была установлена формула типа Тейлора-Маклорена для разложения функции по, вообще говоря, не целым степеням аргумента $\{x^{\lambda_k}\}_0^\infty$. В этой формуле коэффициенты естественным образом выражаются как значения дробных производных функций соответствующего порядка. Это позволило установить критерий разложимости функции, заданной на полуоси $[\Delta, +\infty)$, в ряд Дирихле по системе функций $\{e^{-\lambda_k x}\}_0^\infty$.

Другое, более глубокое свойство операторов дробного интегродифференцирования было выявлено в связи с построением теории интегральных преобразований в комплексной области с ядрами Миттаг-Леффлера. Теория этих преобразований, обобщающая теорию Фурье-Планшереля в комплексной области, была построена чисто аналитическим путем [2], [3].

Однако в дальнейшем оказалось, что она может быть трактована как теория спектрального разложения по собственным функциям сингулярной краевой задачи на полуоси $(0, +\infty)$ для специального дифференциального оператора дробного порядка. Более того, в работе [4] авторам удалось построить дискретный аналог теории—обобщение рядов Фурье в качестве разложения по собственным функциям краевой задачи, уже на конечном отрезке $(0, l)$, для того же специального дифференциального оператора дробного порядка.

Наконец, в недавних работах одного из авторов [3] оператор Римана-Лиувилля нашел другое, существенно новое, приложение — в теории мероморфных функций. Пользуясь этими операторами, удалось полностью описать и установить структурное представление классов мероморфных в единичном круге функций, в частности, охватывающих мероморфные функции любого конечного порядка. Таким образом, была обобщена известная теорема Р. Неванлинна о представлении мероморфных функций с ограниченной характеристикой.

Во всех указанных выше работах понадобился ряд свойств операторов Римана-Лиувилля, частью ранее известный, а в остальном установленный авторами этой статьи. Отметим, что большинство этих свойств было изложено в главе 9 монографии [3], посвященной представлениям мероморфных функций.

Настоящей работой авторы начинают публикацию результатов своих исследований, посвященных краевым задачам для дифференциальных операторов дробного порядка.

В § 1 предлагаемой статьи приводится систематическое изложение ряда основных свойств операторов Римана-Лиувилля, необходимых в последующем.

На эти свойства существенно использованы в § 2, посвященном задаче типа Коши для линейных дифференциальных операторов дробного порядка. Здесь ставится аналог задачи Коши и с помощью нескольких вспомогательных лемм доказывается основная теорема 3 о существовании и единственности задачи в классе функций $L_1(0, l)$.

В заключительном § 3 сначала приводится одно уточнение теоремы 3, касающееся достаточных условий существования решения той же задачи в классе функций $L_p(0, l)$ $(p > 1)$. Наконец, в заключение приводится важный пример дифференциального оператора дробного порядка, для которого решение задачи типа Коши пишется в явной форме как линейная комбинация от функций типа Миттаг-Леффлера $E_\rho(z, \mu)$.

§ 1. Интегральные и дифференциальные операторы дробного порядка

1°. Пусть $f(x) \in L_1(0, l)$ $(0 < l < +\infty)$. *Интегралом от функции $f(x)$ порядка $\alpha > 0$ с началом в точке* $x = 0$ принято называть функцию

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^l (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l). \tag{1.1}$$

Соответственно *интегралом порядка $\alpha > 0$ от функции $f(x)$ с концом в точке $x = l$* называют функцию

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^l (t-x)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l). \tag{1.1'}$$

Применив теорему Фубини, из (1.1) и (1.1′) получим оценки

$$\int_0^l \left|\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}}\right| dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^l (l-t)^{\alpha} |f(t)|\, dt < +\infty,$$

$$\int_0^l \left|\frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}}\right| dx \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^l (l-t)^{\alpha-\gamma} |f(t)|\, dt < +\infty.$$

Таким образом, если $f(x) \in L_1(0, l)$, то функции $\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}}$ и $\frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}}$ также принадлежат классу $L_1(0, l)$.

Пусть теперь $\alpha_1, \alpha_2 > 0$. Тогда почти всюду на $(0, l)$

$$\frac{d^{-\alpha_2}}{dx^{-\alpha_2}}\left(\frac{d^{-\alpha_1} f(x)}{dx^{-\alpha_1}}\right) = \frac{d^{-(\alpha_1+\alpha_2)}}{dx^{-(\alpha_1+\alpha_2)}} f(x), \tag{1.2}$$

$$\frac{d^{-\alpha_2}}{d(l-x)^{-\alpha_2}}\left(\frac{d^{-\alpha_1} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha_1}}\right) = \frac{d^{-(\alpha_1+\alpha_2)}}{d(l-x)^{-(\alpha_1+\alpha_2)}} f(x). \tag{1.2'}$$

Действительно, из определения (1.1) имеем

$$\frac{d^{-\alpha_2}}{dx^{-\alpha_2}}\left(\frac{d^{-\alpha_1}}{dx^{-\alpha_1}} f(x)\right) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x (x-t_2)^{\alpha_2-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_0^{t_2} (t_2-t_1)^{\alpha_1-1} f(t_1)\, dt_1 \right\} dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^x f(t_1) \left\{ \int_0^x (x-t_2)^{\alpha_2-1} (t_2-t_1)^{\alpha_1-1} dt_2 \right\} dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \int_0^x (x-t_1)^{\alpha_1+\alpha_2-1} f(t_1)\, dt,$$

откуда следует формула (1.2). Формула (1.2') доказывается аналогично.

Докажем теперь, что почти всюду на $(0, l)$

$$\lim_{\alpha \to +0} \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = \lim_{\alpha \to +0} \frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}} = f(x). \tag{1.3}$$

Действительно, пусть $x \in (0, l)$ есть точка Лебега функции $f(x)$, т. е.

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(t)|\, dt = 0.$$

Тогда, положив

$$F_x(t) = \int_0^t f(x-\tau)\, d\tau = \int_{x-t}^x f(\xi)\, d\xi, \tag{1.4}$$

можем представить $F_x(t)$ в виде

$$F_x(t) = t\,[f(x) + \omega_x(t)], \quad 0 \leqslant t \leqslant x, \tag{1.5}$$

где, очевидно, $\omega_x(t) \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|\omega_x(t)| < \varepsilon, \quad 0 < t < \delta. \tag{1.6}$$

В силу (1.4) и (1.5) интеграл (1.1) можно переписать в виде

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \tau^{\alpha-1} f(x-\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{F_x(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x F_x(t)\, \tau^{\alpha-2}\, d\tau =$$

$$= \frac{F_x(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{\Gamma(1+\alpha)} x^{\alpha} f(x) - \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\delta} \omega_x(\tau)\, \tau^{\alpha-1}\, d\tau -$$

$$- \frac{\alpha-1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\delta}^{x} \omega_x(\tau)\, \tau^{\alpha-1}\, d\tau.$$

Отсюда, в силу (1.6), следует оценка

$$\overline{\lim_{\alpha \to +0}} \left| \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} - f(x) \right| \leqslant \varepsilon,$$

доказывающая, ввиду произвольности ε, первую из формул (1.3). Вторая доказывается аналогично.

Таким образом, при $\alpha = 0$ интегралы (1.1) и (1.2) естественно отождествить с самой функцией $f(x)$, т. е.

$$\left. \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \right|_{\alpha=0} = f(x), \quad x \in (0, l). \tag{1.3'}$$

2°. Пусть теперь $\alpha > 0$ и целое число $p \geqslant 1$ таково, что

$$p - 1 < \alpha \leqslant p. \tag{1.7}$$

Если для $f(x) \in L_1(0, l)$ почти всюду на $(0, l)$ существует (не обязательно суммируемая на $(0, l)$) функция

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \equiv \frac{d^p}{dx^p} \frac{d^{-(p-\alpha)} f(x)}{dx^{-(p-\alpha)}}, \tag{1.8}$$

то последнюю назовем *производной порядка* $\alpha > 0$ *от* $f(x)$ *с началом в точке* $x = 0$.

Аналогично, формулой

$$\frac{d^{-\alpha} f(x)}{d(l-x)^{-\alpha}} \equiv (-1)^p \frac{d^p}{dx^p} \frac{d^{-(p-\alpha)} f(x)}{d(l-x)^{-(p-\alpha)}} \tag{1.8'}$$

определяется *производная порядка* $\alpha > 0$ *от* $f(x)$ *с концом в точке* $x = l$.

Из (1.3) следует, что функции (1.8) и (1.8′) при целом $\alpha = p > 0$ являются обычными производными функции $f(x)$ порядка α.

Из легко проверяемого соотношения

$$\int_t^x (x-s)^{\alpha-1}(s-t)^{\beta-1}\,ds = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,(x-t)^{\alpha+\beta-1}$$

$$(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ x > t)$$

и из определений предыдущих пунктов 1° и 2° для степенных функций получаются следующие формулы:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left\{\frac{x^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right\} = \frac{x^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\quad (\beta > -1,\ \beta-\alpha > -1), \tag{1.9}$$

$$\frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}\left\{\frac{(l-x)^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\right\} = \frac{(l-x)^{\beta-\alpha}}{\Gamma(1+\beta-\alpha)}\,(\beta > -1,\ \beta-\alpha > -1), \tag{1.9′}$$

причем нужно учесть, что при целом $n \geqslant 0$

$$\frac{x^{-n-1}}{\Gamma(-n)} = 0,\quad x \in (0, +\infty).$$

3°. Установим теперь некоторые свойства введенных операций дробного интегрирования и дифференцирования.

Прежде всего покажем, что для любой функции $f(x) \in L_1(0, l)$

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}\,\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}f(x) = f(x)\ (\alpha > 0). \tag{1.10}$$

Действительно, если $\alpha = p$ — целое, то, согласно определению, почти всюду на $(0, l)$

$$\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{-p}}{dx^{-p}}f(x) = \frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x (x-t)^{p-1} f(t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{d}{dx}\left\{\int_0^x f(t)\,dt\right\} = f(x).$$

Если же $p-1 < \alpha < p$, то, согласно формуле (1.2),

$$\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}}\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f(x) = \frac{d^{-p}}{dx^{-p}}f(x).$$

Из этих двух соотношений и определения (1.8) следует первая из формул (1.10). Вторая доказывается аналогично.

Пусть теперь функция $f(x)$ имеет суммируемую на $(0, l)$ производную порядка α $(p-1 < \alpha < p)$ с началом в точке $\alpha = 0$ (или с концом в точке $x = l$). Докажем, что почти всюду на $(0, l)$

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f(x) = f(x) - \sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{\alpha-k}}{dx^{\alpha-k}}f(x)\right\}_{x=0}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)} \tag{1.11}$$

или, соответственно,

$$\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}\frac{d^{\alpha}}{d(l-x)^{\alpha}}f(x)=f(x)-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{\alpha-k}f(x)}{d(l-x)^{\alpha-k}}\right\}_{x=l}\frac{(l-x)^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}. \qquad (1.11')$$

Действительно, согласно определению

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}\frac{d^p}{dt^p}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\,dt=$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha}\frac{d^p}{dt^p}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\,dt\right\}. \qquad (1.12)$$

После p-кратного интегрирования по частям выражение, стоящее в правой части формулы (1.12), принимает вид

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-p)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-p-1}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\,dt-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{p-k}}{dt^{p-k}}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dt^{-(p-\alpha)}}f(t)\right\}_{t=0}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)},$$

причем это выражение имеет смысл, в силу условий, наложенных на $f(x)$.

Для завершения доказательства формулы (1.11) остается применить (1.10). Формула (1.11′) доказывается аналогично.

Приведем теперь обобщение формул (1.10) и (1.11). Именно: пусть $f(x)\in L_1(0,l)$. Покажем, что

1) если $\alpha>0$, $\beta>0$ и существует производная $\frac{d^{\alpha-\beta}}{dx^{\alpha-\beta}}f(x)$ (а при $\beta>\alpha$ это условие заведомо выполняется), то

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x)=\frac{d^{\alpha-\beta}}{dx^{\alpha-\beta}}f(x); \qquad (1.13)$$

2) если существует производная $\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}f(x)\in L_1(0,l)$ $(0\leqslant p-1\leqslant\beta\leqslant p)$, то для любого $\alpha>0$

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}f(x)=\frac{d^{\beta-\alpha}}{dx^{\beta-\alpha}}f(x)-\sum_{k=1}^{p}\left\{\frac{d^{\beta-k}}{dx^{\beta-k}}f(x)\right\}_{x=0}\frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha+k)}; \qquad (1.14)$$

3) если $0<\alpha\leqslant1$ и $0<\beta\leqslant1$, то

$$\frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\frac{d^{\beta}}{dx^{\beta}}f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{\alpha+\beta-1}}{dx^{\alpha+\beta-1}}f(x)-\left[\frac{d^{\beta-1}}{dx^{\beta-1}}f(x)\right]_{x=0}\frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\right\}. \qquad (1.15)$$

Для доказательства формулы (1.13) заметим, что при $\beta > \alpha$ она следует из формулы (1.10) и представления (см. (1.2))

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x)=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^{-(\beta-\alpha)}}{dx^{-(\beta-\alpha)}}f(x).$$

Пусть теперь $\beta<\alpha$. Обозначим

$$\alpha-\beta=p-\theta,\ 0\leqslant\theta<1,\ \alpha-p=q-r,\ r\geqslant 0,$$

где p, $q>0$ — целые. Имеем, согласно определению (1.8) и предыдущей формуле

$$\frac{d^{\alpha-\beta}}{dx^{\alpha-\beta}}f(x)=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{-\theta}}{dx^{-\theta}}f(x)=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{\alpha-p}}{dx^{\alpha-p}}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x)=$$

$$=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^q}{dx^q}\frac{d^{-r}}{dx^{-r}}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}}f(x).$$

Формула (1.14) следует из (1.11), если заметить, что по (1.13)

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta}f(x)=\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^{\beta-\alpha}}{dx^{\beta-\alpha}}f(x).$$

И, наконец, формула (1.15) следует из (1.14), так как $0<\alpha\leqslant 1$ и, по определению,

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\frac{d^\beta}{dx^\beta}f(x)=\frac{d}{dx}\left\{\frac{d^{\alpha-1}}{dx^{\alpha-1}}\frac{d^\beta}{dx^\beta}f(x)\right\}.$$

Укажем теперь следующий удобный для применений критерий существования дробной производной.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[0, l]$ вместе со своими производными до порядка $q-1$ ($q\geqslant 1$ — целое) включительно и $f^{(q)}(x)\in L_1(0, l)$.*

Тогда для любого α ($0\leqslant p-1<\alpha\leqslant p<q$) производная $\dfrac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}$ существует и представляется в виде

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha}=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)}x^{k-\alpha}+\frac{1}{p-\alpha}\int_0^x(x-t)^{p-\alpha-1}f^{(p)}(t)\,dt. \quad (1.16)$$

Доказательство. Правая часть формулы (1.16), переписанная в виде

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{\sum_{k=0}^{p-1}\frac{f^{(k)}(0)\,x^{p+k-\alpha}}{\Gamma(1+p+k-\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(2p-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{2p-\alpha-1}f^{(p)}(t)\,dt\right\},$$

после p-кратного интегрирования по частям под знаком интеграла может быть представлена также формулой

$$\frac{d^p}{dx^p}\left\{\frac{1}{\Gamma(p-\alpha)}\int_0^x(x-t)^{p-\alpha-1}f(t)\,dt\right\}.$$

Согласно определению дробной производной это выражение есть $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)$.

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие 1. Если $f'(x) \in L_1(0, l)$, то для любого $0 < \alpha < 1$ существует производная

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} f(0) + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x (x-t)^{-\alpha} f'(t)\, dt, \tag{1.17}$$

также принадлежащая классу $L_1(0, l)$.

Следствие 2. Если существует производная

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} \in L_1(0, l),$$

то при любом β $(0 < \beta < \alpha)$ существует также производная

$$\frac{d^\beta f(x)}{dx^\beta} \in L_1(0, l).$$

В самом деле, обозначая $g(x) = \frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}} f(x)$, имеем

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{d}{dx} g(x) \in L_1(0, l).$$

С другой стороны, согласно формуле (1.13) и следствию 1, так как $0 < 1 + \beta - \alpha < 1$, $\frac{d^\beta}{dx^\beta} f(x) = \frac{d^{1+\beta-\alpha}}{dx^{1+\beta-\alpha}} g(x) \in L_1(0, l)$.

4°. Приведем теперь теорему Я. Д. Тамаркина [5] об обращении обобщенного интегрального уравнения Абеля.

Теорема 2. *Для того чтобы интегральное уравнение*

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} g(t)\, dt \quad (p - 1 < \alpha \leqslant p) \tag{1.18}$$

имело решение $g(x) \in L_1(0, l)$ при $f(x) \in L_1(0, l)$ необходимо и достаточно, чтобы

1) *функция $\frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} \omega(x)$, где*

$$\omega(x) = \frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}} f(x) \tag{1.19}$$

была абсолютно непрерывна на $[0, l]$;

2)
$$\omega(0) = \omega'(0) = \cdots = \omega^{(p-1)}(0). \tag{1.20}$$

Если эти условия соблюдены, то решение уравнения (1.18) *единственно и, почти всюду на* $(0, l)$, *представляется в виде*

$$g(x)=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}}f(x). \qquad (1.21)$$

Доказательство. Если уравнение (1.18) имеет решение $g(x)\in L_1(0, l)$, то, применив к его обеим частям оператор интегрирования порядка $p-\alpha$, по формуле (1.2) получим

$$\omega(x)=\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}}f(x)=\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}}\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)=$$

$$=\frac{d^{-p}}{dx^{-p}}g(x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int\limits_0^x(x-t)^{p-1}g(t)\,dt. \qquad (1.22)$$

Отсюда следует как формула (1.21), так и условия 1) и 2).

Докажем теперь достаточность условий теоремы. Из условия 1) вытекает, прежде всего, что

$$\frac{d^p\omega(x)}{dx^p}=\frac{d^p}{dx^p}\frac{d^{-(p-\alpha)}}{dx^{-(p-\alpha)}}f(x)\in L_1(0, l).$$

С другой стороны, из формулы (1.2) выводим

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt=\frac{d^{-1}f(x)}{dx^{-1}}=\frac{d^{-(\alpha-p+1)}}{dx^{-(\alpha-p+1)}}\omega(x)=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha-p+1)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-p}\omega(t)\,dt.$$

Последний интеграл интегрированием по частям, с учетом условий 2) приводится к виду

$$\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha}\omega^{(p)}(t)\,dt.$$

Итак, мы получаем

$$\int\limits_0^x f(t)\,dt=\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha}g(t)\,dt,$$

где функция $g(x)$ определяется формулой (1.19), что и требовалось доказать.

5°. В этом пункте мы установим некоторые формулы „интегрирования по частям“ в применении к дробным производным.

Прежде всего без труда непосредственно проверяется, что, если $f_1(x)$ и $f_2(x)\in L_1(0, l)$ и при $\alpha>0$

$$f_2(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}f_1(x)\in L_1(0, l), \qquad (1.23)$$

то

$$\int_0^l f_2(x)\frac{d^{-\alpha}f_1(x)}{dx^{-\alpha}}dx=\int_0^l f_1(x)\frac{d^{-\alpha}f_2(x)}{d(l-x)^{-\alpha}}dx. \qquad (1.24)$$

Менее очевидным является следующая

Теорема 3. *Пусть $f_1(x), f_2(x)\in L_1(0, l)$ и при некотором α $(0<\alpha\leqslant 1)$*

1) *существуют производные* $\dfrac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}$ *и* $\dfrac{d^\alpha f_2(x)}{d(l-x)^\alpha}$,

причем $f_2(x)\dfrac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}\in L_1(0, l)$;

2) *функции* $f_2(x)$ *и* $\dfrac{d^{-(1-\alpha)}f_1(x)}{dx^{-(1-\alpha)}}$

непрерывны в точке $x=0$, *а функции* $f_1(x)$ *и* $\dfrac{d^{-(1-\alpha)}f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}$

непрерывны в точке $x=l$.

Тогда имеет место формула

$$\int_0^l f_2(x)\frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}dx=\int_0^l f_1(x)\frac{d^\alpha f_2(x)}{d(l-x)^\alpha}dx+$$

$$+\left\{f_1(x)\frac{d^{-(1-\alpha)}f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=l}-\left\{f_2(x)\frac{d^{-(1-\alpha)}f_1(x)}{dx^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=0}. \qquad (1.25)$$

Доказательство. Из формул (1.11) и (1.11′) при $p<\alpha\leqslant 1$ имеем

$$f_1(x)=\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f_1(x)+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}f_1(x)\right\}_{x=0}\frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad (1.26)$$

$$f_2(x)=\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}f_2(x)+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}\right\}_{x=l}\frac{(l-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \qquad (1.26')$$

Следовательно, согласно (1.24)

$$\int_0^l f_2(x)\frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}dx=\int_0^l\frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}}\frac{d^\alpha f_2(x)}{d(l-x)^\alpha}dx+$$

$$+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}f_2(x)\right\}_{x=l}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^l(l-x)^{\alpha-1}\frac{d^\alpha f_1(x)}{dx^\alpha}dx=$$

$$=\int_0^l\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f_1(x)\frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha}f_2(x)\,dx+$$

$$+\left\{\frac{d^{-(1-\alpha)}}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}}f_2(x)\right\}_{x=l}\left\{\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}f_1(x)\right\}_{x=l}=$$

$$= \int_0^l f_1(x) \frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha} f_2(x)\,dx -$$

$$- \left\{ \frac{d^{-(1-\alpha)} f_1(x)}{dx^{-(1-\alpha)}} \right\}_{x=0} \left\{ \frac{d^{-\alpha}}{d(l-x)^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{d(l-x)^\alpha} f_2(x) \right\}_{x=0} +$$

$$+ \left\{ \frac{d^{-(1-\alpha)} f_2(x)}{d(l-x)^{-(1-\alpha)}} \right\}_{x=l} \left\{ \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f_1(x) \right\}_{x=l}. \qquad (1.27)$$

Нетрудно видеть, наконец, что отсюда, в силу соотношений (1.26) и (1.26′), следует формула (1.25).

§ 2. Задача типа Коши для дифференциальных операторов дробного порядка

1°. Пусть

$$\{\gamma_k\}_0^n \equiv \{\gamma_0, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\} \qquad (2.1)$$

—произвольная совокупность вещественных чисел, подчиненных лишь условию

$$0 < \gamma_k \leqslant 1 \quad (k = 0, 1, \cdots, n). \qquad (2.2)$$

Обозначим

$$\sigma_k = \sum_{j=0}^{k} \gamma_j - 1 \qquad (2.3)$$

и всюду дальше положим

$$\sigma_n = \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 > 0. \qquad (2.4)$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на $[0, \Delta)$ $(\Delta > 0)$. Введем в рассмотрение следующие, ассоциированные с $\{\gamma_k\}_0^n$, дифференциальные операции

$$D^{\sigma_0} f(x) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}} f(x), \qquad (2.5)$$

$$D^{\sigma_k} f(x) = \frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d^{\gamma_{k-1}}}{dx^{\gamma_{k-1}}} \cdots \frac{d^{\gamma_1}}{dx^{\gamma_1}} \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} f(x),$$

предполагая, что эти операции имеют смысл, по крайней мере, почти всюду на $(0, \Delta)$.

Из (2.5) следуют рекуррентные соотношения

$$D^{\sigma_k} f(x) = \frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_{k-1}} f(x) \quad (k = 1, 2, \cdots, n). \qquad (2.6)$$

Пользуясь этими соотношениями и формулой (1.9), легко можно проверить, что

$$D^{\sigma_s} \left\{ \frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} \right\} = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \leqslant k \leqslant s-1, \quad 0 \leqslant s \leqslant n, \\ \dfrac{x^{\sigma_k - \sigma_s}}{\Gamma(1+\sigma_k - \sigma_s)}, & \text{при } s \leqslant k \leqslant n. \end{cases} \qquad (2.7)$$

2°. Рассмотрим простейшее дифференциальное уравнение с производными дробного порядка

$$D^{\sigma_n} y(x) = \Phi(x), \quad x \in (0, \Delta), \tag{2.8}$$

где $\Phi(x)$ — произвольная функция из класса $L_1(0, \Delta)$.

Поставим следующую задачу: в классе функций $L_1(0, \Delta)$ отыскать решение $y = y(x)$ уравнения (2.8), удовлетворяющее условиям

$$D^{\sigma_k} y(x)/_{x=0} = y_k^0 \quad (k=0, 1, \cdots, n-1), \tag{2.9}$$

где $\{y_k^0\}_0^{n-1}$ — произвольная наперед заданная совокупность чисел.

Заметим, что при $\gamma_k = k$, $D^{\sigma_k} y = y^{(u)}$, и, таким образом, задача (2.8)—(2.9) переходит в классическую задачу Коши для простейшего дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)}(x) = \Phi(x), \; y^{(k)}(0) = y_k^0 \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1).$$

Поэтому задачу (2.8)—(2.9) также будем называть задачей Коши.

Заметим, что при $\gamma_n < 1$ условие $\Phi(x) \in L_1(0, \Delta)$ не достаточно для разрешимости задачи (2.8)—(2.9). Действительно, учитывая формулу (1.2), из (2.8) получим, что $\Phi(x)$ должна представляться в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma_n)} \int_0^x (x-t)^{-\gamma_n} \tilde{\Phi}(t)\, dt = \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \tilde{\Phi}(x), \tag{2.10}$$

где $\tilde{\Phi}(x) \in L_1(0, l)$; иными словами, $\Phi(x)$ должна обладать производной

$$\frac{d^{1-\gamma_n}}{dx^{1-\gamma_n}} \Phi(x) = \tilde{\Phi}(x) \in L_1(0, \Delta). \tag{2.10'}$$

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(x) \in L_1(0, \Delta)$ *представляется в виде* (2.10), *если* $\gamma_n < 1$. *Тогда решение задачи* (2.8)—(2.9) *существует, единственно и представляется в виде*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_k^0}{\Gamma(1+\sigma_k)} x^{\sigma_k} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n - 1} \Phi(t)\, dt \quad (0 \leqslant x \leqslant \Delta). \tag{2.11}$$

Кроме того, справедливы также формулы

$$D^{\sigma_k} y(x) = \sum_{k=s}^{n-1} \frac{y_k^0}{\Gamma(1+\sigma_k - \sigma_s)} x^{\sigma_k - \sigma_s} +$$

$$+ \frac{1}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_s)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n - \sigma_s - 1} \Phi(t)\, dt \quad (s = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{2.12}$$

Доказательство. Предположим, что задача (2.8)—(2.9) имеет решение $y(x)$. Тогда, согласно теореме 2 и формуле (2.6),

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d}{dx} \frac{d^{-\gamma_n}}{dx^{-\gamma_n}} \Phi(x), \tag{2.12'}$$

причем производная справа существует, так как при $\gamma_n \leqslant 1$ это обеспечено условиями леммы, что нетрудно доказать, пользуясь формулой (1.2).

Из (2.12) и (2.9) следует, что

$$D^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d^{-\gamma_n}}{dx^{-\gamma_n}} \Phi(x) + y_n^0. \tag{2.13}$$

Таким образом, теперь мы должны уже решать задачу Коши (2.13)—(2.9), причем в последнем условии $k = 0, 1, \cdots, n-2$. Убедимся, что здесь также полностью обоснован шаг, аналогичный тому, который мы сделали, переходя от (2.8) к (2.13).

Действительно, согласно (2.10), (2.13) можно переписать в виде

$$D^{\sigma_{n-1}} y(x) = \frac{d^{-\gamma_n}}{dx^{-\gamma_n}} \frac{d^{\gamma_n - 1}}{dx^{\gamma_n - 1}} \tilde{\Phi}(x) + y_n^0 =$$

$$= \int_0^x \Phi(t)\, dt + y_n^0 \equiv \Phi_1(x).$$

Отсюда следует, что существует производная

$$\frac{d}{dx} \frac{d^{-\gamma_{n-1}}}{dx^{-\gamma_{n-1}}} \Phi(x),$$

и поэтому функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$D^{\sigma_{n-2}} y(x) = \frac{d^{-\gamma_{n-1}}}{dx^{-\gamma_{n-1}}} \Phi_1(x) + y_n^1. \tag{2.13}$$

Через n шагов, каждый раз учитывая формулы (1.2) и (1.9), получим (2.11) и, попутно, формулу (2.12). Кроме того мы получаем единственность решения задачи (2.8)—(2.9).

Для доказательства существования решения мы, очевидно, должны показать, что функция, определяемая формулой (2.11), удовлетворяет уравнению (2.8) и условиям (2.9). Для этого мы должны применить к этой функции операции (2.5), каждый раз учитывая формулы (2.7), (1.2) и (1.13). Сначала мы получим, что

$$D^{\sigma_0} y(x) = y_k^0 + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{y_k^0}{\Gamma(1 + \sigma_k - \sigma_0)} x^{\sigma_k - \sigma_0} + \frac{d^{-(\sigma_n - \sigma_0)}}{dx^{-(\sigma_n - \sigma_0)}} \Phi(x), \tag{2.14}$$

откуда будет следовать справедливость формулы (2.12) при $s=0$ и выполнение условия (2.9) при $k=0$.

Далее, согласно (2.6),

$$D^{\sigma_1} y(x) = \frac{d^{-(1-\gamma_1)}}{dx^{-(1-\gamma_1)}} \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\overset{0}{y_k}}{\Gamma(\sigma_k - \sigma_0)} x^{\sigma_k - \sigma_0 - 1} + \frac{d}{dx} \frac{d^{-(\alpha_n - \sigma_0)}}{dx^{-(\sigma_n - \sigma_0)}} \Phi(x) \right\}. \quad (2.15)$$

Существование производной в фигурных скобках обеспечено условиями леммы, поскольку

$$\sigma_n - \sigma_0 - \gamma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k > 0$$

и, следовательно, согласно свойству (1.13)

$$\frac{d}{dx} \frac{d^{-(\sigma_n - \sigma_0)}}{dx^{-(\sigma_n - \sigma_0)}} \Phi(x) = \frac{d^{-(\sigma_n - \sigma_0 - \gamma_n)}}{dx^{-(\sigma_n - \sigma_0 - \gamma_n)}} \tilde{\Phi}(x) \cdot$$

Последние замечания позволяют вывести из (2.15) формулу (2.12) при $s = 1$ и, следовательно, условие (2.9) при $k = 1$.

Повторяя буквально те же рассуждения и применив метод индукции, получим, что функция (2.11) является решением задачи (2.8)—(2.9).

3°. Введем в рассмотрение следующий линейный оператор:

$$Ly = D^{\sigma_n} y + p_0(x) D^{\sigma_{n-1}} y + \cdots + p_{n-1}(x) D^{\sigma_0} y + p_n(x) y, \quad (2.16)$$

где функции $p_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ (вообще говоря, комплекснозначные) пока предполагаются лишь непрерывными на $[0, l]$. В этом пункте мы исследуем задачу Коши

$$Ly(x) = f(x), \; D^{\sigma_k} y(x) = \overset{0}{y_k} \; (k=0, 1, \cdots, n-1), \quad (2.17)$$

где $f(x) \in L_1(0, l)$ и $y(x)$ ищется в классе $L_1(0, l)$.

Предполагая, что задача (2.17) имеет решение $y = y(x)$, положим

$$D^{\sigma_n} y(x) = \Phi(x). \quad (2.18)$$

Применив лемму 1, после очевидных преобразований получим, что функция $\Phi(x)$ является решением интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$\Phi(x) = \omega(x) + \int_0^x W(x, t) \Phi(t) \, dt, \quad (2.19)$$

где

$$W(x, t) = -p_n(x) \frac{(x-t)^{\sigma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_n)} - \\ - \sum_{s=0}^{n-1} p_{n-1-s}(x) \frac{(x-t)^{\sigma_n - \sigma_s - 1}}{\Gamma(\sigma_n - \sigma_s)}, \quad (2.20)$$

$$\omega(x) = f(x) - p_n(x) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overset{0}{y_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)} x^{\sigma_k} - \\ - \sum_{s=0}^{n-1} p_{n-1-s}(x) \sum_{k=s}^{n-1} \frac{\overset{0}{y_k}}{\Gamma(1+\sigma_k - \sigma_s)} x^{\sigma_k - \sigma_s}. \quad (2.21)$$

Из формулы (2.20) следует, что, если функции $p_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ непрерывны на $(0, l)$, то ядро $W(x, t)$ имеет слабую сингулярность, т. е.

$$W(x, t)=\frac{W_1(x, t)}{(x-t)^{1-\chi}}, \quad x \geqslant t, \tag{2.22}$$

где $\chi=\min\{\sigma_n, \sigma_n-\sigma_1, \cdots, \sigma_n-\sigma_{n-1}\}=\min\{\sigma_n, \gamma_n\}$, т. е. $0<\chi\leqslant 1$. Изучение уравнения (2.19) с ядром вида (2.22) не представляет принципиальной трудности и может быть проведено по известной схеме (см., напр., [6]).

Применив метод последовательных приближений, мы получим, что уравнение (2.19) имеет единственное решение $\Phi(x) \in L_1(0, l)$, которое непрерывно на сегменте $[0, l]$.

Заметим еще, что если $p_k(x) \in L_p(0, l)$ $(p>1)$, $(k=0, 1, \cdots, n)$, то при $f(x) \in L_p(0, l)$ имеем также $\Phi(x) \in L_p(0, l)$.

4°. Таким образом, единственность решения задачи (2.17) обеспечена, а доказательство существования решения этой задачи, согласно лемме 1, сводится к доказательству возможности представления вида (2.10) для решения уравнения (2.19). С целью выяснения условий, обеспечивающих такое представление, докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* $g(x) \in L_1(0, l)$ *и* $f(x) \in Lip\, 1$, *т. е. для любых* $x', x'' \in (0, l)$

$$|f(x')-f(x'')| \leqslant \text{const}\,|x'-x''|.$$

Тогда для любого α $(0 \leqslant \alpha < 1)$ *имеет место представление*

$$f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)=\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}F_\alpha(x), \quad x \in (0, l), \tag{2.23}$$

где $F_\alpha(x) \in L_1(0, l)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что (1°, § 1) функции

$$f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x) \text{ и } \frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}\left[f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)\right]$$

принадлежат классу $L_1(0, l)$. Далее имеем

$$F(x) \equiv \frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}\left[f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)\right]=$$

$$=\frac{f(x)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}g(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha}\{f(t)-f(x)\}\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}g(t)\,dt \equiv F_1(x)+F_2(x). \tag{2.24}$$

Так как $f(x) \in Lip\, 1$, то почти для всех $x \in (0, l)$ существует конечная производная $f'(x)$. Кроме того, согласно (2.2),

$$F_1(x) = f(x)\frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x) =$$

$$= f(x)\frac{d^{-1}}{dx^{-1}}g(x) = f(x)\int_0^x g(t)\,dt.$$

Таким образом, почти всюду на $(0, l)$ существует производная

$$F'(x) = f(x)\,g(x) + f'(x)\int_0^x g(t)\,dt +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-(\alpha-1)}\{f(t)-f(x)\}\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}g(t)\,dt, \tag{2.25}$$

причем $F'(x) \in L_1(0, l)$ опять согласно условию $f(x) \in Lip\,1$. Последнее означает, что

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\frac{d^{-(1-\alpha)}}{dx^{-(1-\alpha)}}\left\{f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)\right\} \equiv$$

$$\equiv \frac{d^{\alpha}}{dx^{\alpha}}\left[f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x)\right] \equiv F_{\alpha}(x) \in L_1(0, l). \tag{2.26}$$

Из (2.24) и (2.26) получим, в силу формулы (1.14)

$$f(x)\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}g(x) = \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}}F_{\alpha}(x) + \frac{F(+0)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}. \tag{2.27}$$

Наконец, из оценок

$$|F_1(x)| \leqslant |f(x)|\int_0^x |g(t)|\,dt$$

и

$$|F_2(x)| \leqslant \frac{\text{const}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{1-\alpha}\left|\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}g(t)\right|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{\Gamma(1-\alpha)}x^{1-\alpha}\int_0^x\left|\frac{d^{-\alpha}}{dt^{-\alpha}}g(t)\right|dt$$

следует, что

$$F(+0) = \lim_{x\to+0} F(x) = 0,$$

чем и завершается доказательство леммы 2.

5°. Докажем теперь следующую, основную для этой работы, теорему.

Теорема 4. *Пусть функции* $\{p_k(x)\}_0^n$ *принадлежат классу* $Lip\,1$ *на* $[0, l]$, *а функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[0, l]$ *и допускает представление*

$$f(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{f}(x),\ x\in(0,\ l),\tag{2.28}$$

где $\tilde{f}(x)\in L_1(0,\ l)$.

Тогда, если $\gamma_0>1-\gamma_n$, *то задача Коши* (2.17) *имеет единственное непрерывное на* $(0,\ l]$ *решение.*

Доказательство. Поскольку уравнение (2.19) имеет единственное решение $\Phi(x)\in L_1(0,\ l)$, нам достаточно доказать, согласно (2.18) и лемме 1, что функция

$$y(x)=\sum_{k=0}^{n-1}y_k^0\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1-\sigma_k)}+\frac{1}{\Gamma(\sigma_n)}\int_0^x(x-t)^{\sigma_n-1}\Phi(t)\,dt,\tag{2.29}$$

которая, очевидно, непрерывна на $(0,\ l]$, является решением задачи (2.17). Прежде всего для этого нужно показать, что $\Phi(x)$ можно представить в виде

$$\Phi(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{\Phi}(x),\ \tilde{\Phi}(x)\in L_1(0,\ l).\tag{2.30}$$

С этой целью заметим сначала, что, поскольку $\sigma_k=\sum_{j=0}^{k}\gamma_j-1,\ k=0,1,$ $\ldots,n$ и $\gamma_0>1-\gamma_n$, то

$$\sigma_n+\gamma_n\geqslant\sigma_0+\gamma_n=\gamma_n-(1-\gamma_0)>0\ \ (0\leqslant k\leqslant n-1)\tag{2.31}$$

и

$$\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n\geqslant\gamma_n>0,\quad s\leqslant k\leqslant n-1.$$

Пользуясь этими условиями и формулой (1.9), получим представления

$$\frac{x^{\sigma_k}}{\Gamma(1+\sigma_k)}=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\left\{\frac{x^{\sigma_k+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\gamma_n)}\right\}\quad(0\leqslant k\leqslant n-1),\tag{2.32}$$

$$\frac{x^{\sigma_k-\sigma_s}}{\Gamma(1+\sigma_k-\sigma_s)}=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\left\{\frac{x^{\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n)}\right\}(s\leqslant k\leqslant n-1).$$

Теперь уже, в силу (2.28), (2.32) и (2.21)

$$\omega(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{f}(x)-$$

$$-p_n(x)\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}y_k^0\frac{x^{\sigma_k+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k+\gamma_n)}\right\}-$$

$$-\sum_{s=0}^{n-1}p_{n-1-s}(x)\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\sum_{k=s}^{n-1}y_k^0\frac{x^{\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n-1}}{\Gamma(\sigma_k-\sigma_s+\gamma_n)}.\tag{2.33}$$

Применив лемму 2, получим

$$\omega(x)=\frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}}\tilde{\omega}(x),\ \tilde{\omega}(x)\in L_1(0,\ l).\tag{2.34}$$

С другой стороны, согласно (2.20), уравнение (2.19) можно записать в виде

$$\Phi(x) = \omega(x) - p_n(x) \frac{d^{-\sigma_n}}{dx^{-\sigma_n}} \Phi(x) -$$

$$- \sum_{s=0}^{n-1} p_{n-1-s}(x) \frac{d^{-(\sigma_n-\sigma_s)}}{dx^{-(\sigma_n-\sigma_s)}} \Phi(x). \tag{2.35}$$

Обозначив, как и в (2.22),

$$\varkappa = \min\{\sigma_n, \sigma_n - \sigma_1, \cdots, \sigma_n - \sigma_{n-1}\} = \min\{\sigma_n, \gamma_n\}$$

и снова воспользовавшись леммой 2, получим

$$\Phi(x) = \omega(x) + \frac{d^{-\varkappa}}{dx^{-\varkappa}} v(x), \quad v(x) \in L_1(0, l),$$

откуда ввиду (3.34) следует, что

$$\Phi(x) = \frac{d^{-\tau_1}}{dx^{-\tau_1}} \Phi_1(x), \quad \Phi_1(x) \in L_1(0, l), \ \tau_1 = \min\{1-\gamma_n, \varkappa\}. \tag{2.36}$$

Если теперь $\varkappa \geqslant 1 - \gamma_n$, то представление (2.30) доказано, если же $\varkappa < 1 - \gamma_n$, то, обратившись снова к формуле (2.35), из (2.36) согласно лемме 2, получим, что

$$\Phi(x) = \frac{d^{-\tau_2}}{dx^{-\tau_2}} \Phi_2(x), \quad \Phi_2(x) \in L_1(0, l), \ \tau_2 = \min\{1-\gamma_n, 2\varkappa\}.$$

Если и $2\varkappa < 1 - \gamma_n$, мы продолжим этот процесс дальше. Очевидно, что через p шагов $p\varkappa \geqslant 1 - \gamma_n > (p-1)\varkappa$ мы получим требуемое представление (2.30).

Теперь уже, поскольку функция (2.29), согласно лемме 1, допускает все операции

$$D^{\sigma_s} y(x), \quad s = 0, 1, \cdots, n, \tag{2.37}$$

то проверка справедливости всех соотношений (2.17) сводится к проверке равенства (2.19).

Однако уравнение (2.19) было получено из (2.17) при помощи операций, позволяющих однозначное обращение. Поэтому задача Коши (2.17) эквивалентна интегральному уравнению (2.19) тогда и только тогда, когда существуют все операции (2.37). Итак, теорема 4 полностью доказана.

§ 3. Некоторые уточнения теоремы 4 и простейший частный случай

1°. Зафиксируем целое число r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$, и рассмотрим следующий частный случай задачи (2.17):

$$Ly(x) = f(x), \quad D^{\sigma_k} y(x)/_{x=0} = y_k^0 = \begin{cases} 1, \text{ при } k = r, \\ \qquad\qquad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ 0, \text{ при } k \neq r. \end{cases} \tag{3.1}$$

Покажем, что в этом случае теорема 4 полностью остается в силе, если условие $\gamma_n > 1 - \gamma_0$ заменить более слабым (при $r > 0$) условием

$$\gamma_n > 1 - \sum_{j=0}^{r} \gamma_j. \tag{3.2}$$

Для этого мы должны повторить рассуждения доказательства теоремы 4 в применении к следующим измененным формулам (2.19), (2.21) и (2.29):

$$\Phi_r(x) = \omega_r(x) + \int_0^x W(x, t)\, \Phi_r(t)\, dt, \tag{3.3}$$

$$\omega_r(x) = y(x) - p_n(x) \frac{x^{\sigma_r}}{\Gamma(1+\sigma_r)} - \sum_{j=0}^{r} p_{n-1-j}(x) \frac{x^{\sigma_r - \sigma_j}}{\Gamma(1+\sigma_r - \sigma_j)}, \tag{3.4}$$

$$y(x) = J_r(x) = \frac{x^{\sigma_r}}{\Gamma(1+\sigma_r)} + \frac{1}{\Gamma(\sigma_n)} \int_0^x (x-t)^{\sigma_n - 1}\, \Phi_r(t)\, dt. \tag{3.5}$$

Условие $\gamma_0 > 1 - \gamma_n$ было использовано в представлении (2.33) функции $\omega(x)$, которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\omega_r(x) = \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \tilde{f}(x) - p_n(x) \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \left\{ \frac{x^{\sigma_r + \gamma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_r + \gamma_n)} \right\} -$$
$$- \sum_{j=0}^{r} p_{n-1-j}(x) \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \left\{ \frac{x^{\sigma_r - \sigma_j + \gamma_n - 1}}{\Gamma(\sigma_r - \sigma_j + \gamma_n)} \right\}. \tag{3.6}$$

Остается заметить, что представление (3.6) сохраняет силу и при условии (3.2), так как $\sigma_r - \sigma_j = \sum_{k=j}^{r} \gamma_j > 0$ $(0 \leqslant j \leqslant r)$ и $\sigma_r + \gamma_n = = \gamma_n + \sum_{j=0}^{r} \gamma_j$. Для завершения доказательства остается воспользоваться формулами (3.3)—(3.5) так же, как и в п. 5° § 2.

2°. В этом пункте мы докажем теорему о существовании и единственности решения задачи Коши (3.1) (и (2.17)) в классе $L_p(0, l)$. Для этого нам понадобится следующая простая

Лемма 3. *Если функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $L_p(0, l)$, $p \geqslant 1$, то при любом $\alpha > 0$ функция*

$$\varphi_\alpha(x) \equiv \frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} \varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \tag{3.7}$$

принадлежит тому же классу.

Действительно, если $p=1$, то уже было отмечено (§ 1, 1°), что $\varphi_\alpha(x) \in L_1(0, l)$. Если же $p > 1$, то для любого β $(0 < \beta < p\alpha)$, пользуясь неравенством Гельдера, получим

$$|\varphi_\alpha(x)|^p \leqslant \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)}\left(\int\limits_0^x \left\{(x-t)^{\frac{\beta-1}{p}} |\varphi(t)|\right\}(x-t)^{\alpha-1-\frac{\beta-1}{p}} dt\right)^p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma^p(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\beta-1} |\varphi(t)|^p dt \times \left(\int\limits_0^x (x-t)^{\frac{p\alpha-\beta}{p-1}} dt\right)^{p-1} =$$

$$= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma^p(\alpha)}\left(\frac{p-1}{p\alpha-\beta}\right)^{p-1} x^{p\alpha-\beta} \frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}} \{|\varphi(x)|^p\}. \tag{3.8}$$

Так как $|\varphi(x)|^p \in L_1(0, l)$ и $p\alpha - \beta > 0$, то остается сослаться на п. 1° § 1, откуда будет следовать, что

$$\frac{d^{-\beta}}{dx^{-\beta}} \{|\varphi(x)|^p\} \in L_1(0, l).$$

В силу неравенства (3.8) это равносильно утверждению леммы 3.

Теорема 5. *Пусть функции* $\{p_k(x)\}_0^n$ *принадлежат классу* $Lip\,1$ *на отрезке* $[0, l]$, *а функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[0, l]$ *и допускает представление* (2.28). *Если для некоторого целого* r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ *и* $p > 1$

$$\sum_{j=0}^{r} \gamma_j > \max\left\{1-\gamma_n, \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.9}$$

то задача (3.1) *имеет единственное непрерывное на* $(0, l]$ *решение* $y_r(x)$, *принадлежащее классу* $L_p(0, l)$.

Доказательство. Из условия (3.9), в частности, следует условие (3.2), и поэтому существует единственное решение $y_r(x) \in L_1(0, l)$ задачи (3.1), непрерывное на $(0, l)$. Таким образом, нам остается лишь доказать, что $y_r(x) \in L_p(0, l)$. С этой целью заметим, что $\sigma_r - \sigma_j = \sum\limits_{k=j}^{r} \gamma_k$ $(j = 0, 1, \cdots, r)$ и, согласно условию (3.9),

$$\sigma_r = \sum_{j=0}^{r} \gamma_j - 1 > -\frac{1}{p}. \tag{3.10}$$

Поэтому функция $\omega_r(x)$, определяемая формулой (3.4), принадлежит классу $L_p(0, l)$.

С другой стороны, поскольку, согласно формуле (2.22), ядро $W(x, t)$ интегрального уравнения Вольтерра (3.3) имеет слабую особенность и $\omega_r(x) \in L_p(0, l)$, то, воспользовавшись замечанием, приведенным в конце п. 3° § 2, мы заключаем, что $\Phi_r(x) \in L_p(0, l)$. Наконец, из формулы (3.5), ввиду условия (3.10), приходим к выводу, что $y_r(x) \in L_p(0, l)$, согласно лемме 3.

В дополнение к доказанной теореме отметим, что, если в теореме 5 условие (3.9) заменить более сильным условием

$$\gamma_0 > \max\left\{1-\gamma_n, \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.11}$$

то ее утверждение остается в силе и относительно решения

$$y(x) = \sum_{r=0}^{n-1} y_r^0 \, y_r(x) \tag{3.12}$$

общей задачи Коши (2.17).

3°. В заключение приведем явные решения специальной и общей задач Коши в классе $L_p(0, l)$ $(p > 1)$ для простейшего случая, когда

$$Ly = D^{\sigma_n} y - \lambda y, \tag{3.13}$$

где λ — произвольный параметр.

С этой целью введем следующие обозначения

$$\rho = \sigma_n^{-1} = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \gamma_j - 1 \right\}^{-1},$$

$$\mu_r = \sigma_r + 1 = \sum_{j=0}^{r} \gamma_j \quad (0 \leqslant r \leqslant n-1), \tag{3.14}$$

$$Y_r(x, \lambda) = x^{\mu_r - 1} E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu_r), \tag{3.15}$$

где, как обычно,

$$E_\rho(z;\ \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n/\rho)} \tag{3.16}$$

есть целая функция типа Миттаг-Лефлера.

Теорема 6. *Если при данном целом r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ и $p \geqslant 1$*

$$\mu_r > \max\left\{1 - \gamma_n, \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.17}$$

то функция $Y_r(x, \lambda)$ является решением специальной задачи Коши

$$D^{\sigma_n} y - \lambda y = 0,$$

$$D^{\sigma_k} y(x)\Big|_{x=0} = \begin{cases} 1, & \text{при } k = r \\ 0, & \text{при } k = 0, 1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, n-1 \end{cases} \tag{3.18}$$

в классе $L_p(0, l)$.

Доказательство. Во-первых, из определения (3.15) самой функции $Y_r(x, \lambda)$ следует, что при условии (3.17) она—из класса $L_p(0, l)$.

Заметив теперь, что имеет место разложение

$$Y_r(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\mu_r + \frac{m}{\rho} - 1}}{\Gamma\left(\mu_r + \frac{m}{\rho}\right)}, \tag{3.19}$$

докажем сперва, что при каждом r $(0 \leqslant r \leqslant n)$

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\mu_r - \mu_k + \frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1 + \mu_r - \mu_k + \frac{m}{\rho}\right)} \quad (k = 0, 1, \cdots, r). \tag{3.20}$$

В силу (3.19) для этого достаточно установить справедливость соотношений

$$D^{\sigma_k}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=\frac{x^{\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}\right)}. \tag{3.21}$$

$$(k=0,\ 1,\cdots,\ r;\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

С этой целью заметим, что в силу формулы (1.9) имеем

$$D^{\sigma_0}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=\frac{d^{-(1-\gamma_0)}}{dx^{-(1-\gamma_0)}}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=$$

$$=\frac{x^{\mu_r-\mu_0+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\mu_r-\mu_0+\frac{m}{\rho}\right)}\quad (m=0,\ 1,\ 2,\cdots), \tag{3.22}$$

поскольку $\gamma_0=\mu_0$. Таким образом, при $r=0$ формулы (3.21) справедливы.

Положим теперь, что $r\geqslant 1$. Тогда, заметив, что при любом k $(1\leqslant k\leqslant r)$

$$\mu_r-\sum_{j=0}^{k-1}\gamma_j=\mu_r-\mu_{k-1}\geqslant\mu_r-\mu_{r-1}=\gamma_r>0,$$

k-кратным применением формулы (1.9) получим

$$\frac{d^{\gamma_{k-1}}}{dx^{\gamma_{k-1}}}\cdots\frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=$$

$$=\frac{x^{\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}\right)}\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ r,\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots).$$

Поэтому

$$D^{\sigma_k}\left\{\frac{x^{\mu_r+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=\frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}}\left\{\frac{x^{\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\mu_r-\mu_{k-1}+\frac{m}{\rho}\right)}\right\}=$$

$$=\frac{x^{\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\mu_r-\mu_k+\frac{m}{\rho}\right)}\quad (k=1,\ 2,\cdots,\ r;\ m=0,\ 1,\ 2,\cdots),$$

откуда и из (3.22), очевидно вытекает справедливость совокупности всех формул (3.21).

Кстати, из разложений (3.20) следует еще, что

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda)\Big|_{x=0} = \begin{cases} 1, & \text{при } k=r, \\ 0, & \text{при } k=0, 1, \cdots, r-1. \end{cases} \tag{3.23}$$

В этом легко убедиться, заметив, что

$$D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(1+\frac{m}{\rho}\right)} \tag{3.20'}$$

и, что при $0 \leqslant k \leqslant r-1$

$$\mu_r - \mu_k + \frac{m}{\rho} \geqslant \mu_r - \mu_{r-1} = \gamma_k > 0 \quad (m = 0, 1, 2, \cdots).$$

Вычислим теперь производные

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda) \quad (k = r+1, \cdots, n),$$

полагая опять число r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$ произвольным.

Пусть сперва $r = n-1$, из (3.20) имеем

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_{n-1}} Y_{n-1}(x, \lambda) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\frac{m}{\rho}\right)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1} x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}+\frac{m}{\rho}\right)}.$$

Пользуясь далее формулой (1.9), будем иметь отсюда

$$D^{\sigma_n} Y_{n-1}(x, \lambda) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_{n-1}} Y_{n-1}(x, \lambda) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{m+1} \frac{d^{-(1-\gamma_n)}}{dx^{-(1-\gamma_n)}} \left\{ \frac{x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho}+\frac{m}{\rho}\right)} \right\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{m+1} x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-\gamma_n}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\rho}-\gamma_n+\frac{m}{\rho}\right)} =$$

$$= \lambda x^{\mu_{n-1}-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_{n-1}+\frac{m}{\rho}\right)} = \lambda Y_{n-1}(x, \lambda), \tag{3.24}$$

поскольку, в силу (3.14) и (3.15),

$$\frac{1}{\rho} - \gamma_n = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j - 1 = \mu_{n-1} - 1.$$

Итак, функция $Y_{n-1}(x, \lambda)$ является решением задачи Коши (3.18) при $r = n-1$.

Положим теперь, что $0 \leqslant r \leqslant n-2$ (и значит $n \geqslant 2$), и докажем формулы

$$D^{\sigma_k} Y_2(x, \lambda) = \\ = \lambda x^{\nu_k(r)-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\nu_k(r) + \frac{m}{\rho}\right)} \quad (k = r+1, \cdots, n), \tag{3.25}$$

где

$$\nu_k(r) = \mu_n + \mu_r - \mu_k. \tag{3.25'}$$

В самом деле, с одной стороны, при $k = r+1$ имеем

$$D^{\sigma_{r+1}} Y_r(x, \lambda) = \frac{d^{-(1-\gamma_{r+1})}}{dx^{-(1-\gamma_{r+1})}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda), \tag{3.26}$$

причем согласно (3.20)

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1} \cdot \lambda^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - 1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho} + \frac{m}{\rho}\right)}. \tag{3.27}$$

Так как, с другой стороны,

$$\frac{d^{-(1-\gamma_{r+1})}}{dx^{-(1-\gamma_{r+1})}} \left\{ \frac{x^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - 1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho} + \frac{m}{\rho}\right)} \right\} = \frac{x^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - \gamma_{r+1}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\rho} - \gamma_{r+1} + \frac{m}{\rho}\right)},$$

то ввиду равенства

$$\frac{1}{\rho} - \gamma_{r+1} = \mu_n + \mu_r - \mu_{r+1} - 1 = \nu_{r+1}(r) - 1$$

мы приходим к требуемой формуле (3.25) для случая $k = r+1$.

Убедимся далее в справедливости формулы (3.25) для остальных значений $k = r+2, \cdots, n$.

Для этого заметим сначала, что поскольку

$$D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) \equiv \frac{d^{-(1-\gamma_r)}}{dx^{-(1-\gamma_r)}} \frac{d^{\gamma_r - 1}}{dx^{\gamma_r - 1}} \cdots \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} Y_r(x, \lambda),$$

то

$$\frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x, \lambda) = \frac{d^{\gamma_r}}{dx^{\gamma_r}} \frac{d^{\gamma_r - 1}}{dx^{\gamma_r - 1}} \cdots \frac{d^{\gamma_0}}{dx^{\gamma_0}} Y_r(x, \lambda),$$

и поэтому при $r+2 \leqslant k \leqslant n$

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda) = \frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d^{\gamma_k - 1}}{dx^{\gamma_k - 1}} \cdots \frac{d^{\gamma_r + 1}}{dx^{\gamma_r + 1}} \frac{d}{dx} D^{\sigma_r} Y_r(x\nu). \tag{3.28}$$

Далее имеем

$$\frac{d^{-(1-\gamma_k)}}{dx^{-(1-\gamma_k)}} \frac{d^{\gamma_k - 1}}{dx^{\gamma_k - 1}} \cdots \frac{d^{\gamma_r + 1}}{dx^{\gamma_r + 1}} \left\{ \frac{x^{\frac{m}{\rho} + \frac{1}{\rho} - 1}}{\Gamma\left(\frac{1}{\rho} + \frac{m}{\rho}\right)} \right\} =$$

$$= \frac{x^{\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-\sum_{j=r+1}^{k}\gamma_j}}{\Gamma\left(1+\cdots\frac{m}{\rho}+\frac{1}{\rho}-\sum_{j=r+1}^{k}\gamma_j\right)} = x^{\nu_k(r)-1}\frac{x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\nu_k(r)+\frac{m}{\rho}\right)}, \tag{3.29}$$

поскольку

$$\frac{1}{\rho} - \sum_{j=r+1}^{k}\gamma_j = \mu_n - 1 - \mu_k + \mu_r = \nu_k(r) - 1.$$

Наконец, из (3.27), (3.29) и (3.28) вытекают требуемые формулы (3.25) для значений $k = r+2, \cdots, n$.

Из формул (3.25)—(3.25′), в частности, следует, что

$$D^{\sigma_n} Y_r(x, \lambda) = \lambda x^{\mu_r - 1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\lambda^m x^{\frac{m}{\rho}}}{\Gamma\left(\mu_r + \frac{m}{\rho}\right)} = \lambda Y_r(x, \lambda), \quad 0 \leqslant r \leqslant n-2.$$

Вместе с (3.24) это означает, что все функции $\{Y_r(x, \lambda)\}_0^{n-1}$ являются решениями уравнения

$$D^{\sigma_n} y - \lambda y = 0,$$

причем, очевидно, что все они линейно независимы.

Кроме того, так как

$$\nu_k(r) - 1 > \mu_n + \mu_r - \mu_{n-1} - 1 = \mu_r + \gamma_n - 1 \quad (k = r+1, \cdots, n-1),$$

то условие (3.17) означает, в частности, что

$$\nu_k(r) - 1 > 0, \ k = r+1, \cdots, n-1.$$

Из этого замечания и из формулы (3.25) вытекает еще, что

$$D^{\sigma_k} Y_r(x, \lambda)/_{x=0} = 0 \ (k = r+1, \cdots, n-1). \tag{3.23′}$$

Таким образом, с учетом начальных условий (3.23) и (3.23′) можно утверждать, что функция $Y_r(x, \lambda)$ действительно будет решением специальной задачи Коши (3.18) в классе $L_p(0, l)$.

И здесь можно отметить еще, что, если в теореме 6 условие (3.17) заменить условием

$$\gamma_0 > \max\left\{1 - \gamma_n, \frac{p-1}{p}\right\}, \tag{3.17′}$$

то функция

$$Y(x, \lambda) = \sum_{r=0}^{n-1} \overset{0}{y_r}\, Y_r(x, \lambda)$$

будет решением общей задачи Коши

$$D^{\sigma_n} y - \lambda y = 0,$$

$$D^{\sigma_k} y(x)/_{x=0} = \overset{0}{y_k} \quad (k = 0, 1, \cdots, n-1). \tag{3.18′}$$

Наконец, отметим также, что единственность каждого решения $\{Y_k(x, \lambda)\}_0^{n-1}$ либо решения $Y(x, \lambda)$ общей задачи (3.18) вытекает уже из теоремы 5.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Ереванский государственный
университет

Поступило 1.XI.1967

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ և Հ. Բ. ՆԵՐՍԵՍՅԱՆ

ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԱԾԱՆՑՅԱԼՆԵՐ ԵՎ ԿՈՇՈՒ ԽՆԴԻՐԸ ԿՈՏՈՐԱԿԱՅԻՆ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Կոտորակային ինտեգրո-դիֆերենցման հասկացությունը գտել է մի շարք նոր կիրառություններ այս հոդվածի հեղինակների որոշ աշխատանքներում։

Այս աշխատանքով հեղինակները սկսում են կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորների համար եզրային խնդիրներին նվիրված հետազոտությունների արդյունքների հրապարակումը։

Ներկա հոդվածի § 1-ում բերվում է Ռիման-Լիուվիլլի օպերատորների մի շարք հիմնական հատկությունների սիստեմատիկ շարադրանքը։

Այդ հատկությունները օգտագործված են § 2-ում, որը նվիրված է կոտորակային կարգի գծային դիֆերենցիալ օպերատորների համար Կոշու տիպի խնդրին։ Այստեղ դրվում է Կոշու խնդրին համապատասխանող խնդիրը, և մի քանի օժանդակ լեմմաների օգնությամբ ապացուցվում է հիմնական 4-րդ թեորեման, $L_p(0,l)$ ֆունկցիաների դասում խնդրի լուծման գոյության և միակության մասին։

Եզրափակող § 3-ում սկզբում բերվում է 4-րդ թեորեմայի մի ճշգրտում, որը վերաբերվում է ֆունկցիաների $L_p(0, l)$ $(p > 1)$ դասում նույն խնդրի լուծման գոյության բավարար պայմաններին։ Վերջում բերվում է կոտորակային կարգի դիֆերենցիալ օպերատորի կարևոր օրինակ, որի համար Կոշու տիպի խնդրի լուծումը գրվում է բացահայտ տեսքով, որպես Միտտագ-Լեֆֆլերի տիպի $E_\rho(z; \mu)$ ֆունկցիաների գծային կոմբինացիա։

M. M. DŽRBAŠIAN and A. B. NERSESIAN

FRACTIONAL DERIVATIVES AND THE CAUCHY PROBLEM FOR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FRACTIONAL ORDER

Summary

The concept of fractional integro-differentiation has found a number of applications in the earlier papers of the present authors.

With this paper we begin the publication of our results in the field of boundary problems for differential operators of fractional order.

The § 1 of the present paper is devoted to the treatment of a number of basic properties of Rieman-Liuvill operator.

These properties are used in § 2, which is devoted to the Cauchy type problem for linear differential operators of fractional order. Here the analog of the Cauchy problem is formulated and with the aid of a number of lemma the basic theorem 4 is proved, which states the existence and uniqueness of the solution in the class $L_1(0, l)$.

The concluding § 3 containes a modification of the theorem 4, which introduces some sufficient conditions for the existence of the solution for the same problem in the class $L_p(0, l)$ $(p > 1)$.

An important example of a differential operator of fractional order for which the solution of the Cauchy type problem may be written explicitly as a linear combination of Mittag-Lefler type functions $E_\rho(z; \mu)$ is presented.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*. Критерий разложимости функций в ряды Дирихле, ИАН АрмССР, физ.-мат. науки, 11, № 5, 1958, 85.
2. *М. М. Джрбашян*. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, ИАН СССР, сер. матем., 19, 1955, 133—180.
3. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Изд. „Наука", 1966.
4. *М. М. Джрбашян* и *А. Б. Нерсесян*. Разложения по специальным биортогональным системам, и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды ММО, 10, 1961, 89—179.
5. *J. D. Tamarkin*. On integrable solutions of Abel's integral equation, Ann. of Math., (2) 31, 1930, 214—228.
6. *Р. Трикоми*. Интегральные уравнения, М., 1960.