

А. М. СЕДЛЕЦКИЙ

# О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ, ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ПОЛИНОМОВ ДИРИХЛЕ

Функция  $f(z)$ , определенная в интервале  $(a_1, b_1) \supset [a, b]$  и удовлетворяющая уравнению

$$\int_a^b f(z+t) d\sigma(t) = 0, \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b), \quad (A)$$

называется периодической в среднем в интервале  $(a_1, b_1)$  (здесь  $\sigma(z)$  — некоторая функция, имеющая на  $[a, b]$  ограниченную вариацию).

Функции, периодические в среднем на всей оси, изучались в работах Дельсарта, Л. Шварца, Кахана и др. (см. по этому поводу [1]).

В работе [1] А. Ф. Леонтьев, рассматривая функции, периодические в среднем в интервале мнимой оси, ставит в соответствие каждой такой функции  $f(z)$  последовательность полиномов Дирихле

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{\mu z} d\mu, \quad \rho_k \uparrow +\infty, \quad (B)$$

где  $L(\mu) = \int_a^b e^{\mu t} d\sigma(t),$

$$\omega(\mu, \alpha, f) = e^{-\mu \alpha} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi f(\xi - \eta + \alpha) e^{\mu \eta} d\eta, \quad \alpha \in (a_1 - a, b_1 - b),$$

$|\mu| = \rho_k$  — окружность, на которой  $L(\mu) \neq 0$ .

Функция  $\omega$ , зависящая от параметра  $\alpha$ , названа А. Ф. Леонтьевым интерполирующей функцией для  $f(z)$ .

Последовательность (B) можно рассматривать и как последовательность частных сумм ряда

$$P_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \sum_{\substack{\mu \\ \rho_{k-1} < |\mu| < \rho_k}} P_{\nu}(\mu, z) e^{\mu z} \right), \quad \rho_0 = 0, \quad (C)$$

где член  $P_{\nu}(\mu, z) e^{\mu z}$  равен вычету функции  $\frac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{\mu z}$  (как функции переменного  $\mu$  (в точке  $\mu = \mu_{\nu}$  — нуле функции  $L(\mu)$ )).

В частном случае, когда

$$\sigma(z) = \begin{cases} 1, & z = -i\pi, \\ 0, & z \in (-i\pi, i\pi), \\ 1, & z = i\pi, \end{cases}$$

уравнение (A) принимает вид

$$f(z + i\pi) - f(z - i\pi) = 0$$

и, следовательно, рассматриваемая функция — периодическая с периодом  $2i\pi$ . В этом случае функция  $L(\mu) = 2i \sin \pi \mu$ , корнями ее будут точки  $\mu = \pm k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Если в качестве  $\rho_k$  взять, например,  $\rho_k = k + \frac{1}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , то последовательность (B) совпадает с

последовательностью частных сумм ряда Фурье по системе  $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{\infty}$  для функции  $f(ix)$  ( $x$  — действительное).

Таким образом, ряд (C) можно считать обобщением ряда Фурье по тригонометрической системе.

В статье [1] удалось отыскать удобную формулу для остаточного члена ряда (C) при условии дифференцируемости функции  $f(z)$ . В качестве приложения этой формулы там же была доказана следующая (см. стр. 324)

**Теорема.** Пусть для  $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$  функция  $f(z)$  удовлетворяет уравнению (A), причем  $b = -a = q$ . Пусть, далее, функция  $L(\mu)$  на некоторой системе окружностей  $|\mu| = \rho_k$ ,  $\rho_k \uparrow +\infty$  удовлетворяет условию

$$|L(\mu)| > A|\mu|^{-p} e^{q|\mu| |\sin \theta|}, \quad p > 0, \quad \theta = \arg \mu,$$

где  $A$  и  $p$  — некоторые постоянные. Если функция  $f(z)$  в интервале  $(a_1, b_1)$  имеет  $(n-1)$  первых непрерывных производных и ограниченную кусочно-непрерывную производную  $f^{(n)}(z)$  и  $n \geq p+1$ , то на любом ограниченном замкнутом множестве  $E \subset (a_1 - a, b_1 - b)$

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = o(\rho_k^{1+p-n}), \quad \rho_k \uparrow +\infty,$$

откуда, в частности, следует, что

$$f(z) = \lim_{\rho_k \rightarrow \infty} S_{\rho_k}(z, f), \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b).$$

Настоящая работа посвящена дальнейшему изучению сходимости последовательности (B) в зависимости от свойств функции  $f(z)$ , периодической в среднем. Условие, накладываемое на функцию  $L(\mu)$ , то же, что и в только что сформулированной теореме. Отметим, что в периодическом случае оно выполняется при  $p=0$  для любой системы окружностей, отстоящих от нулей функции  $\sin \pi \mu$  на положительном расстоянии.

Если в (1) функция  $f(z)$  рассматривалась определенной в интервале мнимой оси, то здесь оказалось более удобным рассматривать интервал действительной оси. В этом случае

$$L(\mu) = \int_a^b e^{i\mu t} d\sigma(t),$$

$$\omega(\mu, \alpha, f) = ie^{-i\alpha\mu} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi f(\xi - \eta + \alpha) e^{i\mu\eta} d\eta,$$

$$S_{pk}(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{i\mu z} d\mu.$$

Отрезок  $[a, b]$  будем предполагать симметричным относительно начала координат:  $b = -a = q$  (в (1) отмечено, что это не снижает общности).

Неоднократно будет использоваться лемма, доказанная в [1]: если  $f(z)$  удовлетворяет уравнению (A), то вычеты функции  $\frac{\omega(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{i\mu z}$  переменного  $\mu$  от  $\alpha \in (a_1 - a, b_1 - b)$  не зависят.

### § 1. Ограниченные функции и функции, имеющие ограниченную производную

**Лемма 1.** Пусть  $s$  — дуга окружности  $|\mu| = \rho_k$ , заключенная в первой четверти. Тогда

$$\int_s \frac{e^{\beta q} - 1}{\beta e^{\beta q}} ds \leq c_1 + \ln \rho_k + o(1), \quad \rho_k \uparrow +\infty,$$

где  $\beta = \ln \mu$ ,  $c_1$  — постоянная, зависящая от  $q$ .

**Доказательство.** Пусть  $\theta = \arg \mu$ . Тогда  $ds = \rho_k d\theta$  и

$$\begin{aligned} I &= \int_s \frac{e^{\beta q} - 1}{\beta e^{\beta q}} ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{q\rho_k \sin \theta} - 1}{\sin \theta e^{q\rho_k \sin \theta}} d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_k q d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sin \theta} = \\ &= \rho_k q \varphi + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \rho_k q \varphi - \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

Дифференцированием находим, что наименьшее значение правой части достигается при  $\varphi = \arcsin \frac{1}{q\rho_k}$ . Следовательно

$$I \leq q\rho_k \arcsin \frac{1}{q\rho_k} - \ln \operatorname{tg} \left( \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{q\rho_k} \right).$$

Используя элементарную связь  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , получим

$$l \leq \rho_k \arcsin \frac{1}{\rho_k} - \ln \frac{1 - \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\rho_k}\right)^2}}{\frac{1}{\rho_k}} \leq \\ \leq \frac{\pi}{2} - \ln \rho_k + \ln 2\rho_k^2 + o(1), \quad \rho_k \uparrow + \infty.$$

Лемма доказана.

**Теорема 1.** Пусть существует последовательность окружностей  $|\mu| = \rho_k$ ,  $\rho_k \uparrow \infty$ , на которых функция  $L(\mu)$  удовлетворяет условию

$$|L(\mu)| \geq A e^{\rho_k |\sin \theta|}, \quad \theta = \arg \mu, \quad A = \text{const} > 0. \quad (1.1)$$

Если  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), ограничена в интервале  $(a_1, b_1)$ , то для  $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$

$$|S_{\rho_k}(z, f)| \leq \frac{2VM}{A\pi} (c_1 + \ln \rho_k + o(1)), \quad \rho_k \uparrow + \infty,$$

где  $c_1$  — постоянная из леммы 1,  $V = \text{var}_{[a, b]} \sigma(z)$ ,  $M = \sup_{(a_1, b_1)} |f(z)|$ .

**Доказательство.** Воспользуемся тем, что вычеты функции  $\frac{L(\mu, \alpha, f)}{L(\mu)} e^{i\mu z}$  от  $\alpha \in (a, -a, b_1 - b)$  не зависят. Подставим  $\alpha = z$ . Тогда получим

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\zeta(\xi) \int_0^\xi f(\xi - \eta + z) e^{i\mu\eta} d\eta, \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b). \quad (1.1')$$

Для выражения  $B = \int_0^\xi f(\xi - \eta + z) e^{i\mu\eta} d\eta$  имеем оценку

$$|B| \leq M \frac{e^{|\beta|q} - 1}{|\beta|}, \quad \beta = \text{Im } \mu.$$

В силу этой оценки и условия (1.1)

$$|S_{\rho_k}(z, f)| \leq \frac{MV}{2A\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{e^{|\beta|q} - 1}{|\beta| e^{|\beta|q}} ds.$$

Остается использовать лемму 1.

**Теорема 2.** Пусть существует последовательность окружностей  $|\mu| = \rho_k$ ,  $\rho_k \uparrow + \infty$ , на которых  $L(\mu)$  удовлетворяет условию

$$|L(\mu)| \geq A \rho_k^{-p} e^{\rho_k q |\sin \theta|}, \quad \theta = \arg \mu, \quad A = \text{const} > 0, \quad p = \text{const} \geq 0. \quad (1.2)$$

Пусть, далее, функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), имеет в интервале  $(a_1, b_1)$   $(n-1)$  первых непрерывных производных

и ограниченную кусочно-непрерывную производную порядка  $n$ . Тогда для  $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$

$$|f(z) - S_{\rho_k}(z, f)| \leq \frac{2VM}{A\pi \rho_k^{n-p}} (c_1 + \ln \rho_k + o(1)),$$

где  $M = \sup_{(a_1, b_1)} |f^{(n)}(z)|$ ,  $c_1$  — постоянная из леммы 1,  $V = \text{var}_{[a, b]} \sigma(z)$ .

В частности, при  $n > p$  последовательность  $S_{\rho_k}(z, f)$  сходится к  $f(z)$  равномерно в  $(a_1 - a, b_1 - b)$ .

Доказательство. В условиях теоремы справедлива доказанная в (1) формула

$$S_{\rho_k}(z, f) - f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi f^{(n)}(\xi - \eta + z) e^{i\mu\eta} d\eta. \quad (1.3)$$

Оценка правой части проводится так же, как в предыдущей теореме.

## § 2. Функции ограниченной вариации

В этом параграфе будет доказана следующая

Теорема 3. Пусть функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), имеет ограниченную вариацию в интервале  $(a_1, b_1)$ , и пусть выполняется условие (1.1) теоремы 1. Тогда

$$I. S_{\rho_k}(z, f) \rightarrow \frac{1}{2} [f(z+0) + f(z-0)], \quad \rho_k \uparrow +\infty,$$

в каждой точке  $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$ , в частности,  $S_{\rho_k}(z, f)$  сходится к  $f(z)$  в каждой точке непрерывности  $f(z)$ ;

II. Внутри любого интервала  $(c, d) \subset (a_1 - a, b_1 - b)$  непрерывности функции  $f(z)$  сходимость  $S_{\rho_k}(z, f)$  равномерна.

Доказательству теоремы будет предшествовать несколько лемм. Заметим еще, что в этом параграфе интеграл (A) понимается в смысле Лебега-Стилтьеса, так как интеграл Римана-Стилтьеса не существует в случае совпадения точек разрыва функций  $f(z)$  и  $\sigma(z)$ .

Лемма 2. Если постоянная  $h > 0$ , а  $\beta = \text{Im } \mu$ , то

$$a) \int_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|h} ds \leq \frac{2\pi}{h},$$

$$b) \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{ds}{\mu e^{|\beta|h}} = O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad \rho_k \uparrow +\infty.$$

Доказательство. Имеем

$$\int_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|h} ds = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho_k e^{-\rho_k h \sin \theta} d\theta \leq 4 \rho_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} \rho_k \theta h} d\theta \leq \frac{2\pi}{h}.$$

Утверждение б) следует из а).

**Лемма 3.** Если  $f(z)$  имеет ограниченную вариацию в интервале  $(a_1, b_1)$ , то интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu e^{|\beta|q}} \int_0^q d\sigma(\xi) \int_0^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi - \eta + z), \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu e^{|\beta|q}} \int_{-q}^0 d\sigma(\xi) \int_0^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi - \eta + z), \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b), \beta = \operatorname{Im} \mu$$

стремятся к нулю при  $\rho_k \uparrow \infty$ , причем, если  $f(z)$  непрерывна в интервале  $(c, d) \subset (a_1 - a, b_1 - b)$ , то стремление к нулю равномерно внутри  $(c, d)$  (внутреннее интегрирование в (2.1) происходит по переменному  $\eta$  на полуинтервале).

В силу полного сходства интегралов достаточно провести доказательство для одного из них, например, для первого. Обозначим его через  $J$ , вариацию  $\sigma(z)$  на  $[a, b]$  — через  $V$ , а вариацию  $f(z)$  в  $(a_1, b_1)$  — через  $F$ .

Пусть  $\varepsilon > 0$ ,  $z$  — произвольная точка интервала  $(a_1 - a, b_1 - b)$ . Так как  $f(z)$ , имеющая ограниченную вариацию, представима в виде линейной комбинации не более чем четырех действительных монотонных функций, то можно выбрать  $h > 0$  таким образом, чтобы было

$$\operatorname{var}_{(z+0, z+h]} f(z) < \frac{\varepsilon}{2V}. \quad (2.2)$$

Имеем

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu e^{|\beta|q}} \int_0^q d\sigma(\xi) \left[ \int_0^{\xi-h} e^{i\mu\eta} df + \int_{\xi-h}^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df \right].$$

Положив  $\mu = \alpha + i\beta$ , найдем  $|e^{i\mu\eta}| = e^{-\beta\eta}$  и

$$\begin{aligned} |J| &\leq \frac{V}{2\pi\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} \sup_{\xi} \left| \int_0^{\xi-h} e^{i\mu\eta} df(\xi - \eta + z) + \int_{\xi-h}^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi - \eta + z) \right| \leq \\ &\leq \frac{V}{2\pi\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} \left[ e^{|\beta|(q-h)} \cdot F + e^{|\beta|q} \frac{\varepsilon}{2V} \right] = \frac{VF}{2\pi\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|h} ds + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3) \end{aligned}$$

Первое слагаемое будет меньше  $\frac{\varepsilon}{2}$  по лемме 2, следовательно,  $J \rightarrow 0$ , если  $\rho_k \uparrow \infty$ .

Пусть теперь  $f(z)$  непрерывна в  $(c, d) \subset (a_1 - a, b_1 - b)$ , и пусть  $K$  — произвольный отрезок, целиком принадлежащий  $(c, d)$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  можно подобрать  $h > 0$  так, чтобы неравенство (2.2) выполнялось для всех  $z \in K$ . В самом деле, если  $f(z)$  действительна и монотонна, то для нее последнее утверждение следует из равномерной

ее непрерывности внутри  $(c, d)$ . Для комплекснозначной функции утверждение вытекает из того, что ее можно представить в виде линейной комбинации не более четырех монотонных функций.

Если неравенство (2.2) равномерно по  $z \in K \subset (c, d)$ , то и неравенство (2.3) выполняется для всех  $z \in K$ .

Лемма доказана.

Лемма 4. Если функция  $\sigma(z)$  имеет скачки в точках  $z = \pm q$  и постоянна в интервале  $(-q, q)$ , то для любой последовательности окружностей  $|\mu| = \rho_k$ , не проходящих через нули функции  $L(\mu)$ ,

$$\tau_{\rho_k}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[ \int_0^q e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) - \int_{-q}^0 e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) \right] \rightarrow 0, \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

Доказательство. Обозначим скачки функции  $\sigma(z)$  в точках  $z = -q$  и  $z = q$  соответственно через  $h_1$  и  $h_2$ . Тогда

$$\int_0^q e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) = h_2 e^{i\mu q}, \quad \int_{-q}^0 e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) = h_1 e^{-i\mu q},$$

$$L(\mu) = \int_{-q}^q e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) = h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}.$$

Пусть  $\ln\left(-\frac{h_1}{h_2}\right) = \gamma$ , тогда  $\frac{h_1}{h_2} = -e^\gamma$  и

$$\begin{aligned} \tau_{\rho_k}(\sigma) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \frac{e^{i\mu q} + e^\gamma e^{-i\mu q}}{e^{i\mu q} - e^\gamma e^{-i\mu q}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\cos\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Пусть сначала  $\gamma = 2i\pi n$ , где  $n$  — целое. Тогда

$$\tau_{\rho_k} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{\cos q\mu}{\sin q\mu} = 0,$$

ибо вычет подынтегральной функции в точке  $\mu = 0$  равен нулю, а в точках  $\mu = \pm k \frac{\pi}{q}$  ( $k$  — целое положительное) вычеты уничтожают друг друга.

Переходя к случаю, когда  $\gamma$  не кратно  $2i\pi$ , заметим, что  $\sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) = 0$ , когда  $q\mu + i\frac{\gamma}{2} = k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) или  $\mu = \frac{1}{q}\left(k\pi - i\frac{\gamma}{2}\right)$ .

Вычет функции, стоящей под знаком интеграла в (2.4), в точке  $\mu = 0$  равен  $\operatorname{ctg} \left( i \frac{\gamma}{2} \right)$ , а в точке  $\mu = \frac{1}{q} \left( k\pi - i \frac{\gamma}{2} \right)$  равен  $\frac{1}{k\pi - i \frac{\gamma}{2}}$ .

Таким образом,  $\tau_{\rho_k} = \operatorname{ctg} \left( i \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{1}{i \frac{\gamma}{2}} + \sum' \frac{1}{k\pi - i \frac{\gamma}{2}}$ , где символ  $\Sigma'$

означает, что суммирование ведется по всем  $k \neq 0$ , для которых соответствующие точки попали внутрь окружности  $|\mu| = \rho_k$ . Окончательно

$$\tau_{\rho_k}(\sigma) = \operatorname{ctg} \left( i \frac{\gamma}{2} \right) - \frac{1}{i \frac{\gamma}{2}} - \sum_{k \neq 0}' \left[ \frac{1}{i \frac{\gamma}{2} - k\pi} + \frac{1}{i \frac{\gamma}{2} + k\pi} \right] \rightarrow 0, \rho_k \uparrow \infty,$$

в силу известного разложения котангенса.

**Лемма 5.** Если функция  $L(\mu) = \int_{-q}^q e^{i\mu t} d\sigma(t)$  на некоторой последовательности окружностей  $|\mu| = \rho_k$ ,  $\rho_k \rightarrow \infty$ , удовлетворяет условию (1.1), то

а) в точках  $z = \pm q$  функция  $\sigma(z)$  не может быть непрерывной (соответственно слева и справа);

б) существует  $p > 0$  такое, что  $L(\mu)$  обладает свойством (1.1) на любой системе окружностей, принадлежащих кольцам  $\rho_k - p \leq |\mu| \leq \rho_k + p$ .

Для доказательства первого утверждения предположим противное. Пусть для определенности в точке  $z = -q$  функция  $\sigma(z)$  непрерывна справа. Обозначим через  $h_2$  возможный скачок  $\sigma(z)$  в точке  $z = q$ . Для  $\varepsilon > 0$  выберем  $h > 0$  так, чтобы на отрезке  $[-q, -q + h]$  и на полуинтервале  $[q - h, q)$  вариация функции  $\sigma(z)$  не превосходила  $\varepsilon$ . Тогда

$$|L(\mu)| = \left| \int_{-q}^q e^{i\mu t} d\sigma(t) \right| \leq h_2 e^{-\beta q} + 2\varepsilon e^{|\beta|q} + V e^{|\beta|(q-h)}, \quad \beta = \operatorname{Im} \mu.$$

По условию на некоторой системе окружностей  $|\mu| = \rho_k$

$$|L(\mu)| \geq A e^{|\beta|q}, \quad A > 0.$$

Повтому

$$A e^{|\beta|q} \leq h_2 e^{-\beta q} + 2\varepsilon e^{|\beta|q} + V e^{|\beta|(q-h)}, \quad |\mu| = \rho_k,$$

откуда

$$A \leq \frac{h_2}{e^{q(\beta + |\beta|)}} + 2\varepsilon + \frac{V}{e^{|\beta|h}}, \quad |\mu| = \rho_k.$$

Так как это неравенство справедливо для всех точек указанных окружностей, то оно верно и для точки  $\mu = 0 + i\rho_k$

$$A \leq \frac{h_2}{e^{2\rho_k q}} + 2\varepsilon + \frac{V}{e^{h\rho_k}}.$$

Устремив  $\rho_k$  к  $\infty$ , получим  $A \leq \varepsilon$ , откуда, в силу произвола в выборе  $\varepsilon$ , следует, что  $A = 0$ . Это противоречие доказывает а).

Пусть снова  $\varepsilon > 0$  и  $h > 0$  выбирается так, чтобы вариация  $\tau(z)$  не превосходила  $\varepsilon$  на каждом из полуинтервалов:  $(-q, -q+h]$ ,  $[q-h, q)$ . По доказанному в точках  $z = \pm q$  функция  $\tau(z)$  имеет скачки. Придерживаясь обозначений, принятых при доказательстве леммы 4, будем иметь

$$L(\mu) = h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q} + \left\{ \int_{-q+0}^{-q+h} + \int_{-q+h}^{q-h} + \int_{q-h}^{q-0} \right\} e^{i\mu t} d\tau(t) = \\ = 2ih_2 \sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) + \left\{ \int_{-q+0}^{-q+h} + \int_{-q+h}^{q-h} + \int_{q-h}^{q-0} \right\} e^{i\mu t} d\tau(t).$$

Следовательно

$$|L(\mu)| \geq 2|h_2| \left| \sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) \right| - V e^{|\beta|(q-h)} - 2\varepsilon e^{|\beta|q}.$$

Но

$$\left| \sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right) \right| \geq \left| \operatorname{sh}\left(\beta q + \operatorname{Re} \frac{\gamma}{2}\right) \right| \geq A_1 e^{|\beta|q}, \quad |\beta| \geq \beta_0 > 0, \quad A_1 > 0.$$

Таким образом

$$|L(\mu)| \geq 2A_1 |h_2| e^{|\beta|q} - V e^{|\beta|(q-h)} - 2\varepsilon e^{|\beta|q} = e^{|\beta|q} \left( 2A_1 |h_2| - \frac{V}{e^{|\beta|h}} - 2\varepsilon \right).$$

Выбрав  $\beta_0$  столь большим, чтобы для  $|\beta| \geq \beta_0$  было

$$2A_1 |h_2| - \frac{V}{e^{|\beta|h}} - 2\varepsilon \geq A_2 > 0,$$

получим, что (1.1) выполняется всюду вне достаточно широкой горизонтальной полосы.

Для доказательства б) достаточно убедиться, что для некоторого  $p > 0$  в пересечении колец  $\rho_k - p \leq |\mu| \leq \rho_k + p$  с полосой  $|\beta| \leq \beta_0$

$$\min_{\mu} \left| \int_{-q}^q \exp(i|\mu| e^{i\theta} t) d\tau(t) \right| \geq \delta_0 > 0. \quad (2.5)$$

Тогда в указанной системе колец будет справедливо неравенство

$$|L(\mu)| \geq e^{|\beta|q} \min(A_2, \delta_0 e^{-\beta_0 q}).$$

Предположим, что (2.5) не выполняется. Тогда существует последовательность точек  $\{\rho_k^* e^{i\theta_k}\}$  таких, что  $\rho_k^* - \rho_k = r_k \rightarrow 0$

$$|\operatorname{Im}(\rho_k^* e^{i\theta_k})| \leq \beta_0, \quad \int_{-q}^q \exp(i\rho_k^* e^{i\theta_k} t) d\tau(t) \rightarrow 0, \quad \rho_k^* \rightarrow \infty.$$

Рассмотрим разность

$$R_k = \int_{-q}^q e^{i\rho_k^* e^{i\theta_k} t} d\sigma(t) - \int_{-q}^q e^{i\rho_k e^{i\theta_k} t} d\sigma(t) = \int_{-q}^q e^{i\rho_k e^{i\theta_k} t} (e^{i\rho_k e^{i\theta_k} t} - 1) d\sigma(t).$$

Так как  $|\exp(i\rho_k e^{i\theta_k} t)| = \exp(-\rho_k t \sin \theta_k) \leq \exp(\rho_0 q)$ , а  $(e^{i\rho_k e^{i\theta_k} t} - 1) \rightarrow 0$  при  $\rho_k \uparrow \infty$  равномерно по  $t \in [-q, q]$  (ввиду того, что  $r_k \rightarrow 0$ ), разность  $R_k$  также стремится к нулю при  $\rho_k \uparrow \infty$ . Но по условию

$$\left| \int_{-q}^q e^{i\rho_k e^{i\theta_k} t} d\sigma(t) \right| \geq A,$$

и противоречие налицо. Лемма полностью доказана.

**Лемма 6.** Если функция  $L(\mu) = \int_{-q}^q e^{i\mu t} d\sigma(t)$  на некоторой последовательности окружностей  $|\mu| = \rho_k$  удовлетворяет условию (1.1) теоремы 1, то

$$\tau_{\rho_k}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[ \int_{-q}^q e^{i\mu t} d\sigma(t) - \int_{-q}^0 e^{i\mu t} d\sigma(t) \right] \rightarrow 0, \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

В силу леммы 5 функция  $\sigma(z)$  имеет в точках  $z = q$  и  $z = -q$  скачки. Обозначим их соответственно через  $h_2$  и  $h_1$  и положим  $\frac{h_2}{h_1} = -e^\gamma$ . Мы можем считать, благодаря второму утверждению леммы 5, что окружности  $|\mu| = \rho_k$ , на которых выполняется неравенство (1.1), отстоят на положительном расстоянии от нулей функции  $h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q} = 2i \sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right)$  и, следовательно, можем полагать, что существует число  $N > 0$  такое, что

$$\left| \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}} \right| = \left| \frac{\cos\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\left(q\mu + i\frac{\gamma}{2}\right)} \right| < N, \quad |\mu| = \rho_k. \quad (2.6)$$

На основании леммы 4

$$\tau_{\rho_k}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}} \rightarrow 0, \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

Покажем, что  $\tau_{\rho_k} - \tau_{\rho_k}^* \rightarrow 0$  при  $\rho_k \uparrow \infty$ . Выберем для  $\varepsilon > 0$  такое  $h > 0$ , чтобы вариация функции  $\sigma(z)$  на полуинтервалах  $(-q, -q + h], [q - h, q)$  не превосходила  $\varepsilon$ . Имеем

$$\tau_{\rho_k} - \tau_{\rho_k}^* = \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{L(\mu)} - \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \frac{h_2 e^{i\mu q} - h_1 e^{-i\mu q}}{h_2 e^{i\mu q} + h_1 e^{-i\mu q}} \right] +$$

$$+ \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \frac{\int_0^{q-0} e^{i\mu t} d\sigma(t) - \int_{-q+0}^0 e^{i\mu t} d\sigma(t)}{L(\mu)} \Big] = \frac{1}{2\pi} [P_{\rho_k} + Q_{\rho_k}],$$

где  $P_{\rho_k}$  — разность двух первых интегралов, а  $Q_{\rho_k}$  — последний интеграл. Учитывая условие (1.1), для  $Q_{\rho_k}$  имеем оценку

$$|Q_{\rho_k}| \leq \frac{1}{A\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} [2\varepsilon e^{|\beta|q} + 2e^{|\beta|(q-h)} V] = \frac{4\pi\varepsilon}{A} + \frac{2V}{A\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|h} ds.$$

Второе слагаемое стремится к нулю при  $\rho_k \uparrow \infty$  по лемме 2, следовательно,  $Q_{\rho_k} \rightarrow 0$ , если  $\rho_k \uparrow \infty$ . При оценке выражения  $P_{\rho_k}$  воспользуемся неравенством (2.6)

$$\begin{aligned} |P_{\rho_k}| &= \left| \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu} \cdot \frac{(h_1 e^{-i\mu q} - h_2 e^{i\mu q}) \int_{-q+0}^{q-0} e^{i\mu t} d\sigma(t)}{L(\mu) (h_1 e^{-i\mu q} + h_2 e^{i\mu q})} \right| \leq \\ &\leq \frac{N}{\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} \left| \int_{-q+0}^{q-0} e^{i\mu t} d\sigma(t) \right| \frac{ds}{|L(\mu)|} \leq \frac{N}{A\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{2\varepsilon e^{|\beta|q} + V e^{|\beta|(q-h)}}{e^{|\beta|q}} ds = \\ &= \frac{4\pi N\varepsilon}{A} + \frac{NV}{A\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|h} ds. \end{aligned}$$

Остается снова сослаться на лемму 2. В результате  $\tau_{\rho_k} \rightarrow 0$ ,  $\rho_k \uparrow \infty$ .

Переходим к доказательству уже сформулированной теоремы 3. Воспользуемся формулой (1.1')

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^{\xi} f(\xi - \eta + z) e^{i\mu\eta} d\eta.$$

Отметим равенство

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{\xi} f(\xi - \eta + z) e^{i\mu\eta} d\eta = \frac{1}{i\mu} \left\{ f(\xi - \eta + z) e^{i\mu\eta} \Big|_0^{\xi} - \int_0^{\xi} e^{i\mu\eta} df(\xi - \eta + z) \right\} = \\ &= \frac{1}{i\mu} \left\{ f(z) e^{i\mu\xi} - f(\xi + z) - \int_0^{\xi} e^{i\mu\eta} df(\xi - \eta + z) \right\}. \end{aligned}$$

Если  $\xi = 0$ , то  $B = 0$ . Пусть  $\xi > 0$ , тогда

$$B = \frac{1}{i\mu} \left\{ f(z) e^{i\mu\xi} - f(z + \xi) - e^{i\mu\xi} [f(z) - f(z + 0)] - \int_0^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi - \eta + z) \right\} =$$

$$= \frac{1}{i\mu} \left\{ e^{i\mu\xi} f(z+0) - f(z+\xi) - \int_0^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) \right\}. \quad (2.7)$$

В случае же  $\xi < 0$

$$B = \frac{1}{i\mu} \left\{ f(z) e^{i\mu\xi} - f(z+\xi) - e^{i\mu\xi} [f(z) - f(z-0)] - \int_0^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) \right\} = \\ = \frac{1}{i\mu} \left\{ e^{i\mu\xi} f(z-0) - f(z+\xi) - \int_0^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) \right\}. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в выражение для  $S_{p_k}(z, f)$ , получим

$$S_{p_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=p_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[ f(z+0) \int_0^q e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) - \int_0^q d\sigma(\xi) \int_0^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) - \right. \\ \left. - \int_{-q}^q f(z+\xi) d\sigma(\xi) + f(z-0) \int_{-q}^0 e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) - \int_{-q}^0 d\sigma(\xi) \int_{\eta}^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) \right].$$

Но  $\int_{-q}^q f(z+\xi) d\sigma(\xi) = 0$ , поэтому

$$S_{p_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=p_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[ f(z+0) \int_0^q e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) + f(z-0) \int_{-q}^0 e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) \right] - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=p_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int_0^q d\sigma(\xi) \int_0^{\xi-0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z) - \\ - \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=p_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int_{-q}^0 d\sigma(\xi) \int_{\eta}^{\xi+0} e^{i\mu\eta} df(\xi-\eta+z).$$

В силу условия (1.1) на рост  $|L(\mu)|$  снизу, к двум последним интегралам можно применить лемму 3. Следовательно, в случае непрерывности  $f(z)$  утверждение II теоремы 3 можно считать доказанным

$$\int_0^q e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) + \int_{-q}^0 e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) = L(\mu).$$

В случае разрыва  $f(z)$  отметим равенства

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=p_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[ f(z+0) \int_0^q e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) + f(z-0) \int_{-q}^0 e^{i\mu\xi} d\sigma(\xi) \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= f(z+0) + \frac{f(z-0) - f(z+0)}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int_{-q}^0 e^{i\mu z} d\sigma(\xi) = \\
&= f(z-0) + \frac{f(z+0) - f(z-0)}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int_0^q e^{i\mu z} d\sigma(\xi) = \\
&= \frac{f(z+0) + f(z-0)}{2} + \frac{f(z+0) - f(z-0)}{4\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \left[ \int_0^q e^{i\mu z} d\sigma(\xi) - \right. \\
&\quad \left. - \int_{-q}^0 e^{i\mu z} d\sigma(\xi) \right].
\end{aligned}$$

Учитывая лемму 6, утверждение I теоремы 3 можно теперь также считать доказанным.

**Замечание.** Если функция  $f(z)$  определена на всей прямой и удовлетворяет уравнению (A) для всех  $-\infty < t < +\infty$ , то утверждения теоремы 3 справедливы для всех  $-\infty < z < +\infty$ . Впрочем, это замечание относится и к предыдущим теоремам, и к теоремам, которые будут доказаны ниже.

В связи с доказанной теоремой уместно отметить один результат Верблюдского [2].

Рассматривается функция  $f(x)$ , интегрируемая в каждом конечном интервале и удовлетворяющая уравнению

$$\int_0^1 K(\xi) f(\xi + x) d\xi = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Предполагается, что  $K(\xi)$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, 1]$ ,

причем  $K(0+0) \neq 0$ ,  $K(1-0) \neq 0$ , а функция  $L(\lambda) = \int_0^1 K(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi$

имеет лишь простые нули  $\{\lambda_n\}$ . Функции  $f(x)$  ставится в соответствие некоторый ряд по системе  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  (ряд образован аналогично ряду

(C)) и доказывается, что он сходится в каждой точке к  $\frac{1}{2}[f(x+0) +$

$+ f(x-0)]$ , причем внутри интервала непрерывности  $f(x)$  сходимость равномерна. Из условия Верблюдского на ядро вытекает некоторое ограничение на рост характеристической функции  $L(\lambda)$  снизу. Оно менее жестко по сравнению с условием (1.1) теоремы I настоящей работы. Однако уравнение, изучавшееся Верблюдским, проще уравнения (A) и описывает более узкий класс функций (например, ни при каком  $K(\xi) \not\equiv 0$  решением уравнения не может быть произвольная периодическая функция).

## § 3. Вспомогательные предложения

**Лемма 7.** (формула для отклонения  $S_{\rho_k}(z, f)$  от функции  $f(z)$ ). Пусть функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), непрерывна в интервале  $(a_1, b_1)$ , а функция  $L(\mu)$  удовлетворяет условию (1.1) теоремы 1. Пусть, далее,  $[c, d]$  — произвольный отрезок, целиком лежащий в интервале  $(a_1 - a, b_1 - b)$ . Тогда для  $z \in [c, d]$

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi e^{i\mu\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta + O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad (3.1)$$

где  $\varphi(\xi - \eta) = \varphi_x(\xi - \eta) = f(z) - f(\xi - \eta + z)$ .

Для доказательства отметим следующие очевидные равенства:

$$\frac{e^{i\mu\xi}}{\mu} = i \int_0^\xi e^{i\mu\eta} d\eta + \frac{1}{\mu},$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{f(z) d\mu}{\mu} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int_a^b e^{i\mu\xi} f(z) d\sigma(\xi) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi f(z) e^{i\mu\eta} d\eta + \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi), \end{aligned}$$

$$S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi f(\xi - \eta + z) e^{i\mu\eta} d\eta,$$

в силу которых

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi e^{i\mu\eta} [f(z) - f(\xi - \eta + z)] d\eta + \Phi_{\rho_k}.$$

На отрезке  $[c, d]$  функция  $|f(z)|$  ограничена некоторым числом  $M$ . Следовательно, по лемме 2

$$|\Phi_{\rho_k}| = \left| \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \right| \leq \frac{MV}{2A\pi\rho_k} \int_{|\mu|=\rho_k} e^{-|\beta|q} ds = O\left(\frac{1}{\rho_k}\right),$$

и соотношение (3.1) тем самым установлено.

**Лемма 8.** Пусть  $f(z)$  непрерывна в интервале  $(a_1, b_1) \supset [-q, q]$ , и пусть  $\omega(\delta)$  — ее модуль непрерывности на отрезке  $[a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon]$ ,  $(0 < \varepsilon < \frac{q}{2})$ . Тогда при  $z \in [a_1 + q + \varepsilon, b_1 - q - \varepsilon]$  и любом  $\xi \in [-q, q]$  верны неравенства

$$\left| \int_0^{\xi} \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta \right| \leq \int_0^q \omega(q - \eta) e^{-\beta\eta} d\eta, \text{ если } \beta = \operatorname{Im} \mu < 0, \\ \left| \int_0^{\xi} \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta \right| \leq \int_{-q}^0 \omega(q + \eta) e^{-\beta\eta} d\eta, \text{ если } \beta = \operatorname{Im} \mu > 0, \quad (3.2)$$

$$\left| \int_{-h}^{\xi-h} \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta \right| \leq \int_{-h}^{q-h} \omega(q - \eta) e^{-\beta\eta} d\eta, \text{ если } \beta < 0, \\ \left| \int_h^{\xi+h} \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta \right| \leq \int_{-q+h}^h \omega(q + \eta) e^{-\beta\eta} d\eta, \text{ если } \beta \geq 0. \quad (3.3)$$

Здесь постоянная  $h$  такова, что  $0 < h < q$ , а функция  $\varphi$  определена в (3.1).

Доказательство. Для функции

$$\Phi(\xi) = \int_0^{\xi} \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta = \int_0^{\xi} \varphi(t) e^{i\mu(\xi-t)} dt$$

имеем оценки

$$|\Phi(\xi)| \leq e^{-\beta\xi} \int_0^{\xi} \omega(t) e^{\beta t} dt = J(\xi), \quad \xi > 0,$$

$$|\Phi(\xi)| \leq e^{-\beta\xi} \int_{\xi}^0 \omega(|t|) e^{\beta t} dt = J(\xi), \quad \xi < 0.$$

Функция  $J(\xi)$ , определенная на отрезке  $[-q, q]$ , достигает наибольшего значения в граничной точке отрезка, так как  $J'(\xi) < 0$  при  $\xi < 0$  и  $J'(\xi) > 0$  при  $\xi > 0$ . В самом деле, если  $\xi > 0$ , то

$$J'(\xi) = -\beta e^{-\beta\xi} \int_0^{\xi} \omega(t) e^{\beta t} dt + \omega(\xi) = -e^{-\beta\xi} \int_0^{\xi} \omega(t) d e^{\beta t} + \omega(\xi) = \\ = e^{-\beta\xi} \int_0^{\xi} e^{\beta t} d\omega(t) > 0,$$

так как  $\omega(t)$  не убывает. Если же  $\xi < 0$ , то

$$J'(\xi) = -\beta e^{-\beta\xi} \int_{\xi}^0 \omega(|t|) e^{\beta t} dt - \omega(|\xi|) = -e^{-\beta\xi} \int_{\xi}^0 \omega(|t|) d e^{\beta t} - \\ - \omega(|\xi|) = e^{-\beta\xi} \int_{\xi}^0 e^{\beta t} d\omega(|t|) < 0,$$

ибо на отрезке  $[\frac{1}{2}, 0]$   $\omega(|t|)$  не возрастает. Сравним величины

$$J(q) = e^{-\beta q} \int_0^q \omega(t) e^{\beta t} dt = \int_0^q \omega(t) e^{-\beta(q-t)} dt$$

и

$$J(-q) = e^{\beta q} \int_{-q}^0 \omega(|t|) e^{\beta t} dt = \int_0^q \omega(t) e^{-\beta(t-q)} dt.$$

Если  $\beta < 0$ , то наибольшей является  $J(q)$ ; если же  $\beta \geq 0$ , то  $J(q) < J(-q)$ . Неравенства (3.2) доказаны. Таким же путем устанавливаются неравенства (3.3).

Лемма 9. Пусть  $\rho$  и  $\varphi$  — положительные постоянные, причем  $\varphi < \frac{\pi}{2}$ . Тогда

а) функция  $F(t) = e^{-\rho t \sin \varphi} - e^{-\rho t \varphi}$  возрастает, если  $0 < t < \frac{1}{\rho \varphi}$ ,

б) функция  $\Phi(t) = e^{-\rho t \sin \varphi} - e^{-\frac{2}{\pi} \rho t \varphi}$  возрастает, если  $t > \frac{\pi}{2\rho \varphi}$ .

Для доказательства рассмотрим функцию  $\Omega(\varphi) = \varphi e^{-\rho t \varphi}$  при постоянном положительном  $t$ . Имеем

$$\Omega'(\varphi) = e^{-\rho t \varphi} - \rho t \varphi e^{-\rho t \varphi}.$$

Отсюда

$$\Omega'(\varphi) > 0 \quad \text{для} \quad 0 < \varphi < \frac{1}{\rho t},$$

$$\Omega'(\varphi) < 0 \quad \text{для} \quad \varphi > \frac{1}{\rho t}.$$

Итак, функция  $\Omega(\varphi)$  возрастает в интервале  $(0, \frac{1}{\rho t})$  и убывает при  $\varphi > \frac{1}{\rho t}$ . Повтому, если  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$ , то

$$\sin \varphi e^{-\rho t \sin \varphi} < \varphi e^{-\rho t \varphi}, \quad 0 < \varphi < \frac{1}{\rho t},$$

$$\sin \varphi e^{-\rho t \sin \varphi} < \frac{2}{\pi} \varphi e^{-\frac{2}{\pi} \rho t \varphi}, \quad \varphi > \frac{\pi}{2\rho t},$$

или

$$-\sin \varphi e^{-\rho t \sin \varphi} + \varphi e^{-\rho t \varphi} > 0, \quad 0 < \varphi < \frac{1}{\rho t},$$

$$-\sin \varphi e^{-\rho t \sin \varphi} + \frac{2}{\pi} \varphi e^{-\frac{2}{\pi} \rho t \varphi} > 0, \quad \varphi > \frac{\pi}{2\rho t}.$$

Левые части двух последних неравенств представляют собой производные функций  $F(t)$  и  $\Phi(t)$  соответственно с точностью до положительного множителя. Отсюда все и следует.

Следствие. Пусть постоянная  $\delta > 0$ . Тогда, если  $\rho > 0$ ,  $t > 0$ ,  $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ ,

$$e^{-\rho t \sin \varphi} - e^{-\rho(t+\delta) \sin \varphi} < e^{-\rho t \varphi} - e^{-\rho(t+\delta) \varphi}, \quad 0 < \varphi < \frac{1}{\rho(t+\delta)},$$

$$e^{-\rho t \sin \varphi} - e^{-\rho(t+\delta) \sin \varphi} < e^{-\frac{2}{\pi} \rho t \varphi} - e^{-\frac{2}{\pi} \rho(t+\delta) \varphi}, \quad \varphi > \frac{\pi}{2\rho t}.$$

#### § 4. Непрерывные и непрерывно дифференцируемые функции

**Теорема 4.** Если функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), непрерывна в интервале  $(a_1, b_1)$ , и если выполняется условие (1.1) теоремы 1, то

$$S_{\rho_k}(z, f) = o(\ln \rho_k), \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b), \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

Достаточно показать, что интеграл, стоящий в правой части (3.1), растет медленнее, чем  $\ln \rho_k$  (с возрастанием  $\rho_k$ ). Оценим этот интеграл сверху. В силу леммы 8

$$\begin{aligned} |R_{\rho_k}| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi e^{i\mu\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta \right| \leq \\ &\leq \frac{V}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{ds}{|L(\mu)|} \int_0^q \omega(q - \eta) e^{|\beta|\eta} d\eta. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Но

$$\int_0^q \omega(q - \eta) e^{|\beta|\eta} d\eta = \int_0^{q - \frac{\pi}{\rho_k}} + \int_{q - \frac{\pi}{\rho_k}}^q \leq \int_0^{q - \frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q - \eta) e^{|\beta|\eta} d\eta + \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \int_{q - \frac{\pi}{\rho_k}}^q e^{|\beta|\eta} d\eta, \quad (3.5)$$

здесь  $\omega(\delta)$  — модуль непрерывности  $f(z)$  на некотором отрезке, принадлежащем  $(a_1, b_1)$  и содержащем точки  $(\xi - \eta + z)$  при изменении  $\xi$  от  $(-q)$  до  $q$  и  $\eta$  от 0 до  $\xi$ . В силу (3.4), (3.5) и условия (1.1), получим

$$|R_{\rho_k}| \leq \frac{V}{2\pi A} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} \int_0^{q - \frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q - \eta) e^{|\beta|\eta} + \frac{V}{2\pi A} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{e^{|\beta|q} - 1}{|\beta| e^{|\beta|q}} ds. \quad (3.6)$$

Из леммы 1 следует, что второй интеграл растет как  $\ln \rho_k$ , а множитель перед ним  $\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \rightarrow 0$  при  $\rho_k \uparrow \infty$ . В результате все слагаемое ведет себя, как  $o(\ln \rho_k)$ . Первое же слагаемое (интеграл обозначим через  $J$ , а постоянную  $\frac{2V}{A\pi}$  — через  $H$ ) имеет оценку

$$J = H \rho_k \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-q \rho_k \sin \theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \omega(t) e^{\rho_k (q-t) \sin \theta} dt =$$

$$= H \rho_k \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \omega(t) dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t \rho_k \sin \theta} d\theta \leq H \rho_k \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \omega(t) dt \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2}{\pi} t \rho_k} d\theta = \frac{H\pi}{2} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \frac{\omega(t) dt}{t}.$$

Последний интеграл есть  $o(\ln \rho_k)$ , благодаря следующей теореме (см. [3], стр. 31).

Пусть  $f(t)$  и  $g(t)$  интегрируемы на каждом отрезке

$$[c', d] \quad (c < c'), \quad g(t) \geq 0, \quad G(x) = \int_x^d g(t) dt \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow c.$$

Тогда, если  $f(t) = o[g(t)]$  при  $t \rightarrow c$ , то и

$$F(x) = \int_x^d f(t) dt = o[G(x)] \text{ при } x \rightarrow c.$$

В нашем случае достаточно положить  $g(t) = \frac{1}{t}$ ,  $f(t) = \frac{\omega(t)}{t}$ ,  $c = 0$ .

Теорема 4 доказана. Уместно сравнить ее с теоремой 1.

**Теорема 5.** Пусть функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), непрерывна в интервале  $(a_1, b_1)$ , и пусть  $\omega(\delta)$  — ее модуль непрерывности на отрезке  $[a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon]$   $\left(0 < \varepsilon < \frac{b_1 - a_1}{2}\right)$ . Пусть, кроме этого, выполняется условие (1.1) теоремы 1. Тогда

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \ln \rho_k\right], \quad z \in [a_1 - a + \varepsilon, b_1 - b - \varepsilon], \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

**Доказательство.** В силу леммы 7 оценка разности  $f(z) - S_{\rho_k}(z, f)$  сводится к оценке интеграла

$$J_{\rho_k} = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta.$$

На окружности  $|\mu| = \rho_k$  выберем точку  $\alpha_0 + i\beta_0$  так, чтобы было  $\alpha_0 > 0$ ,  $\beta_0 > 0$  и чтобы переменное  $\left(\eta \pm \frac{2\pi}{\alpha_0}\right)$  не вышло за пределы интервала  $(a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon)$  при изменении  $\eta$  от  $a$  до  $b$ .

Обозначим через

$$\Gamma = \{\mu/|\mu| = \rho_k, |\operatorname{Re} \mu| \geq \alpha_0\}, \quad \gamma = \{\mu/|\mu| = \rho_k, |\operatorname{Re} \mu| < \alpha_0\},$$

$$\Gamma_+ = \{\mu/|\mu| \in \Gamma, \operatorname{Im} \mu \geq 0\}, \quad \Gamma_- = \Gamma / \Gamma_+, \quad \varphi_0 = \arcsin \frac{\beta_0}{\rho_k}.$$

В соответствии с этим  $J_{\rho_k} = J_{\Gamma} + J_{\gamma}$ .

Начнем с оценки  $J_{\gamma}$ . Из доказательства теоремы 4 видно (см. [3.6]), что

$$|J_{\gamma}| \leq \frac{V}{2\pi A} \int_{\gamma} \frac{ds}{e^{|s|q}} \int_0^{q - \frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q - \eta) e^{|\beta|\eta} d\eta + \frac{2V}{\pi A} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) (c_1 + \ln \rho_k + o(1)).$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{V}{2\pi A} \int_{\gamma} \frac{ds}{e^{|s|q}} \int_0^{q - \frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q - \eta) e^{|\beta|\eta} d\eta &= \frac{2V}{\pi A} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \omega(t) dt \int_{\varphi_0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\rho_k t \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq \frac{V}{A} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \frac{\omega(t)}{t} e^{-\frac{2}{\pi} \rho_k t \varphi_0} dt = -\frac{\pi V}{2A \varphi_0 \rho_k} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \frac{\omega(t)}{t} de^{-\frac{2}{\pi} \rho_k t \varphi_0} \leq \\ &\leq \frac{\pi V}{2A \varphi_0 \rho_k} e^{-2\varphi_0} \sup_{\left[\frac{\pi}{\rho_k}, q\right]} \frac{\omega(t)}{t} = \frac{\pi V e^{-2\varphi_0}}{2A \varphi_0 \rho_k} \cdot \frac{\omega(x_0)}{x_0}, \end{aligned}$$

где  $x_0 \in \left[\frac{\pi}{\rho_k}, q\right]$ . Так как для любого модуля непрерывности  $\frac{\omega(x_0)}{x_0} < 2 \frac{\omega(x)}{x}$ , если  $x_0 > x$ , то получаем

$$|J_{\gamma}| \leq \frac{V e^{-2\varphi_0}}{A \varphi_0} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) + \frac{2V}{\pi A} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) (c_1 + \ln \rho_k + o(1)). \quad (3.7)$$

Приступим к оценке интеграла

$$J_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^{\xi} \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} d\eta.$$

В интеграле  $B = \int_0^{\xi} e^{i\mu\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta$  произведем линейную замену пере-

менного. Если  $\mu \in \Gamma_+$ , то заменим  $\eta$  на  $\left(\eta + \frac{\pi}{|a|}\right)$ , а если  $\mu \in \Gamma_-$ , заменим  $\eta$  на  $\left(\eta - \frac{\pi}{|a|}\right)$ . В соответствии с этим интеграл  $B$  будем снабжать знаками  $\pm$ , в зависимости от того, будет  $\mu \in \Gamma_+$  или  $\mu \in \Gamma_-$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 B^+ &= \int_0^{\xi} e^{ia\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta = - \int_{-\frac{\pi}{|a|}}^{\xi + \frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|a|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|a|}\right) d\eta = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{\xi} e^{ia\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta - \int_{-\frac{\pi}{|a|}}^{\xi + \frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|a|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|a|}\right) d\eta \right\} = \\
 &= \frac{1}{2} \left\{ \int_{\frac{\pi}{|a|}}^{\xi + \frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} \varphi(\xi - \eta) [e^{-\beta\eta} - e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|a|}\right)}] d\eta + \right. \\
 &+ \int_{\frac{\pi}{|a|}}^{\xi + \frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|a|}\right)} \left[ \varphi(\xi - \eta) - \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|a|}\right) \right] d\eta - \\
 &- \int_{\xi}^{\xi + \frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta - \\
 &- \int_{-\frac{\pi}{|a|}}^{\frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|a|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|a|}\right) d\eta + \\
 &+ \int_{\xi - \frac{\pi}{|a|}}^{\xi + \frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|a|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta - \frac{\pi}{|a|}\right) d\eta + \\
 &+ \int_0^{\frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta \left. \right\} = \frac{1}{2} (B_1^+ + B_2^+ + B_3^+ + B_4^+ + B_5^+ + B_6^+), \\
 B^- &= \int_0^{\xi} e^{ia\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta = - \int_{\frac{\pi}{|a|}}^{\xi + \frac{\pi}{|a|}} e^{ia\eta} e^{-\beta\left(\eta - \frac{\pi}{|a|}\right)} \varphi\left(\xi - \eta + \frac{\pi}{|a|}\right) d\eta =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} \varphi(\xi - \eta) [e^{-\beta\eta} - e^{-\beta(\eta - \frac{\pi}{|\alpha|})}] d\eta + \right. \\
&+ \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta(\eta - \frac{\pi}{|\alpha|})} \left[ \varphi(\xi - \eta) - \varphi\left(\xi - \eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right) \right] d\eta + \\
&+ \int_{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta + \\
&+ \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta(\eta - \frac{\pi}{|\alpha|})} \varphi\left(\xi - \eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta - \int_{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi + \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi\left(\xi - \eta + \frac{\pi}{|\alpha|}\right) d\eta - \\
&- \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^0 e^{i\alpha\eta} e^{-\beta\eta} \varphi(\xi - \eta) d\eta \left. \right\} = \frac{1}{2} (B_1^- + B_2^- + B_3^- + B_4^- + B_5^- + B_6^-).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\left. \begin{aligned} J_i^+ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) B_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \\ J_i^- &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{d(\mu)}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) B_i^-, \quad i = 1, 2, \dots, 6. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Тогда

$$J_\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 (J_i^+ + J_i^-). \quad (3.9)$$

Начнем с оценок  $B_i^+$  и  $B_i^-$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ). Имеем

$$|B_4^+| + |B_6^+| \leq 2 \int_0^{\frac{2\pi}{|\alpha|}} e^{-\beta\eta} |\varphi(\xi - \eta)| d\eta.$$

Пусть  $M = \sup_{[a_1 + s, b_1 - s]} |f(z)|$ . Тогда  $|\varphi(\xi - \eta)| = |f(z) - f(\xi - \eta + z)| \leq 2M, e^{-\beta\eta} \leq 1$ , и, следовательно,

$$|B_4^+| + |B_6^+| \leq \frac{8\pi M}{|\alpha|}.$$

В силу этой оценки согласно (3.8) получаем

$$\begin{aligned}
 |J_4^+| + |J_6^+| &\leq \frac{V}{2\pi} \int_{\Gamma_+} \frac{8\pi M}{|z|} \cdot \frac{ds}{L(\mu)} \leq \frac{8MV}{A} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\theta}{\cos \theta e^{q\rho_k \sin \theta}} \leq \\
 &\leq \frac{8MV}{A \cos \varphi_0} \int_0^{\varphi_0} e^{-\frac{2}{\pi} q\rho_k \theta} d\theta \leq \frac{4MV\pi}{A q\rho_k \cos \varphi_0} = \frac{1}{\cos \varphi_0} O\left(\frac{1}{\rho_k}\right). \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Та же оценка справедлива для  $B_4^-$ ,  $B_6^-$  и  $J_4^-$ ,  $J_6^-$ . Теперь отметим неравенства

$$\begin{aligned}
 |B_3^+| + |B_5^+| &\leq 2 \int_{\xi}^{\xi + \frac{2\pi}{|z|}} e^{-\beta\eta} |\varphi(\xi - \eta)| d\eta \leq 2\omega\left(\frac{2\pi}{a_0}\right) \int_{\xi}^{\xi + \frac{2\pi}{|z|}} e^{-\beta\eta} d\eta \leq \\
 &\leq 2\omega\left(\frac{2\pi}{a_0}\right) \int_{-q}^{-q + \frac{2\pi}{|z|}} e^{-\beta\eta} d\eta,
 \end{aligned}$$

так как  $\beta \geq 0$ . Известно, что для любого модуля непрерывности справедливо соотношение  $\omega(\lambda\delta) < (\lambda+1)\omega(\delta)$ , каковы бы ни были  $\lambda > 0$ ,  $\delta > 0$ . Стало быть

$$|B_3^+| + |B_5^+| \leq 2\omega\left(\frac{2}{\cos \varphi_0} \cdot \frac{\pi}{\rho_k}\right) \int_{q - \frac{2\pi}{|z|}}^q e^{\beta\eta} d\eta \leq 2\left(\frac{2}{\cos \varphi_0} + 1\right) \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \frac{e^{\beta q} - 1}{\beta},$$

и поэтому, учитывая лемму 1,

$$|J_3^+| + |J_5^+| \leq \frac{2V}{A\pi} \left(1 + \frac{2}{\cos \varphi_0}\right) \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) (c_1 + \ln \rho_k + o(1)). \quad (3.11)$$

Для  $|J_3^-|$ ,  $|J_5^-|$  получаем такую же оценку. Обратимся к  $B_2^+$ . Имеем

$$\begin{aligned}
 |B_2^+| &\leq \omega\left(\frac{\pi}{a_0}\right) \int_{\frac{\pi}{|z|}}^{\xi + \frac{\pi}{|z|}} e^{-\beta\left(\eta + \frac{\pi}{|z|}\right)} d\eta \leq \omega\left(\frac{\pi}{a_0}\right) \int_{-q + \frac{2\pi}{|z|}}^{\frac{2\pi}{|z|}} e^{-\beta\eta} d\eta = \\
 &= \omega\left(\frac{\pi}{a_0}\right) \int_{-\frac{2\pi}{|z|}}^{q - \frac{2\pi}{|z|}} e^{-\beta\eta} d\eta \leq 2\omega\left(\frac{\pi}{a_0}\right) \int_0^q e^{\beta\eta} d\eta \leq 2\left(1 - \frac{1}{\cos \varphi_0}\right) \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \frac{e^{\beta q} - 1}{\beta}.
 \end{aligned}$$

В силу этого

$$|J_2^+| \leq \frac{2V}{A\pi} \left(1 + \frac{1}{\cos \varphi_0}\right) \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) (c_1 + \ln \rho_k + o(1)). \quad (3.12)$$

Таким же путем неравенство (3.12) устанавливается для  $J_2^-$ . Оценка  $J_1^+$  и  $J_1^-$  будет проведена по другой схеме. Имеем

$$\begin{aligned}
 |J_1^+| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_+} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\tau(\xi) \int_{\frac{\pi}{|a|}}^{\frac{\pi}{|a|}} e^{i\mu\eta} \varphi(\xi - \eta) (1 - e^{-\beta \frac{\pi}{|a|}}) d\eta \right| \leq \\
 &\leq \frac{V}{2\pi} \int_{\Gamma_+} \frac{ds}{|L(\mu)|} \sup_{\xi} \left| \int_{\frac{\pi}{|a|}}^{\frac{\pi}{|a|}} \varphi(\xi - \eta) e^{i\mu\eta} (1 - e^{-\beta \frac{\pi}{|a|}}) d\eta \right| \leq \\
 &\leq \frac{V}{2\pi} \int_{\Gamma_+} \frac{ds}{|L(\mu)|} \int_{-q+\frac{\pi}{|a|}}^{\frac{\pi}{|a|}} \omega(q + \eta) [e^{-\beta\eta} - e^{-\beta(\eta + \frac{\pi}{|a|})}] d\eta.
 \end{aligned}$$

При последнем переходе была использована лемма 8. Далее, так как  $|L(\mu)| > Ae^{|\beta|q}$ , получаем

$$\begin{aligned}
 |J_1^+| &\leq \frac{V}{2\pi A} \int_{\Gamma_+} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} \int_{-q+\frac{\pi}{\rho_k}}^0 \omega(q + \eta) [e^{-\beta\eta} - e^{-\beta(\eta + \frac{\pi}{|a|})}] d\eta + \\
 &+ \frac{V}{2\pi A} \int_{\Gamma_+} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} \int_0^{\frac{\pi}{|a|}} \omega(q + \eta) e^{-\beta\eta} (1 - e^{-\beta \frac{\pi}{|a|}}) d\eta \leq \\
 &\leq \frac{V}{2\pi A} \int_{\Gamma_+} ds \int_{-q+\frac{\pi}{\rho_k}}^0 \omega(q + \eta) [e^{-\beta(q+\eta)} - e^{-\beta(q+\eta+\frac{\pi}{a_0})}] d\eta + \frac{MV}{\pi A} \int_{\Gamma_+} \frac{\pi}{|a|} \times \\
 &\times \frac{ds}{e^{|\beta|q}} = \frac{V}{2\pi A} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \omega(t) dt \int_{\Gamma_+} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t+\frac{\pi}{a_0})}] ds + \frac{2MV}{A} \int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\cos \varphi e^{q\rho_k \sin \varphi}} \leq \\
 &\leq \frac{V}{2\pi A} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \omega(t) dt \int_{\Gamma_+} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t+\frac{\pi}{a_0})}] ds + \frac{MV\pi}{Aq\rho_k \cos \varphi_0}. \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Оценим внутренний интеграл. Имеем

$$\begin{aligned}
 K &= \int_{\Gamma_+} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t+\frac{\pi}{a_0})}] ds = 2\rho_k \int_0^{\varphi_0} [e^{-\rho_k t \sin \varphi} - e^{-\rho_k(t+\frac{\pi}{a_0}) \sin \varphi}] d\varphi = \\
 &= 2\rho_k \left\{ \int_0^{\frac{1}{\rho_k(t+\frac{\pi}{a_0})}} + \int_1^{\frac{\pi}{2\rho_k t}} + \int_{\frac{\pi}{2\rho_k t}}^{\varphi_0} \right\} = 2\rho_k \{K_1 + K_2 + K_3\}. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

При оценке  $K_2$  увеличим верхний предел, а к подынтегральной функции, как функции  $t$ , применим теорему Лагранжа. В результате получим

$$K_2 \leq \frac{\int_1^{\frac{\arcsin \frac{1}{\rho_k t}}{\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right)}} \frac{\pi}{a_0} \rho_k \sin \varphi e^{-\rho_k (t+h) \sin \varphi} d\varphi, \quad 0 < h < \frac{\pi}{a_0}.$$

Так как  $a_0 = \rho_k \cos \varphi_0$ , а  $\sin \varphi \leq \frac{1}{\rho_k t}$  в интервале интегрирования, то

$$\begin{aligned} K_2 &\leq \frac{\pi}{\rho_k t \cos \varphi_0} \int_1^{\frac{\arcsin \frac{1}{\rho_k t}}{\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right)}} e^{-\rho_k (t+h) \sin \varphi} d\varphi \leq \\ &\leq \frac{\pi}{\rho_k t \cos \varphi_0} \int_0^{\arcsin \frac{1}{\rho_k t}} e^{-\frac{2}{\pi} \rho_k t \varphi} d\varphi \leq \frac{\pi^2}{2\rho_k^2 t^2 \cos \varphi_0}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

При оценке  $K_1$  и  $K_3$  воспользуемся следствием из леммы 9

$$\begin{aligned} K_1 &= \int_0^{\frac{1}{\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right)}} [e^{-\rho_k t \sin \varphi} - e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \sin \varphi}] d\varphi \leq \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right)}} [e^{-\rho_k t \varphi} - e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \varphi}] d\varphi \leq \int_0^{\varphi_0} [e^{-\rho_k t \varphi} - e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \varphi}] d\varphi, \\ K_3 &= \int_{\frac{\pi}{2\rho_k t}}^{\varphi_0} [e^{-\rho_k t \sin \varphi} - e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \sin \varphi}] d\varphi \leq \int_{\frac{\pi}{2\rho_k t}}^{\varphi_0} [e^{-\frac{2}{\pi} \rho_k t \varphi} - e^{-\frac{2}{\pi} \rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \varphi}] d\varphi \leq \\ &\leq \int_0^{\varphi_0} [e^{-\frac{2}{\pi} \rho_k t \varphi} - e^{-\frac{2}{\pi} \rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \varphi}] d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{2}{\pi} \varphi_0} [e^{-\rho_k t \varphi} - e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \varphi}] d\varphi. \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_1 + K_3 \leq \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \int_0^{\varphi_0} [e^{-\rho_k t \varphi} - e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{a_0}\right) \varphi}] d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) \left[ \frac{1 - e^{-\rho_k t \varphi_0}}{\rho_k t} - \frac{1 - e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{\alpha_0}\right) \varphi_0}}{\rho_k \left(t + \frac{\pi}{\alpha_0}\right)} \right] = \\
&= \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{\rho_k} \left[ \frac{t + \frac{\pi}{\alpha_0} - t}{t \left(t + \frac{\pi}{\alpha_0}\right)} - \frac{\left(t + \frac{\pi}{\alpha_0}\right) e^{-\rho_k t \varphi_0} - t e^{-\rho_k \left(t + \frac{\pi}{\alpha_0}\right) \varphi_0}}{t \left(t + \frac{\pi}{\alpha_0}\right)} \right] \leq \\
&\leq \frac{\pi \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{\alpha_0 \rho_k t^2} = \frac{\pi \left(1 + \frac{\pi}{2}\right)}{\rho_k^2 t^2 \cos \varphi_0}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

На основании оценок (3.15) и (3.16), используя формулу (3.14), будем иметь

$$K \leq \frac{2\pi(1+\pi)}{\rho_k^2 t^2 \cos \varphi_0}. \quad (3.17)$$

Теперь возвратимся к соотношению (3.13). В силу (3.17) имеем

$$|J_1^+| \leq \frac{V(1+\pi)}{2A\rho_k \cos \varphi_0} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \frac{\omega(t)}{t^2} dt + \frac{1}{\cos \varphi_0} O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

Но

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \frac{\omega(t) dt}{t^2} &= \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \frac{\omega(t)}{t} d \ln t \leq \sup_{\left[\frac{\pi}{\rho_k}, q\right]} \frac{\omega(t)}{t} \cdot \text{var}_{\left[\frac{\pi}{\rho_k}, q\right]} \ln t = \frac{\omega(t_0)}{t_0} \left[ \ln q - \ln \frac{\pi}{\rho_k} \right] \leq \\
&< \frac{2}{\pi} \rho_k \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \left[ \ln \frac{q}{\pi} + \ln \rho_k \right], \quad \text{ибо } \frac{\omega(t_0)}{t_0} \leq 2 \frac{\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right)}{\frac{\pi}{\rho_k}}, \text{ если } \frac{\pi}{\rho_k} < t_0.
\end{aligned}$$

Таким образом

$$|J_1^+| \leq \frac{V(1+\pi)}{A\pi \cos \varphi_0} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \left[ \ln \rho_k + \ln \frac{q}{\pi} \right] + \frac{1}{\cos \varphi_0} O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad \rho_k \uparrow \infty. \quad (3.18)$$

Остается оценить  $J_1^-$ . Применяя лемму 9 и условие (1.1), имеем

$$|J_1^-| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{d\mu}{L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\xi - \frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\mu\eta} \varphi(\xi - \eta) [1 - e^{i\beta \frac{\pi}{|\alpha|}}] d\eta \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
& \leq \frac{V}{2\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{ds}{|L(\mu)|} \sup_{\xi} \left| \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\frac{\pi}{|\alpha|}} e^{i\mu\eta} \varphi(\xi - \eta) [1 - e^{\beta \frac{\pi}{|\alpha|}}] d\eta \right| \leq \\
& \leq \frac{V}{2\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{ds}{|L(\mu)|} \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^{\frac{\pi}{|\alpha|}} \omega(q - \eta) [e^{-\beta\eta} - e^{-\beta(\eta - \frac{\pi}{|\alpha|})}] d\eta \leq \\
& \leq \frac{V}{2A\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} \int_0^{\frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q - \eta) [e^{-\beta\eta} - e^{-\beta(\eta - \frac{\pi}{\alpha_0})}] d\eta + \\
& + \frac{V}{2A\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{ds}{e^{|\beta|q}} \int_{-\frac{\pi}{|\alpha|}}^0 \omega(q - \eta) e^{-\beta\eta} [1 - e^{\beta \frac{\pi}{\alpha_0}}] d\eta \leq \\
& \leq \frac{V}{2A\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\rho_k}} \omega(q - \eta) d\eta \int_{\Gamma_-} [e^{-|\beta|(q - \eta)} - e^{-|\beta|(q - \eta + \frac{\pi}{\alpha_0})}] ds + \\
& + \frac{MV}{A\pi} \int_{\Gamma_-} \frac{\pi}{|\alpha|} \cdot \frac{ds}{e^{|\beta|q}} = \\
& = \frac{V}{2A\pi} \int_{\frac{\pi}{\rho_k}}^q \omega(t) dt \int_{\Gamma_+} [e^{-\beta t} - e^{-\beta(t + \frac{\pi}{\alpha_0})}] ds + \frac{MV}{A\pi} \int_{\Gamma_+} \frac{\pi}{|\alpha|} \cdot \frac{ds}{e^{|\beta|q}}.
\end{aligned}$$

Последняя сумма в точности совпадает с (3.13), поэтому для  $\Gamma_-$  верно неравенство (3.18). Весь интеграл по  $\Gamma$  имеет в результате оценку (учитывая (3.11), (3.12), (3.10), (3.18))

$$\begin{aligned}
|J_{\Gamma}| \leq \frac{2V}{A} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) & \left[ \frac{(1+\pi)}{\cos \varphi_0} \ln \frac{q\rho_k}{\pi} + \frac{2}{\pi} \left(2 + \frac{3}{\cos \varphi_0}\right) (c_1 + \ln \rho_k + o(1)) \right] + \\
& + \frac{1}{\cos \varphi_0} O\left(\frac{1}{\rho_k}\right). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Объединяя теперь (3.7) и (3.19) и обозначая через  $H_i$  ( $i=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ) постоянные, не зависящие от  $\rho_k$  и  $\varphi_0$ , получаем

$$\begin{aligned}
|J_{\rho_k}| & \leq |J_{\Gamma}| + |J_1| \leq \\
& \leq H_1 \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \left\{ H_2 \ln \rho_k + \frac{H_3}{\varphi_0} + \frac{H_4 + H_5 \ln \rho_k + o(1)}{\cos \varphi_0} + H_6 + o(1) \right\} + \\
& + \frac{1}{\cos \varphi_0} O\left(\frac{1}{\rho_k}\right), \quad \rho_k \uparrow \infty.
\end{aligned}$$

Если положить теперь  $\varphi_0 = O\left(\frac{1}{\ln \rho_k}\right)$ , то будем иметь  $|J_{\rho_k}| = O\left[\omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \ln \rho_k\right]$ ,  $\rho_k \uparrow \infty$ , и теорема доказана.

Выкладки, приведенные здесь, позволяют утверждать также, что верна

**Теорема 6.** Пусть функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), имеет в интервале  $(a_1, b_1)$  непрерывные производные до порядка  $n$  включительно, и пусть  $\omega(\delta)$  — модуль непрерывности  $f^{(n)}(z)$  на отрезке  $[a_1 + \varepsilon, b_1 - \varepsilon]$ ,  $(0 < \varepsilon < \frac{q}{2})$ . Если выполняется условие (1.2) теоремы 2, то для  $z \in [a_1 + q + \varepsilon, b_1 - q - \varepsilon]$

$$f(z) - S_{\rho_k}(z, f) = O\left[\rho_k^{p-n} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \ln \rho_k\right], \quad \rho_k \uparrow \infty.$$

В самом деле, формула (1.3), применявшаяся при доказательстве теоремы 2, может быть преобразована к виду

$$\begin{aligned} S_{\rho_k}(z, f) - f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi e^{i\mu\eta} f^{(n)}(\xi - \eta + z) d\eta = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi e^{i\mu\eta} [f^{(n)}(\xi - \eta + z) - f^{(n)}(z)] d\eta + \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(z)}{2\pi} \int_{|\mu|=\rho_k} \frac{d\mu}{\mu^n L(\mu)} \int_a^b d\sigma(\xi) \int_0^\xi e^{i\mu\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Из доказательства теоремы 5 ясно, что при  $\rho_k \uparrow \infty$  первое слагаемое имеет порядок  $\rho_k^{p-n} \omega\left(\frac{\pi}{\rho_k}\right) \ln \rho_k$ ; порядок же второго слагаемого, как нетрудно подсчитать, применяя лемму 2, равен  $\rho_k^{p-n-1}$ .

## § 5. Бесконечно дифференцируемые функции

Во всех предыдущих теоремах существенным образом использовались ограничения на рост функции  $L(\mu)$  снизу. Из теоремы 2 и 6 следует, что чем больше производных у функции  $f(z)$  в интервале  $(a_1, b_1)$ , тем слабее условия на рост  $L(\mu)$ , обеспечивающие сходимость  $S_{\rho_k}(z, f)$ . В связи с этим уместно отметить теорему, доказанную в (1), где подобные условия вообще отсутствуют. Она утверждает, что если  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), аналитична в  $(a_1, b_1)$ , то существует система окружностей  $|\mu| = \rho_k$ ,  $\rho_k \rightarrow \infty$ , обладающая следующим свойством: для любого компакта  $E \subset (a_1 - a, b_1 - b)$  найдется число  $\delta > 0$  такое, что для любого

$$\delta_1, 0 < \delta_1 < \delta, |f(z) - S_{r_k}(z, f)| < e^{-\delta_1 \rho_k}, k > K(\delta_1),$$

для всех  $z$  из некоторого прямоугольника, содержащего  $E$ .

При доказательстве теоремы использовалась доказанная там же лемма. Пусть  $L(\mu) = \int_{-q}^q e^{\mu t} d\tau(t)$ , а функция  $\tau(z)$  имеет на отрезке

$[-q, q]$  ограниченную вариацию. Тогда существует последовательность окружностей  $|\mu| = \rho_k, \rho_k \uparrow \infty$  и число  $p > 0$  такие, что

$$\ln |L(re^{i\theta})| > (q |\sin \theta| - \varepsilon) r, \rho_k - p \leq r \leq \rho_k + p, k > K(\varepsilon).$$

Будем называть систему окружностей, фигурирующих в этой лемме, фундаментальной. Докажем теорему о скорости сходимости  $S_{r_k}(z, f)$ , если  $f(z)$  принадлежит некоторому квазианалитическому классу, а окружности фундаментальной системы удовлетворяют некоторому дополнительному условию.

**Теорема 7.** Пусть функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), бесконечно дифференцируема в  $(a_1, b_1)$  и существуют последовательность  $\{n_s\}$ ,  $s = 1, 2, \dots$  натуральных чисел и число  $M > 0$  такие, что

$$\sqrt[n_s]{M_{n_s}} \leq n_s \cdot M, \quad M_{n_s} = \sup_{(a_1, b_1)} |f^{(n_s)}(z)|. \quad (5.1)$$

Если  $\sup_{k > 0} \frac{\rho_{k+1}}{\rho_k} = \lambda < +\infty$ , то существует подпоследовательность

$|\mu| = \rho_{k_i}, \rho_{k_i} \uparrow \infty$  окружностей фундаментальной системы такая, что для любого  $\delta_1, 0 < \delta_1 < (Me)^{-1}$ , и для всех  $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$

$$|f(z) - S_{\rho_{k_i}}(z, f)| \leq \exp(-\delta_1 \rho_{k_i}), \quad i > J(\delta_1).$$

Из доказательства теоремы 2, а также из приведенной леммы следует, что при любом натуральном  $n$

$$|f(z) - S_{\rho_k}(z, f)| \leq c(V) M_n e^{\varepsilon \rho_k} \rho_k^{-n} \ln \rho_k, \quad \varepsilon > 0, k > K(\varepsilon).$$

Благодаря условию (5.1)

$$\begin{aligned} |f(z) - S_{\rho_k}(z, f)| &\leq c(V) (M \cdot n_s)^{n_s} \cdot \rho_k^{-n_s} \cdot e^{\varepsilon \rho_k} \ln \rho_k = \\ &= c(V) \left( \frac{n_s}{e \delta \rho_k} \right)^{n_s} e^{\varepsilon \rho_k} \ln \rho_k, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{1}{Me}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Будем рассматривать такую подпоследовательность  $|\mu| = \rho_{k_i}, \rho_{k_i} \rightarrow \infty$  окружностей фундаментальной системы, что между двумя соседними числами  $\delta \rho_{k_i}$  и  $\delta \rho_{k_i-1}$  содержится по крайней мере одно  $n_s$  из последовательности  $\{n_s\}$ . Неравенство (5.2) верно для фиксированных  $\varepsilon, \rho_k$  и всех  $n_s$ . В качестве  $n_s$  возьмем наибольшее, удовлетворяющее условию  $n_s \leq \delta \rho_{k_i}$ . Тогда

$$|f(z) - S_{\rho_{k_1}}(z, f)| < \left( \frac{\partial \rho_{k_1}}{e \partial \rho_{k_1}} \right)^{\partial \rho_{k_1} - 1} e^{\partial \rho_{k_1}} \ln \rho_{k_1} \cdot C(V) \leq \\ \leq c(V) \left( \frac{1}{e} \right)^{\frac{\partial}{\lambda} \rho_{k_1}} \cdot e^{\partial \rho_{k_1}} \cdot \ln \rho_{k_1} = c(V) e^{-\left(\frac{\partial}{\lambda} - 1\right) \rho_{k_1}} \ln \rho_{k_1}.$$

Можно считать, что  $\varepsilon$  выбрано таким образом, что  $0 < \varepsilon < \frac{\partial}{\lambda} - \partial_1$ .

Следовательно, для всех  $\rho_{k_1} > \rho(\partial_1)$

$$|f(z) - S_{\rho_{k_1}}(z, f)| \leq \exp(-\partial_1 \rho_{k_1}), \quad z \in (a_1 - a, b_1 - b),$$

что и утверждалось.

Замечание 1. Если  $f(z)$  аналитична в  $(a_1, b_1)$ , то в качестве последовательности  $\{n_s\}$  можно взять последовательность всех натуральных чисел и доказать, что для  $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$

$$|f(z) - S_{\rho_k}(z, f)| \leq \exp(-\partial_1 \rho_k),$$

не ограничивая расположения окружностей  $|\mu| = \rho_k$ , так как для любого  $\rho_k$  найдется  $n$  такое, что  $\partial \rho_k - 1 \leq n \leq \partial \rho_k$ .

Замечание 2. Если функция  $f(z)$ , удовлетворяющая уравнению (A), является целой, то для  $z \in (a_1 - a, b_1 - b)$

$$\left( \sup_z |f(z) - S_{\rho_k}(z, f)| \right)^{\frac{1}{\rho_k}} \rightarrow 0, \quad \rho_k \rightarrow \infty,$$

где  $\rho_k$  обозначает радиус  $k$ -той окружности фундаментальной системы.

Это утверждение можно доказать, выбирая для  $\rho_k$  целое  $n$  так же, как в предыдущем замечании и, учитывая, что для любой целой функции

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{M_n}}{n} = 0.$$

Автор искренне благодарит профессора А. Ф. Леонтьева, под руководством которого выполнена настоящая работа.

Московский энергетический институт

Поступило 30.III.1967

Ա. Մ. ՍԵԴԼԵՑԿԻ

ՄԻՋՆԻՆ ԻՄԱՍՏՈՎ ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՀՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԻՐԻՔԼԵՑԻ  
ԲԱԶՄԱՆԴԱՄԵՐԻ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՄԲ ՆԵՐԿԱՅԱՑՆԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

$f(z)$  ֆունկցիայի համար, որը հանդիսանում է հետևյալ հավասարման  
լուծումը

$$\int_a^b f(z+t) dz(t) = 0,$$

որոշակի ձևով կառուցվում է Դիրիխլեի բազմանդամների հաջորդականություն: Ուսումնասիրվում է այդ հաջորդականության դուգամիտության արագությունը  $f(z)$  ֆունկցիայի և

$$L(\mu) = \int_a^b e^{i\mu t} d\sigma(t)$$

տերմիններով:

A. M. SEDLETZKI

# ON THE REPRESENTATION OF THE PERIODIC IN THE MEAN FUNCTIONS BY THE SERIES OF DIRICHLET POLINOMIALS

## S u m m a r y

For the function  $f(z)$ , which is a solution of the equation

$$\int_a^b f(z+t) d\sigma(t) = 0,$$

in a certain manner a sequence of Dirichlet polinomials is formed. The rate of convergence of that sequence in terms of the functions  $f(z)$

and  $L(\mu) = \int_a^b e^{i\mu t} d\sigma(t)$  is investigated.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Ф. Леонтьев. О свойствах последовательностей полиномов Дирихле, сходящихся на интервале мнимой оси, Изв. АН СССР, серия матем., 29, 1965, 269—328.
2. S. Verblunsky. On an expansion in exponential series, Quart. J., Math., 7, № 27, 1956, 231—240.
3. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, Москва, „Мир“, т. 1, 1965.
4. А. Ф. Тиман. Теория приближения функций действительного переменного, Москва, Физматгиз, 1960.
5. И. П. Натансон. Конструктивная теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
6. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М.—Л., Гостехиздат, 1951.
7. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций, М.—Л., Гостехиздат, 1950.