ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

С. Е. МАРКОСЯН

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ БАЗЫ ДУГ КОНЕЧНЫХ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

Пусть дан конечный ориентированный граф* (ограф) $L = (X, U; P)$. Условие А. Пусть в L существует два подграфа $L_1 = (X_1, U_1; P)$ и $L_2 = (X_2, U_2; P)$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) L_1 и L_2 — бисвязные подграфы;

2) $X_1 \cap X_2 = \varnothing$;

3) $|U_{1,2}| \geqslant 2$, $U_{1,2}$ — множество дуг, идущих из вершин множества X_1 в вершины множества X_2;

4) в суграфе $(X, U \setminus U_{1,2}, P_{1,2})$ выполнено (см. рис. 1)

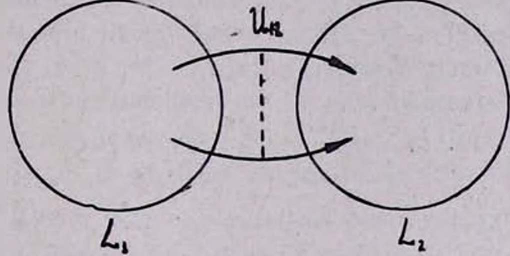

Рис. 1. Усл. А.

$$\forall x_1 \in X_1 \ \forall x_2 \in X_2 \ \overline{D}_{U \setminus U_{1,2}} (x_1, x_2),$$

где $D_{U \setminus U_{1,2}} (x_1, x_2)$ — отношение достижимости.

Теорема. *Если в конечном ориентированном графе $L = (X, U; P)$ не выполнено условие A, то ограф обладает единственной базой дуг.* Мы докажем, что неединственность баз дуг влечет условие А.

Лемма. *Пусть конечный ограф $L = (X, U; P)$, удовлетворяет следующему условию B: в L существуют база дуг W, два подграфа $L_1 = (X_1, U_1; P)$, $L_2 = (X_2, U_2; P)$ такие, что*

1) *L_1 и L_2 — бисвязные подграфы,*

2) *$X_1 \cap X_2 = \varnothing$,*

3) *$W_1 = W \cap U_1$ является базой подграфа L_1,*

4) *$\exists w \in W \exists x_1 \in X_1 \exists x_2 \in X_2 \, P(x_1, w, x_2)$;*

5) *если $w_0 \in W$ — дуга, для которой $\exists x_1 \in X_1 \exists x_2 \in X_2 \, P(x_1, w_0, x_2)$, то в суграфе $(X, U \setminus w_0, P_0)$ выполнено $\exists x_1 \in X_1 \exists x_2 \in X_2 \, D_{W \setminus w_0} (x_1, x_2)$; тогда L удовлетворяет условию A.*

---

* Мы придерживаемся терминологии и обозначений книги [2].

Доказательство леммы. Из пункта 5) следует существование пути, отличного от w_0 и соединяющего вершину $c \in X_1$ с вершиной $d \in X_2$. Обозначим его через $[c, d]$. Можно предположить, что длина этого пути $l[c, d] > 1$, в противном случае лемма была бы доказана. Очевидно путь $[c, d]$ можно предположить простым. Так как подграфы L_1 и L_2 бисвязные, то в L_1 выполнено $D_{W_1}(a, c)$ в силу 3), а в $L_2 - D_{u_2}(d, b)$, значит существуют простые пути $[a, c]$ и $[d, b]$. Дуги $[a, c]$ принадлежат W_1, а дуги $[d, b]$ принадлежат U_2. Простые пути $[a, c]$, $[c, d]$ и $[d, b]$ составляют простой путь $[a, c, d, b]$. Обозначим через z вершину, удовлетворяющую условию

$$(z \in [c, b]) \,\&\, (D_{W \setminus w_0}(c, z)) \,\&\, [\forall x \in [c, b] \, (D_{W \setminus w_0}(c, x) \to l[z, b] \leqslant l[x, b])], \quad (*)$$

где $[z, b]$, $[x, b] \subset [c, b]$, а $l[\cdots]$ означает длину пути $[\cdots]$. Вершина z не может совпадать с вершиной b, так как W — база. Возьмем путь $[c, z]$, дуги которого принадлежат $W \setminus w_0$. Отрезок пути $[c, b]$, соединяющий вершины z и b имеет длину, большую нуля: $l[z, b] > 0$, то есть существует дуга v, $v \in [z, b]$ и $(v \bar{\in} W) \,\&\, P(z, v, t)$. Имеем $D_U(z, t) \to D_W(z, t)$. Но пути, соединяющие z и t, содержат дугу w_0, в противном случае условие (*) не выполняется, а именно $\forall x \in [c, b]$ $(D_{W / w_0}(c, x) \to l[z, b] \leqslant [x, b])$ не имеет место при $x = t$.

Рассмотрим один такой путь $[z, t] = [z, a, b, t]$. Ясно, что z может совпасть с вершиной c, а t — с вершиной b. Составим подграфы $L_1^{(1)} = (X_1^{(1)}, U_1^{(1)}; P)$ и $L_2^{(1)} = (X_2^{(1)}, U_2^{(1)}; P)$, где $L_1^{(1)} = L_1 \cup \mu$*, $\mu = [c, z, a] = [c, z]\,[z, a]$** $[z, a]$ — отрезок пути $[z, a, b, t]$;

$$L_2^{(1)} = \begin{cases} L_2 \cup \nu, \text{ если } X_\mu \cap X_2 = \varnothing & \text{(см. рис. 2)}, \\ \nu, \text{ если } X_\mu \cap X_2 \neq \varnothing & \text{(см. рис. 3 и 4)}, \end{cases}$$

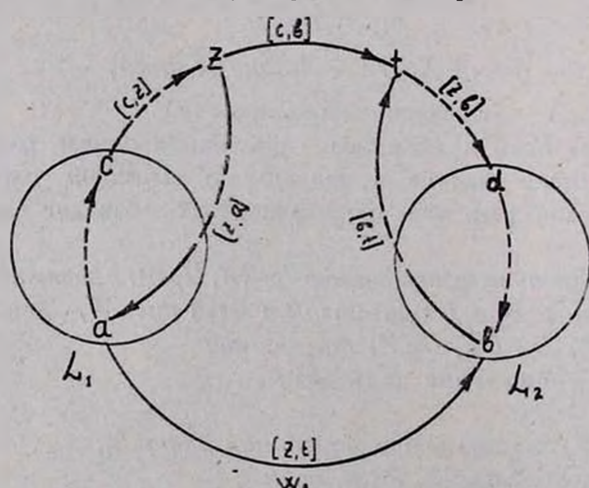

Рис. 2.

* Под $L_1 \cup \mu$ понимается подграф, порожденный множеством $X_1 \cup X_\mu$, X_μ — множество вершин, принадлежащих пути μ.

** Запись $[\cdots]\,[\cdots]$ означает путь, состоящий из двух путей $[\cdots]$ и $[\cdots]$.

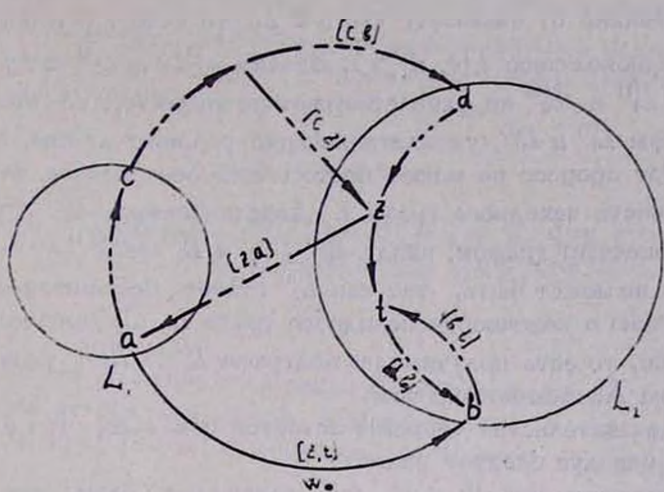

Рис. 3.

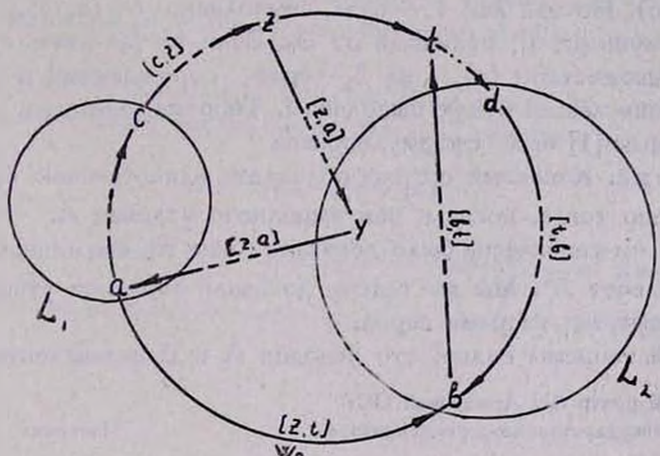

Рис. 4.

X_μ — множество вершин, принадлежащих пути μ, а $\nu=[t, b, t]=[t, b]$ $[b, t]$,$[t, b]$—отрезок пути $[z, b]$, значит и $[c, b]$, а $[b, t]$ отрезок из $[z, t]$.

Докажем, что $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ удовлетворяют всем условиям леммы.

Бисвязность $L_1^{(1)}$ следует из того, что $c, a \in X_1$ и из бисвязности L_1, а бисвязность $L_2^{(1)}$ — из бисвязности ν и L_2 и из того, что $t \in X_2 \cap \cap X_\nu \neq \varnothing$, $X_\nu \cap X_1^{(1)} = \varnothing$, так как $\overline{D}_{W/w_0}(c, t)$, откуда следует $X_1^{(1)} \cap \cap X_2^{(1)} = \varnothing$, то есть 2); $W_1^{(1)} = W \cap U_1^{(1)}$ является базой $L_1^{(1)}$; условие 4) выполнено при $w = w_0$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $X_1 = X_1^{(1)}$, $X_2 = X_2^{(1)}$; условие 5) следует из существования дуги v, так как $z \in X_1^{(1)}$, а $t \in X_2^{(1)}$.

Заметим, что имеет место либо а) $L_1^{(1)} \supset L_1$ либо б) Если $L_1^{(1)} = L_1$, то $L_2^{(1)} \supset L_2$;

а) очевидно б) означает, что $\mu \subset L_1$, то есть $z = c$ и $t \,\bar{\in}\, X_2$, благодаря предположению $l\,[c, d] > 1$. Значит $v \,\bar{\in}\, L_2$ и $L_2^{(1)} \supset L_2$.

Если $L_1^{(1)}$ и $L_2^{(1)}$ не удовлетворяют условию A, то построим новые подграфы $L_1^{(2)}$ и $L_2^{(2)}$, удовлетворяющие условию леммы, и так далее. Но этот процесс не может повторяться бесконечное число раз, в силу конечности исходного графа L. Действительно, $L_1^{(n)}$ не может стать бесконечным графом, ввиду $L_1^{(n)} \subseteq L$, а $L_1^{(n)} = L_1^{(n+1)} = \cdots = L_1^{(n+k)} = = \cdots$ тоже не может быть, так как $L_2^{(n)}$ станет бесконечным вопреки предположению о конечности исходного графа L. Следовательно процесс конечен, то есть получим два подграфа $L_1^{(n_0)}$ и $L_2^{(n_0)}$, удовлетворяющих условию A. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы остается показать, что из неединственности баз дуг следует условие B.

Предположим, что W и V две различные базы дуг орграфа $L = (X, U; P)$. Значит существует w_0 такое, что $(w_0 \in W) \mathbin{\&} (w_0 \,\bar{\in}\, V) \mathbin{\&} \mathbin{\&} P\,(a, w_0, b)$. Но так как V — база, выполнено $D_V\,(a, b)$, то есть существует путь $[a, b]$, отличный от w_0. Если за L_1 взять граф, порожденный множеством $\{a\}$, а за L_2 — граф, порожденный множеством $\{b\}$, то условия леммы будут выполнены. Теорема доказана.

Барздиным [1] была сформулирована

Теорема. Конечный орграф обладает единственной базой дуг тогда и только тогда, когда в нем выполнено условие $\overline{A}$.

Однако им фактически было доказано лишь то, что единственность базы дуг влечет $\overline{A}$*. Мы же теперь доказали обратное утверждение, так что упомянутая теорема верна.

Из этой теоремы видно, что условия A и B эквивалентны.

Вычислительный центр АН Армянской ССР
и Ереванского государственного университета

Поступило 1.VII.1967

Ս. Ե. ՄԱՐԿՈՍՅԱՆ

ՕՐԻԵՆՏԱՑԻԱ ՈՒՆԵՑՈՂ ՎԵՐՋԱՎՈՐ ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԱՂԵՂՆԵՐԻ ԲԱԶԱՅԻ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՀԱՅՏԱՆԻՇ

Ամփոփում

Օրիենտացիա ունեցող կամայական վերջավոր գրաֆի աղեղների բազայի միակության հայտանիշ մինչև այժմ գոյություն չուներ։

Քյոնիգի կողմից տրված էին միայն բավարար պայմաններ, իսկ Բարզդինի կողմից—անհրաժեշտ պայման։

Այս հոդվածում ապացուցված է Բարզդինի կողմից տրված անհրաժեշտ պայմանի բավարարությունը, որի շնորհիվ ստացված է աղեղների բազայի

* См. также [2], глава 4, § 34.

միակության հայտանիշ օրիենտացիա ունեցող կամայական վերջավոր գրաֆի համար։ Հոդվածի վերջում բերված է Բարզդինի պայմանին էկվիվալենտ պայման, որը ավելի պիտանի է գործնական հարցերում։

S. E. MARKOSYAN

THE CRITERIUM OF SINGULARITY OF BASES OF ARCS FOR FINITE ORIENTED GRAPHS

S u m m a r y

Till now no criterium of singularity of bases of arcs for arbitrary finite oriented graphs was known. König has outlined only some sufficient conditions and the set of necessary conditions was proposed by Barzdin.

In the present article, the sufficientness of the conditions, the necessity of which was shown by Barzdin, is proved, and thus the criterium of singularity of bases of arcs for arbitrary finite oriented graph is obtained.

At the end of the article, the conditions which are equivalent to Barzdin's and are more applicable to practical problems are proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Я. М. Барздинь.* Проблема базиса направленных графов, Уч. зап. Латв. унив., 28 1959, 33—34.
2. *А. А. Зыков.* Теория конечных графов, 1, „Наука", 1967, Новосибирск.