

В. Г. ВЕРДИЕВ

# О РАСПОЛОЖЕНИИ $(e)$ -ТОЧЕК В СЛУЧАЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ МНОГОЧЛЕНАМИ ПО СИСТЕМЕ ФУНКЦИЙ ЧЕБЫШЕВА

1. Пусть функции  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1}$  непрерывно дифференцируемы на отрезке  $[a, b]$ . Будем писать  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1} \in T_{n+1}^*$ , если любые многочлены  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$ ,  $P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} b_k \varphi_k(x)$   $\left( \sum_{k=0}^n a_k^2 > 0, \sum_{k=0}^{n+1} b_k^2 > 0 \right)$  и их

производные  $P'_n(x)$ ,  $P'_{n+1}(x)$  имеют, соответственно, не более  $n$  и  $n+1$  корней. Для любой непрерывной функции  $f(x)$  на  $[a, b]$ , как обычно определяется норма

$$\|f\|_{[a,b]} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

Через  $E_n(f)$  и  $E_{n+1}(f)$  обозначим наилучшие приближения функции  $f(x)$  посредством многочленов по системам  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$  и  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1} \in T_{n+1}^*$  на отрезке  $[a, b]$ , т. е.

$$E_n(f) = \min_{P_n} \|f - P_n\|_{[a,b]} \text{ и } E_{n+1}(f) = \min_{P_{n+1}} \|f - P_{n+1}\|_{[a,b]}.$$

Обозначим через  $P_n^*(x)$  и  $P_{n+1}^*(x)$  многочлены наилучшего приближения, соответственно, порядка  $n$  и  $n+1$  для функции  $f(x)$ , так что

$$E_n(f) = \|f - P_n^*\|, \quad E_{n+1}(f) = \|f - P_{n+1}^*\|.$$

Назовем  $(e)$ -точкой многочлена  $P_n^*(x)$  любую точку  $u \in [a, b]$ , для которой

$$|f(u) - P_n^*(u)| = E_n(f).$$

Известно, что многочлен  $P_n^*(x)$  имеет не менее  $n+2$   $(e)$ -точек  $u_0, u_1, \dots, u_{n+1}$  ( $a \leq u_0 < u_1 < \dots < u_{n+1} \leq b$ ), в которых значения функции  $f(x) - P_n^*(x)$  попеременно положительны и отрицательны.

С. Пашковский [1], [2] указал отрезки  $[r_k, s_k] \subset [a, b]$ , которым принадлежат  $(e)$ -точки  $u_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n+1$ ) в случае, когда приближение осуществляется алгебраическими многочленами.

2. В настоящей заметке дается обобщение теоремы С. Пашковского на случай, когда рассматривается приближение многочленами по системе  $T_{n+1}^*$ . С одной стороны, мы следуем обозначениям и плану С. Пашковского [1], [2], с другой — мы опираемся на метод и результаты В. С. Виденского [3], [4], [5], касающиеся обобщения теоремы С. Davis'a [6] (см. также Mycielski J. and Paszkowski S. [7], Kudela J. [8]).

Не нарушая общности, в дальнейшем, положим  $a = -1$ ,  $b = 1$ . Через  $z_1^p, z_2^p, \dots, z_{n+1}^p$  будем обозначать корни многочлена  $P_{n+1}(x)$ . Индекс  $p$  при  $z_k$  показывает, что  $\{z_k^p\}_{k=1}^{n+1}$  — корни многочлена  $P_{n+1}(x)$ .

Обозначим через  $\mathcal{W}_{n+1, h}$  класс многочленов по системе  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1} \in T_{n+1}^*$ , удовлетворяющих следующим условиям:

а) все корни  $z_1^p, z_2^p, \dots, z_{n+1}^p$  многочлена  $P(x) \in \mathcal{W}_{n+1, h}$  вещественны и  $-1 < z_1^p < z_2^p < \dots < z_{n+1}^p < 1$ ;

б)  $\min_{0 < k < n+1} \|P\|_{[z_k, z_{k+1}]} > h \|P\|_{[-1, 1]}$ , где  $z_0 = -1$ ,  $z_{n+2} = 1$  и  $h \in (0, 1]^*$ .

Точки, в которых  $P'(x) = 0$  для  $P(x) \in \mathcal{W}_{n+1, h}$  будем обозначать через  $v_1^p, v_2^p, \dots, v_n^p$  ( $-1 = v_0^p < v_1^p < \dots < v_n^p < v_{n+1}^p = 1$ ).

Будем рассматривать многочлены  $(n+1)$ -го порядка  $\tau_{nkh}(x) \in \mathcal{W}_{n+1, h}$ , удовлетворяющие условиям

$$\tau_{nkh}(v_j^p) = \begin{cases} (-1)^{n+1-j} h & \text{для } j = 0, 1, \dots, k-1, \\ (-1)^{n+1-j} & \text{для } j = k, k+1, \dots, n+1; k = 0, 1, \dots, n+1. \end{cases}$$

Существование и единственность многочленов  $\tau_{nkh}(x)$  вытекает из результатов работ [3], [4], [5].

3. Докажем следующие леммы:

Лемма 1. Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  — два многочлена  $n+1$ -го порядка, а числа  $-1 = v_0^p < v_1^p < \dots < v_{n+1}^p = 1$  и  $-1 = v_0^q < v_1^q < \dots < v_{n+1}^q = 1$  являются, соответственно, точками экстремума многочленов  $P(x)$  и  $Q(x)$ . Если

$$P(v_i^p) = Q(v_j^q) \quad \text{при } i=0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1$$

и

$$P(v_j^p) > Q(v_j^q) \quad (j=1, 2, \dots, n),$$

то

$$v_i^p \leq v_j^q \quad \text{при } i=1, 2, \dots, j-1 \quad \text{и} \quad v_i^p \geq v_j^q \quad \text{при } i=j+1, \dots, n^{**}. \quad (1)$$

Доказательство. Укажем процесс перехода от многочлена  $P(x)$  к многочлену  $Q(x)$ , из которого будет следовать утверждение леммы, т. е. справедливость неравенств (1). Многочлен  $P(x)$  можно рассматривать как интерполяционный с узлами интерполяции в точках  $v_0^p, v_1^p, \dots, v_{n+1}^p$  и значениями  $P(v_0^p), P(v_1^p), \dots, P(v_{n+1}^p)$  (см. [5]). Так как  $P(v_j^p) > Q(v_j^q)$ , то в промежутке  $(z_j^p, z_{j+1}^p)$  найдутся две точки (именно две точки, так как система  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{n+1} \in T_{n+1}^*$   $\mu$  и  $\eta$ , причем  $\mu < \eta$  такие, что  $P(\mu) = Q(v_j^q) = P(\eta)$ ). Выберем точку  $\xi_j = 0,5 (\mu + \eta)$ . Применяя метод доказательства теоремы 1 из [5] легко установить, что существуют многочлен  $P_1(x)$  и точки

$$-1 = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{j-1}, \xi_{j+1}, \dots, \xi_n, \xi_{n+1} = 1$$

\* Индекс  $p$  при  $z_k$  будем иногда для удобства опускать в тех местах, где это не может вызывать сомнений.

\*\* Аналогичный результат был получен для алгебраических многочленов в монографии Е. В. Вороновской. Метод функционалов и его приложения, Л., 1963.

такие, что

$$-1 = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_{j-1} < \xi_j < \xi_{j+1} < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = 1,$$

$P_1(\xi_k) = P(v_k^p)$  при  $k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1$  и  $P_1(\xi_j) = Q(v_j^q)$ ,

причем

$$P_1'(\xi_k) = 0 \text{ при } k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n.$$

Если точка  $\xi_j$  является точкой экстремума, то  $P_1(x) \equiv Q(x)$ , если же  $\xi_j$  не является точкой экстремума, то  $\max |P_1(x)| > |Q(v_j^q)|$ . Тогда  $[x_j^p, x_{j+1}^p]$

опять найдутся две точки  $\mu_1, \eta_1$  и  $\mu_1 < \eta_1$  такие, что  $P_1(\mu_1) = Q(v_j^q) = P_1(\eta_1)$ . Выберем далее  $\xi'_j = 0,5(\mu_1 + \eta_1)$ . Существуют многочлен  $P_2(x)$  и точки  $-1 = \xi'_0, \xi'_1, \dots, \xi'_{j-1}, \xi'_{j+1}, \dots, \xi'_n, \xi'_{n+1} = 1$  такие, что  $\xi'_0 < \xi'_1 < \dots < \xi'_{j-1} < \xi'_j < \xi'_{j+1} < \dots < \xi'_n < \xi'_{n+1}$ ;  $P_2(\xi'_k) = P(v_k^p)$  при  $k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1$  и  $P_2(\xi'_j) = Q(v_j^q)$ , причем  $P_2'(\xi'_k) = 0$  при  $k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n$ . Если  $P_2'(\xi'_j) = 0$ , то  $P_2(x) \equiv Q(x)$ , если же  $P_2'(\xi'_j) \neq 0$ , то  $P_2(x) \not\equiv Q(x)$ .

Теперь покажем, что

$$\xi_1 < \xi'_1, \quad \xi_2 < \xi'_2, \dots, \quad \xi_{j-1} < \xi'_{j-1}; \quad \xi_{j+1} > \xi'_{j+1}, \dots, \quad \xi_n > \xi'_n. \quad (2)$$

Рассмотрим многочлен  $P_2(x)$  как непрерывный образ многочлена  $P_1(x)$ , соответствующий непрерывному перемещению точки  $\xi_j$  в  $\xi'_j$ . Сместим точку  $\xi_j$  в точку  $\bar{\xi}_j$  и будем считать, что  $|\xi_j - \bar{\xi}_j|$  настолько мала, насколько нам понадобится. В  $(v_0^p, v_j^p)$  и  $(v_j^p, v_{n+1}^p)$  однозначно найдутся  $n-1$  точек  $\bar{\xi}_1 < \bar{\xi}_2 < \dots < \bar{\xi}_{j-1} < \bar{\xi}_{j+1} < \dots < \bar{\xi}_n$ , которые представляют собой соответственно малые смещения точек  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_{j-1} < \xi_{j+1} < \dots < \xi_n$  таких, что многочлен  $\bar{P}(x)$  удовлетворяет равенствам

$$\bar{P}(\bar{\xi}_k) = P(v_k^p) \text{ при } k = 0, 1, \dots, j-1, j+1, \dots, n+1; \quad \bar{P}(\bar{\xi}_j) = Q(v_j^q) \text{ и}$$

$$\bar{P}'(\bar{\xi}_k) = 0 \text{ при } k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n,$$

где  $\bar{\xi}_0 = -1, \bar{\xi}_{n+1} = 1$ . Если  $|\bar{\xi}_k - \xi_k|$  при  $k = 1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$  достаточно малы, то

$$\xi_1 < \bar{\xi}_1, \dots, \xi_{j-1} < \bar{\xi}_{j-1}; \quad \xi_{j+1} > \bar{\xi}_{j+1}, \dots, \xi_n > \bar{\xi}_n. \quad (3)$$

Действительно, если бы при некотором  $k$  для  $k < j$   $\bar{\xi}_k < \xi_k$  или для  $k > j$   $\bar{\xi}_k > \xi_k$ , то многочлен  $P_1(x) - \bar{P}(x)$  имел бы в окрестности точки  $\xi_k$  два корня. В окрестности же каждого из  $\xi_j$  он имеет хотя бы один корень, и, следовательно, общее число его корней в  $[v_0^p, v_{n+1}^p]$  было бы  $> n+2$ , так что на  $[-1, 1]$  многочлен  $P_1(x) - \bar{P}(x)$  имел



бы  $> n + 2$  корней. Этим доказаны неравенства (2), так как неравенства (3) не могут нарушаться при  $\xi_j \rightarrow \xi_j^*$ .

Ясно, что если продолжим процесс по той же схеме, то получим последовательность многочленов  $\{P_m(x)\}$  с соответствующими точками экстремума  $\{\xi_k^{(m)}\}$  ( $k=1, 2, \dots, j-1, j+1, \dots, n$  и  $\xi_0^{(m)} = -1$ ,  $\xi_{n+1}^{(m)} = 1$ ), которые при фиксированном  $k$  будут монотонными и ограниченными, следовательно, существуют пределы  $\lim_{m \rightarrow \infty} \xi_k^{(m)} = \xi_k^q$ , а последовательность многочленов  $\{P_m(x)\}$  сходится к  $Q(x)$ . Таким образом, лемма 1 доказана.

**Следствие 1.** Пусть  $P(x)$  и  $Q(x)$  — два многочлена из  $W_{n+1, h}$ , которые удовлетворяют условиям леммы 1. Если

$$[r_k^p, s_k^p] = [z_k^p, z_{k+1}^p] \cap \{x: |P(x)| > h \|P\|_{[-1, 1]}\},$$

$$[r_k^q, s_k^q] = [z_k^q, z_{k+1}^q] \cap \{x: |Q(x)| > h \|Q\|_{[-1, 1]}\}$$

при  $k=0, 1, \dots, n+1$ , то

$$r_k^q > r_k^p \text{ при } k=1, 2, \dots, j \text{ и } r_k^q \leq r_k^p \text{ при } k=j+1, \dots, n+1.$$

**Следствие 2.** Если многочлены  $P(x)$  и  $Q(x)$  удовлетворяют условиям леммы 1, то корни их удовлетворяют следующим неравенствам:

$$z_i^q > z_i^p \text{ при } i=1, 2, \dots, j \text{ и } z_i^q \leq z_i^p \text{ при } i=j+1, \dots, n+1.$$

Ясно, что если

$$\frac{E_{n+1}(f)}{E_n(f)} = g < 1, \quad (4)$$

то многочлены наилучшего приближения  $P_n^*(x)$  и  $P_{n+1}^*(x)$  для непрерывной функции  $f(x)$  будут, соответственно, порядка  $n$  и  $n+1$ .

**Лемма 2.** Если  $E_n(f)$  и  $E_{n+1}(f)$  удовлетворяют неравенству (4), то для (е)-точек  $u_k^n$  ( $k=0, 1, \dots, n+1$ ) имеют место следующие соотношения:

$$u_k^n \in [z_k^p, z_{k+1}^p] \cap \{x: |P_n^*(x) - P_{n+1}^*(x)| \geq h \|P_n^* - P_{n+1}^*\|_{[-1, 1]}\},$$

где  $z_k^p$  — корни многочлена  $P(x) = P_n^*(x) - P_{n+1}^*(x)$ ,

$$h = \frac{E_n(f) - E_{n+1}(f)}{E_n(f) + E_{n+1}(f)}. \quad (x)$$

**Доказательство.** Легко заметить, что  $P(x) = P_n^*(x) - P_{n+1}^*(x)$  имеет  $n+1$  различных корней  $z_i^p$  ( $i=1, 2, \dots, n+1$ ), и (е)-точки  $u_k^n$  ( $k=0, 1, \dots, n+1$ ) принадлежат отрезкам  $[z_k^p, z_{k+1}^p]$ . Из определения (е)-точки для многочлена  $P_n^*(x)$  следует

$$|f(u_k^n) - P_{n+1}^*(u_k^n)| \leq E_{n+1}(f)$$

и

$$|f(u_k^n) - P_n^*(u_k^n)| = E_n(f).$$

Далее имеем

$$|P_n^*(u_k^n) - P_{n+1}^*(u_k^n)| > |P_n^*(u_k^n) - f(u_k^n)| - |P_{n+1}^*(u_k^n) - f(u_k^n)| > E_n(f) - E_{n+1}(f)$$

при  $k = 0, 1, \dots, n+1$ . Так как

$$\|P_n^* - P_{n+1}^*\| \leq \|P_n^* - f\| + \|P_{n+1}^* - f\| \leq E_n(f) + E_{n+1}(f),$$

то

$$\frac{|P_n^*(u_k^n) - P_{n+1}^*(u_k^n)|}{\|P_n^* - P_{n+1}^*\|_{[-1, 1]}} > \frac{E_n(f) - E_{n+1}(f)}{E_n(f) + E_{n+1}(f)} = h$$

( $k = 0, 1, \dots, n+1$ ).

Откуда следует утверждение леммы 2.

**Лемма 3.** Если  $P(x) \in \mathcal{W}_{n+1, h}$ , где  $h$  определяется формулой (х) и

$$[r_k^p, s_k^p] = [z_k^p, z_{k+1}^p] \cap \{x : |P(x)| > h \|P\|_{[-1, 1]}\},$$

где  $k = 0, 1, \dots, n+1$ , то

$$\inf_{p \in \mathcal{W}_{n+1, h}} r_k^p = t_{k, h}, \quad (5)$$

$$\sup_{p \in \mathcal{W}_{n+1, h}} s_k^p = t_{n+1-k, h}, \quad (6)$$

где  $t_{k, h}$  — корень уравнения  $|\tau_{nkh}(x)| = h$ , который лежит на отрезке  $[z_k^p, v_k^p]$ .

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть многочлены  $P(x) \in \mathcal{W}_{n+1, h}$ , для которых  $\|P\|_{[-1, 1]} = 1$  и  $P(1) > 0$ , так как от умножения многочлена  $P(x)$  на число, отличное от нуля, числа  $r_k^p$  и  $s_k^p$  не изменяются. Нужно установить, что если  $P(x) \in \mathcal{W}_{n+1, h}$  и  $P(x) \neq \tau_{nkh}(x)$ , то  $r_k^p > t_{k, h}$ . В самом деле, если хоть одно экстремальное значение многочлена  $P(x)$  в точке  $v_i^p$  отлично от экстремального значения многочлена  $\tau_{nkh}(x)$  в соответствующей точке  $v_i^p$ , то по следствию 1 будут справедливы требуемые неравенства  $r_k^p > t_{k, h}$ .

Для установления равенств (6) достаточно рассмотреть вместо многочлена  $\tau_{nkh}(x)$  многочлен  $\tau_{nkh}(-x)$  и провести рассуждения, аналогичные приведенным выше.

**Лемма 4.** Для любых  $n$  и  $k$   $t_{k, h}$  есть возрастающая функция от  $h$ .

**Доказательство** леммы 4 аналогично доказательству теоремы 9:5 из [2], стр. 82.

4. Теперь докажем следующую теорему.

**Теорема.** Для всех непрерывных функций  $f(x)$ , у которых наилучшие приближения  $E_n(f)$  и  $E_{n+1}(f)$  удовлетворяют неравенству (4), имеют место неравенства:

$$\begin{cases} -1 \leq u_0^n \leq -t_{n+1, c}, \\ t_{k, c}^n \leq u_k^n \leq -t_{n+1-k, c} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ t_{n+1, c}^n \leq u_{n+1}^n \leq 1, \quad \text{где } c = \frac{1-g}{1+g}. \end{cases} \quad (7)$$

**Доказательство.** Из лемм 2 и 3 мы имеем неравенства

$$-1 \leq u_0^n \leq t_{n+1, h},$$

$$t_{k, h} \leq u_k^n \leq -t_{n+1-k, h} \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

$$t_{n+1, h} \leq u_{n+1}^n \leq 1,$$

где  $h = \frac{E_n(f) - E_{n+1}(f)}{E_n(f) + E_{n+1}(f)}.$

Так как  $E_{n+1}(f)/E_n(f) \leq g < 1$ , то мы имеем  $h > \frac{1-g}{1+g}.$

Из леммы 4 следует справедливость неравенств (7).

5. Заметим, что неравенства (7) для (e)-точек справедливы также в случае, когда приближение осуществляется для непрерывных периодических функций  $f(x)$  ( $f(a) = f(b)$ ) посредством многочленов  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$  по системе  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$  такой, что  $\varphi_k(a) = \varphi_k(b)$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  (см. [4], [5]).

Неравенства (7) установлены для класса многочленов  $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k \varphi_k(x)$  из  $T_{n+1}^*$ , но можно получить неравенства типа (7) при более слабых требованиях, налагаемых на систему  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$  (см. [5]). В частности, можно снять требование дифференцируемости системы  $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^n$ .

В заключение пользуюсь случаем выразить глубокую признательность моему научному руководителю проф. В. С. Виденскому за помощь и дружеское внимание.

Ленинградский электротехнический институт связи  
им. проф. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 16.VI.1966

Վ. Գ. ՎԵՐԴԻՆՎ

ԿԵՏՆԵՐԻ ՏՆՅԱՐԱՇԽՄԱՆ ՄԱՍԻՆ ԶԵՐԻՇԵՎԻ ՍԻՍՏԵՄԻ  
ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԵՆԵՐՈՎ ՄՈՏԱՐԿԱԿԱԼՈՒ ԴԵՊԳՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Այս աշխատանքում դիտված և այն բազմանդամի (e)—կետերի դասավորությունը, որոնք մոտարկվում են Չեբիշևի ֆունկցիաների սխառեմով: Ստացված անհավասարությունները բնութագրում են (e)—կետերի դասավորությունը, այն ենթադրությամբ, որ

$$E_{n+1}(f)/E_n(f) < 1.$$

Այս աշխատանքը ընդհանրացնում է Ս. Պաշկովսկու թեորեմը [1], [2]:



V. G. VERDIEV

ON THE LOCATION OF  $(e)$ -POINTS IN THE CASE OF APPROXIMATION BY CHEBYSHEV SYSTEM POLINOMIALS

## S u m m a r y

In this work the location of  $(e)$ -points of polynomials of the best approximation by Chebyshev function system is considered. Under the assumption that  $E_{n+1}(f)/E_n(f) < 1$ , the inequalities (7) are obtained which characterise the location of  $(e)$ -points. This result generalises the theorem of S. Paszkowski [1], [2].

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Ф. Пашковский. О расположении  $(e)$ -точек полиномов наилучшего приближения, ДАН СССР, 117, № 4, 1957, 576—577.
2. S. Paszkowski. The theory of unifom approximation, I. Nonasymptotic theoretica problems, Rozprawy matematyczne, 26, Warszawa, 1962.
3. В. С. Виденский. Об одном классе интерполяционных многочленов с незакрепленными узлами, ДАН СССР, 162, № 2, 1965, 251—254.
4. В. С. Виденский. Существование и единственность решения одной интерполяционной задачи, исследования по некоторым проблемам конструктивной теории функций, Л., 1965, Сборник научных трудов, ЛМИ, № 50, 29—41.
5. В. С. Виденский. Теорема существования многочлена с данной последовательностью экстремумов, ДАН СССР, 171, № 1, 1966, 17—20.
6. C. Davis. Extrema of a polynomial, Amer. Math. Monthly, 64, № 9, 1957, 679—680.
7. J. Mycielski and S. Paszkowski. A generalisation of Chebyshev polynomials, Bull. Acad. Polon. Sei., Sér. math., astr., phys., 8, № 7, 1960, 433—438.
8. Jan Kudśla. Construction des certains polynômes extrémaux, Zesz. nauk. Uniw. Jagiell. 1963, № 77, 31—36.