ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 6, 1967 Математика

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

ОБЛАСТИ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ЛОРАНА В C^n

В данной работе рассмотрены следующие вопросы:

1. Структура области нормальной сходимости ряда Лорана в C^n.
2. Разложимость функции $f(z)=f(z_1,\cdots,z_n)$, голоморфной в кратно-круговой области $G\subset C^n$ в нормально сходящийся ряд Лорана.
3. Построение оболочек голоморфности (неполных) кратно-круговых областей.

Используемые понятия и факты из теории функций многих комплексных переменных содержатся в книге [1].

§ 1. Ряд Лорана и голоморфные функции в кратно-круговых областях

Функция $f(z)=f(z_1,\cdots,z_n)$, голоморфная в замкнутом кольце $\overline{D}=\overline{D}_1\times\cdots\times\overline{D}_n$ $(D_k=[z_k;\ r_k<|z_k|<R_k])$, разлагается в нормально сходящийся ряд Лорана

$$f(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{k_1,\cdots,k_n=-\infty}^{\infty} a_{k_1\cdots k_n}\, z_1^{k_1}\cdots z_n^{k_n}. \tag{1}$$

Пусть $\overline{D}$ и $\overline{D}'$ два произвольных кольца.

Лемма 1. *Если $f(z)$ голоморфна в $\overline{D}\cup\overline{D}'$; $D''=D\cap D'\neq\varnothing$, то разложения $f(z)$ в ряд Лорана в D и D' совпадают.*

Заметим, что D'' тоже является кольцом и разложения в D и D' совпадают с разложением в D''. Это следует из представления коэффициентов

$$a_{k_1\cdots k_n}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n}\frac{f(t_1,\cdots,t_n)}{t_1^{k_1}\cdots t_n^{k_n}}\,dt_1\wedge\cdots\wedge dt_n. \tag{2}$$

$\partial D=\partial D_1\times\cdots\times\partial D_n$ — остов границы кольца D.

Лемма 2. *Если области $G_1,\cdots,G_m\subset R_n$, $S\subset\subset G=\bigcup_1^m G_k$, то существуют такие $S_k\subset\subset G_k$,* что $S\subset\bigcup_1^m S_k$.

Теорема 1. Функция $f(z)$, *голоморфная в кратно-круговой области $G\subset C^r$, разлагается в ряд Лорана, нормально сходящийся в оболочке голоморфности $H(G)$.*

Доказательство. Пусть $G_1\subset\subset G$. Тогда $S_1\subset\subset S$, где S_1 и S образы G_1 и G в пространстве модулей R_n^+. По Лемме Гейне-Бореля

S_1 можно покрыть конечным числом m открытых прямоугольных параллелепипедов $\sigma_k \subset\subset S$, $S_1 \subset\subset \bigcup\limits_1^m \sigma_k$, которые в совокупности пересекаются, то есть

$$\left(\bigcup_l \sigma_{k_l}\right) \cap \left(\bigcup_j \sigma_{k_j}\right) \neq \varnothing \tag{3}$$

для любого разбиения $\{k_l\} \cup \{k_j\} = (1, \cdots, m)$. Следовательно G_1 можно покрыть конечным числом m в совокупности пересекающихся колец $D^{(k)}$ $(k=1, \cdots, m)$. В каждом из них $f(z)$ разлагается в нормально сходящийся ряд Лорана. Ввиду условия (3) и леммы 1 эти разложения совпадают. Ввиду того, что $G_1 \subset\subset \bigcup\limits_{k=1}^m D^{(k)}$ и леммы 2 G_1 можно покрыть компактами $P_k \subset\subset D^{(k)}$ $(k=1, \cdots, m)$. В каждом P_k ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|\,|z|^k \tag{4}$$

равномерно сходится.

Следовательно ряд (4) равномерно сходится в $G \subset \bigcup\limits_1^m P_k$. В силу произвольности компакта $G_1 \subset G$ ряд нормально сходится в G. Остается заметить, что $H(G)$ кратно-круговая область (свойство автоморфизма) и $f(z)$ голоморфна в $H(G)$.

Теорема 2 (*обратная*). *Область нормальной сходимости G ряда* (1) *является* (*кратно круговой) областью голоморфности.*

Докажем, что на каждой орбите $O_r \subset \partial G$ $r = (r_1, \cdots, r_n) \in \partial S$ (S — образ G в R_n^+). Существует хотя бы одна точка $z^{(0)} = (z_1^{(0)} \cdots z_n^{(0)})$ $|z_k^{(0)}| = |z_k|$, где сумма ряда (1) не голоморфна. В обратном случае орбиту O_r по лемме Гейне-Бореля покроем конечной системой $\sigma = \bigcup \sigma_k$ полицилиндров, где $f(z)$ голоморфна, возьмем наибольшую кратно-круговую область $G' : G \subset G' \subset G \cup \sigma$. По теореме 1 ряд нормально сходится в G', а это противоречит определению G (так как $G' \setminus G \neq \varnothing$). Таким образом $f(z)$ является барьером в некоторой точке $z^{(0)} \subset O_r$. Вращением $z_k^1 = z_k\, e^{i\varphi_k}$ $(k = 1, \cdots, n)$ можно этот барьер перенести в желаемую точку границы области G. Теорема доказана.

§ 2. Оболочка голоморфности кратно-круговых областей

Кратно-круговая область $G \subset C^n$ называется логарифмически выпуклой, если ее образ Q в пространстве логарифмов модулей $L_n \supset Q = [\rho;\ \rho_k = \ln |z_k|,\ z \in G]$ выпуклый.

Известно, что из псевдовыпуклости кратно-круговой области следует ее логарифмическая выпуклость. Из теоремы Ока о псевдовыпуклости областей голоморфности следует, что кратно-круговые области голоморфности являются логарифмически выпуклыми.

Приведем пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

Пусть $C^2 \supset G = [z;\ 0 < |z_1| < a,\ 0 \leqslant |z_2| < b]$, $M_l = [z_1 = 0,\ 0 \leqslant |z_2| < l]$, где $l < b$.

Как G, так и $G \cup M_l$ логарифмически выпуклые, G псевдовыпукла, а $G \cup M_l$ — нет.

Определение логарифмической выпуклости в некотором смысле неполное: точки, лежащие на плоскостях $z_k = 0$ не влияют на свойство области быть логарифмически выпуклой или нет, так как они в L_n уходят в $-\infty$.

Можно добавить определение логарифмической выпуклости новым требованием, после чего обратная теорема становится справедливой.

Нам понадобится следующая

Лемма 3. *Если кратно-круговая область $G \subset C^n$ логарифмически выпукла, S ее образ в R_n^+, полуинтервал $l_m(a^{(0)}] = [r;\ r_k = a_k^{(0)};\ k = 1, \cdots, m-1, m+1, \cdots, n;\ 0 < r_m \leqslant a_m^{(0)}] \subset S$ $a_k \neq 0$, то и всякий полуинтервал $l_m(a] \subset S$ при $a = (a_1, \cdots, a_n) \in S$.*

Из леммы 3 следует, что или все полуинтервалы $l_m(a] \subset S$, $a \in S$ или ни один из них полностью не принадлежит S (при том же m).

Определение логарифмической выпуклости ничего не говорит о концах этих интервалов $(a_1, \cdots, a_{m-1}, 0, a_{m+1}, \cdots, a_n)$. Мы добавим старое определение логарифмической выпуклости требованием:

Или концы всех интервалов $l_m(a]$ принадлежат S или ни один из них не принадлежит S.

Это требование, вводящее определенность в понятие логарифмической выпуклости, можно оправдать, интерпретируя координатные плоскости как прообразы опорных плоскостей в бесконечно удаленной точке $(-\infty)$.

Теорема 3. *Для того чтобы кратно-круговая область $G \subset C$ была псевдовыпуклой необходимо и достаточно, чтобы она была логарифмически выпуклой.*

Как уже отмечалось необходимость условия известна. Докажем достаточность.

Предположим сперва, что G ограничена. Тогда ее образ $Q \subset L_n$ ограничен с одной стороны (существует такой октант $P = [\rho;\ \rho_k < R]$ что $Q \subset P$). Тогда Q можно представить в виде внутренности пересечения полупространств $Q = \bigcap \left[\rho;\ \sum_1^m a_m \rho_m < b\right]$, где все числа G_k рациональны, $a_k = \frac{p_k}{q_k}$. Тогда

$$Q = \bigcap \left[\rho;\ \sum_{m=1}^{n} \frac{p_m}{q_m} \rho_m < b\right] = \bigcap [\rho;\ \Sigma k_m \rho_m < B],$$

где все числа k_m целые (положительные или отрицательные). Заметим, что те ρ_m могут иметь отрицательные коэффициенты, в направлении осей которых Q ограничена с обеих сторон $(\overline{G} \cap (z_m = 0) = \varnothing)$.

Вернемся к старым координатам, подставляя вместо $\rho_m = \ln|z_m|$, чтобы получить прообраз опорной плоскости

$$\sigma = \left[\rho; \sum_1^n k_m \rho_m = B\right] \text{ в } C^n,$$

$$k_1 \ln|z_1| + \cdots + k_n \ln|z_n| = B,$$

$$|z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}| = c, \quad z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} = ce^{i\theta}.$$

Прообразом плоскости $\sigma \subset L_n$ в C^n служит семейство гиперболоидов, зависящее от одного параметра θ.

Построим функции

$$F_k(z) \equiv \frac{1}{z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n} - Ce^{i\theta}}; \quad \frac{1}{z_{k_m}} \equiv f_{k_m}(z)$$

все функции такого вида (при надлежащем выборе $k_1, \cdots, k_n$ и c) голоморфны в G (так как σ и Q не пересекаются) и имеют особенности на аналитических поверхностях $z^k = ce^{i\theta}$. G является внутренностью пересечения областей голоморфности функции $F_k(z)$ и $f_{k_m}(z)$, следовательно она является областью голоморфности (то есть псевдовыпукла).

Пусть теперь область G неограниченная. Введем последовательность областей $G_N = G \cap U_N$, где $U_N = [z; |z_k| < R_N]$, $R_N \uparrow \infty$. Область G_N логарифмически выпуклая, так как Q_N — его образ в L_N является пересечением двух выпуклых областей — G и октанта $P_N = [\rho; \rho_k < \ln R_N]$.

В силу логарифмической выпуклости и ограниченности областей G_N они псевдовыпуклые.

Имеем $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_N \to G$.

Следовательно G, как предел расширяющихся псевдовыпуклых областей, псевдовынукла. Теорема доказана.

Следствие. *Оболочкой голоморфности кратно-круговой области $G \subset C^n$ является ее логарифмически-выпуклая оболочка (конструкция ее известна).*

Теоремы 1, 2, 3 дают обобщение известной теоремы Гартогса о логарифмической выпуклости области нормальной сходимости ряда Тейлора (см., например, [2]).

Автор выражает благодарность В. С. Владимирову за руководство настоящей работой.

Математический институт им. Стеклова
АН СССР
Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 12.V.1967

Ն. Բ. ԵՆԳԻԲԱՐՅԱՆ

ԼՈՐԱՆԻ ՇԱՐՔԻ ԶՈՒԳԱՄԻՏՈՒԹՅԱՆ ՏԻՐՈՒՅԹԸ C^n-ՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է C^n տարածության մեջ Լորանի շարքի նորմալ զուգամիտության տիրույթի կառուցվածքը։ Ապացուցվում է, որ n-շրջանային (ոչ լրիվ) G տիրույթում հոլոմորֆ ֆունկցիան վերլուծվում է Լորանի շարքի, որը նորմալ զուգամետ է տիրույթի H(G) հոլոմորֆության թաղանթում։ Ապացուցվում է նույնպես, որ H(G)-ն համընկնում է G-ի լոգարիթմական ուռուցիկ թաղանթի հետ։

N. B. YENGIBARJAN

THE REGION OF CONVERGENCE OF LORAN SERIES IN C^n

Summary

In this paper the construction of domains of normal convergence for Loran-Series in C^n is investigated.

It is proved, that the function holomorph in n — circular (incomplete) region G, may be developed in Loran series, which converges normally in the shell of holomorphity $H(G)$ of G. It is shown, that $H(G)$ coincides with the logarithmical convex shell of G.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Владимиров.* Методы теории функций многих комплексных переменных, М., 1964.
2. *Л. А. Айзенберг* и *Б. С. Митягин.* Пространства функций, аналитических в кратно-круговых областях, Сиб. мат. журн., 1, № 2, 1960, 153—170.