Р. И. ОСИПОВ

О РАСХОДИМОСТИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РЯДОВ К БЕСКОНЕЧНОСТИ

Введем обозначения: $E^+(\varphi) \equiv E(\varphi(x) > 0)$, $E^-(\varphi) \equiv E(\varphi(x) < 0)$.

В работе [1] показано, что ряд по системе Хаара не может расхо- диться к ∞ на множестве положительной меры.

При доказательстве этого утверждения существенно используют- ся следующие свойства системы Хаара:

$$\int_0^1 \chi_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\frac{mE^+(\chi_n)}{mE^-(\chi_n)} = 1, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Далее А. А. Талаляном была предложена задача: исследовать вопрос существования такой полной ортонормированной системы функ- ций $\{\varphi_n(x)\}$, что ряд по этой системе не может сходиться к ∞ на мно- жестве положительной меры, вместе с тем

$$\frac{mE^+(\varphi_n)}{mE^-(\varphi_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

В настоящей статье показывается, что эта задача имеет положитель- ное решение, а именно верна

Теорема. *На отрезке $[0,1]$ существует полная ортонорми- рованная система функций $\{\varphi_n(x)\}$, обладающая свойствами:*

а) *для любой измеримой, почти всюду на $[0,1]$ конечной функ- ции $f(x)$ существует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, сходящийся к $f(x)$ почти в каждой точке отрезка $[0,1]$, т. е. система $\{\varphi_n(x)\}$ является сис- темой представления;*

б) *ряд по системе $\{\varphi_n(x)\}$ не может расходиться к бесконеч- ности на множестве положительной меры;*

в) $\frac{mE_n^+}{mE_n^-} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, где $E_n^+ \equiv E^+(\varphi_n)$, $E_n^- \equiv E^-(\varphi_n)$.

По аналогии с системой Хаара определим на отрезке $[0,1]$ пол- ную ортонормированную систему функций $\chi_n^{(\lambda)}(x; \lambda)$ (λ — произволь- ное фиксированное целое число > 1) следующим образом:

$$\chi_0^{(0)}(x; \lambda) \equiv 1, \quad x \in [0,1], \quad (3)$$

$$\chi_0^{(1)}(x; \lambda) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, & x \in \Delta_0^{(1)}, \\ -\sqrt{\lambda}, & x \in \Delta_0^{(2)}, \end{cases} \quad (4)$$

где $\Delta_0^{(1)}$ и $\Delta_0^{(2)}$ — интервалы, удовлетворяющие условиям

$$\Delta_0^{(1)} \subset [0, 1], \quad \Delta_0^{(2)} \subset [0, 1], \quad \Delta_0^{(1)} \cdot \Delta_0^{(2)} = 0, \quad \frac{m\Delta_0^{(1)}}{m\Delta_0^{(2)}} = \lambda, \\ \overline{\Delta_0^{(1)}} + \overline{\Delta_0^{(2)}} \equiv [0, 1]. \quad (5)$$

Разделим каждый из интервалов $\Delta_0^{(1)}$, $\Delta_0^{(2)}$ соответственно на 2 интервала $\Delta_1^{(1)}$, $\Delta_1^{(2)}$ и $\Delta_1^{(3)}$, $\Delta_1^{(4)}$ (нумерация слева направо) так, что

$$\frac{m\Delta_1^{(i)}}{m\Delta_1^{(i+1)}} = \lambda, \quad i = 1, 3. \quad (6)$$

Далее положим

$$\chi_1^{(1)}(x; \lambda) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda \cdot m\Delta_0^{(1)}}}, & x \in \Delta_1^{(1)}, \\ \frac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m\Delta_0^{(1)}}}, & x \in \Delta_1^{(2)}, \\ 0, & x \in \overline{\Delta_0^{(1)}}, \end{cases} \quad (7)$$

$$\chi_1^{(2)}(x; \lambda) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda m\Delta_0^{(2)}}}, & x \in \Delta_1^{(3)}, \\ \frac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m\Delta_0^{(2)}}}, & x \in \Delta_1^{(4)}, \\ 0, & x \in \overline{\Delta_0^{(2)}}. \end{cases} \quad (8)$$

Положим, что, поступая аналогично, мы уже построили функции $\chi_m^{(k)}(x; \lambda)$, $m = 1, \dots, n$; $1 \leq k \leq 2^m$.

Пусть $\Delta_n^{(i)}$ ($i = 1, \dots, 2^{n+1}$) — означают занумерованные слева направо интервалы постоянства функций $\chi_n^{(k)}(x; \lambda)$ ($1 \leq k \leq 2^n$).

Каждый из интервалов $\Delta_n^{(i)}$ разобьем соответственно на 2 интервала $\Delta_{n+1}^{(2i-1)}$, $\Delta_{n+1}^{(2i)}$ (нумерация слева направо) так, что

$$\frac{m\Delta_{n+1}^{(2i-1)}}{m\Delta_{n+1}^{(2i)}} = \lambda \quad (i = 1, \dots, 2^n). \quad (9)$$

Далее положим

$$\chi_{n+1}^{(i)}(x; \lambda) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda m\Delta_n^{(i)}}}, & x \in \Delta_{n+1}^{(2i-1)}, \\ \frac{-\sqrt{\lambda}}{\sqrt{m\Delta_n^{(i)}}}, & x \in \Delta_{n+1}^{(2i)}, \\ 0, & x \in \overline{\Delta_n^{(i)}}, \end{cases} \quad (10)$$

$i = 1, 2, \dots, 2^{n+1}$. Продолжив этот процесс до бесконечности, получим систему функций $\gamma_0^{(0)}(x; \lambda), \gamma_0^{(1)}(x; \lambda), \gamma_n^{(k)}(x; \lambda),$
 $n = 1, 2, \dots; \quad 1 \leq k \leq 2^n.$

Положим далее, $\gamma_n^{(k)}(0, \lambda) = \gamma_n^{(k)}(+0; \lambda), \gamma_n^{(k)}(1, \lambda) = \gamma_n^{(k)}(1-0; \lambda)$. Если $x = x_0$ — внутренняя точка разрыва, то положим

$$\gamma_n^{(k)}(x_0; \lambda) = \frac{1}{2} [\gamma_n^{(k)}(x_0-0; \lambda) + \gamma_n^{(k)}(x_0+0; \lambda)].$$

Покажем, что полученные функции взаимно ортогональны на отрезке $[0, 1]$.

В самом деле, функции $\gamma_n^{(i)}(x; \lambda)$ и $\gamma_n^{(j)}(x; \lambda)$ при $i \neq j$ ортогональны, потому что множества, на которых они соответственно отличны от нуля ($\Delta_{n-1}^{(i)}$ и $\Delta_{n-1}^{(j)}$), не пересекаются. По тем же соображениям ортогональны функции $\gamma_n^{(i)}(x; \lambda)$ и $\gamma_m^{(j)}(x; \lambda)$ при $n \neq m$ и $\Delta_{n-1}^{(i)} \cdot \Delta_{m-1}^{(j)} = 0$.

Рассмотрим последний возможный случай: $n \neq m$ (для определенности $m < n$), $\Delta_{n-1}^{(i)} \cdot \Delta_{m-1}^{(j)} = 0$; тогда из способа определения функций $\gamma_n^{(k)}(x; \lambda)$ легко следует, что интервал $\Delta_{n-1}^{(i)}$ принадлежит одному из интервалов $\Delta_m^{(2l-1)}, \Delta_m^{(2l)}$, на каждом из которых функция $\gamma_m^{(j)}(x; \lambda)$ постоянна.

Но из (6)–(10) следует

$$\int_{\Delta_{n-1}^{(i)}} \gamma_n^{(i)}(x; \lambda) dx = 0, \tag{11}$$

откуда вытекает утверждение и в этом случае. [■]

Проверим нормированность функций $\gamma_n^{(k)}(x; \lambda)$. Для функции $\gamma_0^{(0)}(x; \lambda)$ утверждение очевидно. Далее из (4) и (5) следует

$$\int_0^1 [\gamma_0^{(0)}(x; \lambda)]^2 dx = \frac{1}{\lambda} m \Delta_0^{(1)} + \lambda m \Delta_0^{(2)} = \frac{1}{\lambda} \cdot \lambda \cdot m \Delta_0^{(2)} + \lambda m \Delta_0^{(2)} = 1.$$

При $n > 1$ из (6)–(10) получаем

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\gamma_n^{(1)}(x; \lambda)]^2 dx &= \int_{\Delta_{n-1}^{(1)}} [\gamma_n^{(1)}(x; \lambda)]^2 dx = \frac{1}{\lambda \cdot m \Delta_{n-1}^{(1)}} \cdot m \Delta_n^{(2l-1)} + \frac{\lambda}{m \Delta_{n-1}^{(1)}} \cdot m \Delta_n^{(2l)} = \\ &= \frac{\lambda \cdot m \Delta_n^{(2l)}}{\lambda \cdot m \Delta_{n-1}^{(1)}} + \frac{\lambda \cdot m \Delta_n^{(2l)}}{m \Delta_{n-1}^{(1)}} = 1. \end{aligned}$$

Ортонормированность функций $\gamma_n^{(k)}(x; \lambda)$ установлена.

Очевидно при $\lambda = 1$ [система $\{\gamma_n^{(k)}(x; 1)\}$ совпадает с системой Хаара.

Легко видеть, что совокупность концов интервалов $\{\Delta_n^{(k)}\}$ является множеством всюду плотным на $[0, 1]$. Но тогда [2] система $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda)\}$ полна на $[0, 1]$ и является системой сходимости.

Замечание А. В работе [3] показано, что система Хаара после выбрасывания любого конечного числа элементов остается системой представления. Те же методы позволяют сделать аналогичное утверждение для системы $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda)\}$. Такими же рассуждениями, что и в работе [1], можно убедиться в том, что ряд по системе $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda)\}$ не может расходиться к ∞ на множестве положительной меры. При этом используются свойства (9) и (10).

Пусть $\delta_1, \delta_2, \dots$ — занумерованные слева направо интервалы, причем

$$\delta_i \cdot \delta_j = 0 \quad (i \neq j); \quad \sum_{l=1}^{\infty} \bar{\delta}_l \equiv [0, 1]. \quad (12)$$

Обозначим $\delta_k \equiv (a_k, b_k)$, $k = 1, 2, \dots$.

Разумеется $b_k = a_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots$.

Для фиксированной последовательности чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ определим функции

$$\tilde{\chi}_n^{(k)}(t; \lambda_i) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{b_i - a_i}} \cdot \chi_n^{(k)}\left(\frac{t - a_i}{b_i - a_i}; \lambda_i\right), & t \in \delta_i \\ 0, & t \notin \delta_i, \end{cases} \quad (13)$$

$i = 1, 2, \dots$; при $n = 0$ $k = 0, 1$; при $n = 1, 2, \dots$ $1 \leq k \leq 2$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ будут определены в дальнейшем.

Из (13) и замечания А легко следует, что при каждом фиксированном i система $\{\tilde{\chi}_n^{(k)}(t; \lambda_i)\}$ полна и ортонормирована на интервале δ_i , является системой представления, ибо этими свойствами обладает система $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda_i)\}$ на $(0, 1)$.

Перейдем к определению чисел λ_i и искомой системы $\{\varphi_n(x)\}$.

Под $\Delta_{n,l}^{(k)}$ в дальнейшем будем понимать образы интервалов $\Delta_n^{(k)}$ системы $\{\chi_n^{(k)}(x; \lambda_i)\}$ при преобразовании $t = a_l + x(b_l - a_l)$.

Пусть $\lambda_1 = 1$. Определим возрастающую последовательность целых чисел $N_1^{(1)} < N_2^{(1)} < N_3^{(1)} < \dots$ так, чтобы выполнялось соотношение

$$(l+1) \cdot m \Delta_{n,1}^{(k)} < \frac{1}{2} m \delta_{l+1}, \quad (14)$$

как только $2^n + k > N_l^{(1)}$, $l = 1, 2, \dots$.

Теперь возьмем число $\lambda_2 > \lambda_1$ настолько большим, чтобы выполнялось соотношение

$$\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + 1}\right)^{N_2^{(1)} - N_1^{(1)}} > \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Это можно сделать, поскольку

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{N_2^{(1)} - N_1^{(1)}} \rightarrow 1 \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Определим возрастающую последовательность целых чисел $N_1^{(2)} < N_2^{(2)} < N_3^{(2)} < \dots$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$N_1^{(2)} > 2^{N_2^{(1)} - N_1^{(1)}}, \quad (16)$$

$$(l+2) \cdot m \Delta_{n,2}^{(k)} < \frac{1}{2} m \delta_{l+2}, \quad (17)$$

как только $2^n + k > N_l^{(2)}$, $1 \leq k \leq 2^n$, $l = 1, 2, \dots$.

Возьмем число $\lambda_3 > \lambda_2$ настолько большим, чтобы

$$\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_3+1}\right)^{(N_3^{(1)} - N_2^{(1)}) + (N_2^{(2)} - N_1^{(2)})} > \frac{1}{2}. \quad (18)$$

Продолжив этот процесс до бесконечности, получим последовательности целых чисел $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $N_1^{(l)} < N_2^{(l)} < \dots$ (при каждом фиксированном $i = 1, 2, \dots$), которые удовлетворяют условиям

$$N_1^{(l)} > 2^{\sum_{k=1}^2 (N_k^{(l+1-k)} - N_{k-1}^{(l+1-k)})}, \quad (19)$$

$$(l+1) \cdot m \Delta_{n,l}^{(k)} < \frac{1}{2} m \delta_{l+1}, \quad (20)$$

при $2^n + k \geq N_l^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots$, $i = 1, 2, \dots$,

$$\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n+1}\right)^{\sum_{k=n}^2 (N_k^{(n+1-k)} - N_{k-1}^{(n+1-k)})} > \frac{1}{2}, \quad n=2, 3, \dots \quad (21)$$

Прежде чем перейти к определению искомой системы функций сделаем одно очевидное замечание, которое в дальнейшем нам пригодится.

При фиксированных $i \geq 1$ и $n > 0$ рассмотрим функцию $\bar{\chi}_n^{(1)}(t; \lambda_i)$. Из (9), (10) и (13) следует, что она равна положительной постоянной на интервале $\Delta_{n,i}^{(1)}$ и отрицательной постоянной на интервале $\Delta_{n,i}^{(2)}$, причем

$$m \Delta_{n,i}^{(1)} = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}}\right)^{n+1} \cdot m \delta_i. \quad (22)$$

Для удобства, там, где нужно, будем пользоваться обычной нумерацией системы Хаара, т. е.

$$\bar{\chi}_0(t; \lambda_i) \equiv \bar{\chi}_0^{(0)}(t; \lambda_i), \quad \bar{\chi}_1(t; \lambda_i) \equiv \bar{\chi}_0^{(1)}(t; \lambda_i),$$

$\bar{\gamma}_m(t; \lambda_1) \equiv \bar{\gamma}_n^{(k)}(t; \lambda_1)$ при $n > 0$,
где $m = 2^n + k$.

Систему $\{\varphi_n(t)\}$ определим следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \bar{\gamma}_0(t; \lambda_1), \quad \varphi_1(t) = \bar{\gamma}_1(t; \lambda_1), \\ \varphi_2(t) &= \bar{\gamma}_2(t; \lambda_1), \dots, \quad \varphi_{N_1^{(1)}-1}(t) = \bar{\gamma}_{N_1^{(1)}-1}(t; \lambda_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Функции $\varphi_{N_1^{(1)}}(t)$ и $\varphi_{N_1^{(1)}+1}(t)$ определим как координаты вектора, получающегося при умножении ортонормированной матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}, & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \text{ на вектор } \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_{N_1^{(1)}}(t; \lambda_1), & \bar{\gamma}_0^{(1)}(t; \lambda_2) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\varphi_{N_1^{(1)}}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\gamma}_{N_1^{(1)}}(t; \lambda_1) + \bar{\gamma}_0^{(1)}(t; \lambda_2)], \quad (24)$$

$$\varphi_{N_1^{(1)}+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\bar{\gamma}_{N_1^{(1)}}(t; \lambda_1) + \bar{\gamma}_0^{(1)}(t; \lambda_2)], \quad (25)$$

и вообще функции $\varphi_{N_1^{(1)}+2i}(t)$, $\varphi_{N_1^{(1)}+2i+1}(t)$ аналогично определяются через функции

$$\bar{\gamma}_{N_1^{(1)}+i}(t; \lambda_1), \quad \bar{\gamma}_i^{(1)}(t; \lambda_2), \quad \text{т. е.}$$

$$\varphi_{N_1^{(1)}+2i}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\bar{\gamma}_{N_1^{(1)}+i}(t; \lambda_1) + \bar{\gamma}_i^{(1)}(t; \lambda_2)], \quad (26)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_2^{(1)} - N_1^{(1)} - 1,$$

$$\varphi_{N_1^{(1)}+2i+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\bar{\gamma}_{N_1^{(1)}+i}(t; \lambda_1) + \bar{\gamma}_i^{(1)}(t; \lambda_2)], \quad (27)$$

$$i = 0, 1, 2, \dots, N_2^{(1)} - N_1^{(1)} - 1.$$

Таким образом, мы определили функции $\varphi_n(t)$, где

$$N_1^{(1)} \leq n \leq 2N_2^{(1)} - N_1^{(1)} - 1.$$

Из последовательности функций $\bar{\gamma}_0(t; \lambda_2)$, $\bar{\gamma}_1(t; \lambda_2)$, $\bar{\gamma}_2(t; \lambda_2)$, $\dots$, $\bar{\gamma}_{N_2^{(1)}-1}(t; \lambda_2)$ выбросим те, которые уже были использованы для определения функций $\varphi_n(t)$, а оставшуюся последовательность поместим за функцией $\varphi_{2N_2^{(1)}-N_1^{(1)}-1}(t)$. Тем самым будут определены функции $\varphi_n(x)$ при

$$2N_2^{(1)} - N_1^{(1)} \leq n \leq N_2^{(1)} + N_1^{(2)} - 1$$

(ибо число выброшенных функций равно $N_2^{(1)} - N_1^{(1)}$).

Допустим, что мы уже определили функции $\varphi_n(t)$ для $0 \leq n \leq \alpha - 1$, где

$$\alpha = \sum_{\tau=1}^m N_2^{(m+1-\tau)}. \tag{28}$$

Определим функции $\varphi_n(t)$ для $\alpha \leq n \leq \beta - 1$, где

$$\beta = \sum_{\tau=1}^{m+1} N_2^{(m+2-\tau)}. \tag{29}$$

Предварительно введем обозначения

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha(p) = \sum_{k=1}^p [N_{m+2-k}^{(k)} - N_{m+1-k}^{(k)}], \tag{30}$$

$$p = 1, 2, \dots, m,$$

$$i(p) = \alpha(p+1) - \alpha(p), \quad p = 0, 1, \dots, m-1. \tag{31}$$

Положим

$$\varphi_{\alpha+2\alpha(p)+2i}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [\bar{\gamma}_{N_{m-p}^{(p+1)+i}}(t; \lambda_{p+1}) + \bar{\gamma}_{\alpha(p)+i}^{(1)}(t; \lambda_{m+1})], \tag{32}$$

$$\varphi_{\alpha+2\alpha(p)+2i+1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\bar{\gamma}_{N_{m-p}^{(p+1)+i}}(t; \lambda_{p+1}) + \bar{\gamma}_{\alpha(p)+i}^{(1)}(t; \lambda_{m+1})], \tag{32'}$$

$$p = 0, 1, \dots, m-1, \quad i = 0, 1, \dots, i(p) - 1.$$

Таким образом, мы определили еще $2 \cdot \alpha(m)$ функций и при этом использовали $\alpha(m)$ функций вида $\bar{\gamma}_n^{(1)}(t; \lambda_{m+1})$. Выбросим эти $\alpha(m)$ функций из последовательности $\bar{\gamma}_0(t; \lambda_{m+1}), \bar{\gamma}_1(t; \lambda_{m+1}), \dots, \bar{\gamma}_{N_1^{(m+1)}-1}(t; \lambda_{m+1})$, а оставшуюся последовательность в том же порядке поместим за последней из уже определенных функций $\varphi_n(x)$, т. е. за функцией $\varphi_{\alpha+2\alpha(m)-1}(t)$. Тем самым уже определены функции $\varphi_n(t)$ для $0 \leq n \leq \alpha + 2\alpha(m-1) - 1 + N_1^{(m+1)} - \alpha(m)$, т. е.

$$0 \leq n \leq \alpha + \alpha(m) + N_1^{(m+1)} - 1. \tag{33}$$

Но из (28)–(31) следует

$$\begin{aligned} \alpha + \alpha(m) &= \sum_{\tau=1}^m N_2^{(m+1-\tau)} + \sum_{p=0}^{m-1} i(p) = \\ &= \sum_{p=0}^{m-1} [N_{m-p}^{(p+1)} + i(p)] = \sum_{\tau=1}^{m+1} N_2^{(m+2-\tau)}, \end{aligned} \tag{34}$$

ибо $N_{m-p}^{(p+1)} + i(p) = N_{m-p+1}^{(p+1)}$. А из (29), (33) и (34) вытекает $\alpha + \alpha(m) + N_1^{(m+1)} - 1 = \beta - 1$. Продолжив этот процесс до бесконечности, по-

лучим последовательность функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots$, которая и будет искомой системой функций.

Перейдем к доказательству последнего утверждения. Убедимся прежде всего в ортонормированности и полноте системы $\{\varphi_n(x)\}$. Пусть $\varphi_\tau(x)$ и $\varphi_\sigma(x)$ ($\tau \neq \sigma$) две произвольные функции этой системы. Возможны следующие случаи:

$$\text{а) } \varphi_\tau(t) = \tilde{\chi}_n(t; \lambda_i); \quad \varphi_\sigma(t) = \tilde{\chi}_n(t; \lambda_j).$$

Ортогональность и нормированность функций $\varphi_\sigma(t)$ и $\varphi_\tau(t)$ следует из тех же свойств функций $\tilde{\chi}_n(t; \lambda_i)$ и $\tilde{\chi}_m(t; \lambda_j)$;

$$\text{б) } \varphi_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\tilde{\chi}_n(t; \lambda_i) + \tilde{\chi}_m(t; \lambda_j)], \quad (35)$$

$$\varphi_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [-\tilde{\chi}_{n'}(t; \lambda_{i'}) + \tilde{\chi}_{m'}(t; \lambda_{j'})]; \quad (36)$$

если векторы $(n, i; m, j)$ и $(n', i'; m', j')$ не равны (в этом случае все функции, стоящие справа от знака равенства в (35) и (36), различны), то ортонормированность функций $\varphi_\sigma(t)$ и $\varphi_\tau(t)$ очевидна; если же эти векторы равны, то нужно учесть еще ортонормированность матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \varphi_\sigma(t) = \tilde{\chi}_n(t; \lambda_i),$$

$$\varphi_\tau(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pm \tilde{\chi}_{n'}(t; \lambda_{i'}) + \tilde{\chi}_{m'}(t; \lambda_{j'})].$$

В этом случае все три функции справа от знака равенства различны и утверждение очевидно.

Ортонормированность системы $\{\varphi_n(x)\}$ установлена.

Полнота этой системы следует из следующих соображений:

1) при любом фиксированном i система $\{\tilde{\chi}_n(t; \lambda_i)\}$ полна на интервале δ_i ; $\delta_i \cdot \delta_j = 0$, если $i \neq j$ и $\sum_{i=1}^n \delta_i \equiv [0, 1]$; $\tilde{\chi}_n(t; \lambda_i) \equiv 0$ при $t \notin \delta_i$, $n = 0, 1, \dots$;

2) каждая из функций $\tilde{\chi}_n(t; \lambda_i)$ или равна какой-либо функции $\varphi_k(t)$ или же есть сумма двух функций $\varphi_l(t)$ и $\varphi_{l+1}(t)$ (последнее следует из того, что определитель используемой матрицы отличен от нуля).

Если для функции $f(t) \in L_2(0, 1)$, $\int_0^1 f(t) \varphi_n(t) dt = 0$, $n = 0, 1, \dots$,

то из (2) следует, что

$$\int_0^1 f(t) \bar{\gamma}_n(t; \lambda_i) dt = 0, \quad i=1, 2, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (37)$$

Из 1) и (37) получаем, что $f(t) = 0$ почти всюду на δ_i ($i=1, 2, \dots$), т. е. $f(t) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$.

Докажем, что система $\{\varphi_n(t)\}$ обладает свойством в) теоремы 1.

Если $\varphi_n(t) = \bar{\gamma}_n(t; \lambda_i)$, то из (6)–(10) следует

$$\frac{mE_n^+}{mE_n^-} = \lambda_i. \quad (38)$$

$$\text{Пусть } \varphi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\pm \bar{\chi}_i^{(k)}(t; \lambda_i) + \bar{\chi}_\sigma^{(1)}(t; \lambda_j)]$$

(для определенности возьмем знак +), где $i < j$; n , τ и k зависят от i и j . Точнее из (28)–(32) следует

$$\sum_{l=1}^{j-1} N_{-l}^{(j)} \leq n < \sum_{l=1}^j N_{+l-1}^{(j)}, \quad (39)$$

$$2^{\tau(i)} + k(i) \geq N_{-l}^{(j)}, \quad (40)$$

$$0 \leq \sigma \leq \sum_{l=0}^{j-2} [N_{-l}^{(j+1)} - N_{-l-1}^{(j)}]. \quad (41)$$

Далее из (4)–(10), (12), (13) имеем

$$\begin{aligned} \frac{mE_n^+}{mE_n^-} &= \frac{m\Delta_{\sigma, j}^{(1)} + m\Delta_{\tau, l}^{(2k-1)}}{m\Delta_{\sigma, j}^{(2)} + m\Delta_{\tau, l}^{(2k)}} > \frac{m\Delta_{\sigma, j}^{(1)}}{m\Delta_{\sigma, j}^{(2)} + m\Delta_{\tau, l}^{(2k)}} > \\ &> \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{m\Delta_{\sigma, j}^{(1)}}{m\Delta_{\sigma, j}^{(2)}}, \frac{m\Delta_{\sigma, j}^{(1)}}{m\Delta_{\tau, l}^{(2k)}} \right\} = \frac{1}{2} \min \left\{ \lambda_j; \frac{m\Delta_{\sigma, j}^{(1)}}{m\Delta_{\tau, l}^{(2k)}} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (21), (22) и (41) получаем

$$m\Delta_{\sigma, j}^{(1)} > \frac{1}{2} m\delta_j. \quad (43)$$

Из (20) и (40) следует

$$j \cdot m\Delta_{\tau, l}^{(2k)} < \frac{1}{2} m\delta_j. \quad (44)$$

Из (43) и (44) следует

$$\frac{m\Delta_{\sigma, j}^{(1)}}{m\Delta_{\tau, l}^{(2k)}} > j. \quad (45)$$

Из (42) и (45) выводим неравенство

$$\frac{mE_n^+}{mE_n^-} > \frac{1}{2} \min \{ \lambda_j; j \} = \frac{1}{2} j, \quad (46)$$

ибо $\lambda_j > j$.

Наконец из (38) и (46) следует

$$\frac{mE_n^+}{mE_n^-} \rightarrow \infty,$$

ибо вместе с увеличением n увеличивается и j , что видно из соотношения (39).

Докажем свойство б) теоремы.

Пусть ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t) \quad (47)$$

расходится к $+\infty$ на множестве E положительной меры. Тогда из (12) следует, что существует такой номер i_0 , что $m(\delta_{i_0} \cdot E) > 0$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=\gamma}^{\infty} a_n \varphi_n(t), \quad (48)$$

где

$$\gamma = N_{i_0}^{(1)} + N_{i_0-1}^{(2)} + \dots + N_1^{(i_0)}. \quad (49)$$

Очевидно ряд (48) расходится к $+\infty$ на том же множестве E .

Из определения функций $\varphi_n(t)$ видно, что часть из них равна нулю на интервале δ_{i_0} . Из последовательности $\varphi_\gamma(t), \varphi_{\gamma+1}(t), \dots$ выбросим те функции, которые равны нулю на δ_{i_0} и оставшуюся последовательность обозначим через

$$\varphi_{n_1}(t), \varphi_{n_2}(t), \dots \quad (50)$$

Из (28)–(32) и (49) следует, что последовательность (50) на интервале δ_{i_0} совпадает со следующей:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\chi}_{\alpha(i_0)}(t; \lambda_{i_0}); \dots; \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\chi}_{\alpha(i_0)}(t; \lambda_{i_0}); \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\chi}_{\alpha(i_0)+1}(t; \lambda_{i_0}); \dots; \frac{1}{\sqrt{2}} \tilde{\chi}_{\alpha(i_0)+1}(t; \lambda_{i_0}). \quad (51)$$

Пусть $S_k(t)$ — частные суммы ряда

$$\sum_{l=1}^k a_{n_l} \varphi_{n_l}(t). \quad (52)$$

Тогда, поскольку $S_k(t) \rightarrow +\infty$ на множестве $\delta_{i_0} \cdot E$, то

$$S_{2k}(t) \rightarrow +\infty, \quad t \in E \cdot \delta_{i_0}. \quad (53)$$

Но из (51) следует, что $S_{2k}(t)$ является последовательностью частных сумм ряда по системе $\{\tilde{\chi}_{\alpha}(t; \lambda_{i_0})\}$ и, согласно [1], не может расходиться к $+\infty$ на множестве положительной меры. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Перейдем к доказательству утверждения а) теоремы 1.

Пусть последовательность

$$\varphi_{n_1}(t), \varphi_{n_2}(t), \dots, \varphi_{n_k}(t), \dots \quad (54)$$

означает функции последовательности

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t), \dots,$$

полученные посредством первой строки матрицы.

Пусть для фиксированного i ($i = 1, 2, \dots$) последовательность

$$\varphi_{n_1^{(i)}}(t), \varphi_{n_2^{(i)}}(t), \dots, \varphi_{n_k^{(i)}}(t), \dots \quad (55)$$

состоит из тех функций последовательности (54), которые отличны от нуля в интервале δ_i (т. е. не обязательно на всем интервале δ_i).

Сделаем два замечания.

В. В силу определения системы $\{\varphi_n(t)\}$ и последовательности (55) получаем, что при любых i и j ($i \neq j$) пересечение множеств $E_i \equiv \{n_k^{(i)}\}$ и $E_j \equiv \{n_k^{(j)}\}$ непусто и имеет конечную мощность.

С. Из замечания В следует, что для любого $i \geq 2$ существует такое целое число $k(i)$, что подмножество $\widetilde{E}_i \equiv \{n_k^{(i)}; k \geq k(i)\}$ не пересекается ни с одним из множеств $E_1, E_2, \dots, E_{i-1}$.

В силу определения системы $\{\varphi_n(t)\}$ и (54) последовательность (55), начиная с $k(i)$ -ого члена, на интервале δ_i совпадает с последовательностью

$$\widetilde{\gamma}_{m_i}(t; \lambda_i), \widetilde{\gamma}_{m_i+1}(t; \lambda_i), \dots, \quad (56)$$

где m_i зависит от $k(i)$, $i = 1, 2, \dots$ ($k(1) = n_1$).

В силу замечаний А и В существует ряд

$$\sum_{k=k(1)}^{\infty} a_{n_k^{(1)}} \varphi_{n_k^{(1)}}(t), \quad (57)$$

сходящийся к $f(t)$ на $E_1 \subset \delta_1$ и $mE = m\delta_1$. (58)

Ряд (57) вне δ_1 также сходится (это следует из замечания В), но его сумма $f_1(t)$ не обязана быть равной нулю вне δ_1 . Таким образом

$$f_1(t) = f(t), \quad t \in E_1. \quad (59)$$

Из (55) и замечаний А, В, С следует существование такого ряда, что

$$\sum_{k=k(2)}^{\infty} a_{n_k^{(2)}} \varphi_{n_k^{(2)}}(t) = f_2(t) \quad \text{п. в. на } (0, 1), \quad (60)$$

причем

$$f_2(t) = f(t) - f_1(t), \quad t \in E_2 \subset \delta_2, \quad mE_2 = m\delta_2, \quad (61)$$

$$f_2(t) = 0, \quad t \in \delta_1. \quad (62)$$

Продолжив этот процесс до бесконечности, мы определим коэффициенты $\{a_{n_k^{(i)}}\}$, $i = 1, 2, \dots$, $k = k(i), k(i+1)$, причем $k(1) = n_1$ и функции $f_1(t), f_2(t), \dots$ такие, что

$$\sum_{k=k(i)}^{\infty} a_{n_k^{(i)}} \varphi_{n_k^{(i)}}(t) = f_i(t) \quad \text{п. в. на } (0, 1), \quad i=1, 2, 3, \dots, \quad (63)$$

$$f_i(t) = f(t) - \sum_{\mu=1}^{i-1} f_{\mu}(t), \quad t \in E_i \subset \delta_i, \quad mE_i = m\delta_i, \quad (64)$$

$$f_i(t) = 0 \quad \text{на } \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_{i-1}, \quad i=2, 3, \dots. \quad (65)$$

Учтем, что ряды (63) сходятся всюду вне δ_i (при фиксированном $i=1, 2, 3, \dots$).

Пусть

$$E = \sum_{i=1}^{\infty} E_i. \quad (66)$$

Из (58), (61), (64) и (12) следует

$$mE = \sum_{i=1}^{\infty} mE_i = \sum_{i=1}^{\infty} m\delta_i = 1.$$

Докажем, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=k(i)}^{\infty} a_{n_k^{(i)}} \varphi_{n_k^{(i)}}(t) \right) = f(t), \quad t \in E. \quad (67)$$

Пусть $t = t_0 \in E$, тогда t_0 принадлежит некоторому множеству E_{i_0} (и только ему, ибо множества E_i $i=1, 2, \dots$ попарно не пересекаются).

Если $i_0=1$, то из (57), (59) и (65) следует, что в точке t_0 первая скобка ряда (67) равна $f(t_0)$, а все остальные скобки равны нулю и, следовательно, формула (67) для этого случая верна. Если же $i_0 > 1$, то из (57)—(65) следует, что в точке t_0 первые i_0 скобок ряда (67) равны соответственно

$$f_1(t_0), f_2(t_0), \dots, f_{i_0-1}(t_0), f(t_0) - \sum_{k=1}^{i_0-1} f_k(t_0),$$

а все остальные скобки в этой точке равны нулю, откуда следует справедливость формулы (67).

Покажем, что из установленных фактов следует утверждение а) теоремы.

В силу замечания С множества $E_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3, \dots$ попарно не пересекаются. Элементы множества $E_1 + \sum_{i=2}^{\infty} \bar{E}_i$, упорядоченные естественным образом, обозначим через

$$n_1, n_2, \dots, n_k, \dots. \quad (68)$$

Справедлива формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \varphi_{n_k}(t) = f(t), \quad t \in E. \quad (69)$$

В самом деле, пусть $t_0 \in E_{i_0}$ — произвольная фиксированная точка из множества E . В силу определения последовательностей (54), (55) и замечания C заключаем, что все члены ряда (69), которые отличны от нуля в точке t_0 , находятся среди функций

$$a_n, \varphi_n(t), a_n, \varphi_n(t), \dots, a_{n_{\omega}^{(i_0)}} \varphi_{n_{\omega}^{(i_0)}}(t), a_{n_{\omega+1}^{(i_0)}} \varphi_{n_{\omega+1}^{(i_0)}}(t), \dots, \quad (70)$$

где $\omega = k(i_0)$.

Мы видим, что последовательность функций (70), за исключением конечного числа N первых функций, входит в i_0 -ую скобку ряда (67), а значит ряды (67) и (69), если из них выбросить все члены, равные нулю в точке t_0 , фактически (с точностью до порядка первых N функций) совпадают. Таким образом, из формулы (67) следует формула (69). Если положить

$$a_n = \begin{cases} a_{n_k}, & \text{при } n = n_k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0, & \text{при } n \neq n_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi_n(t)$ сходится всюду на E к функции $f(t)$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Талалаю за постановку задачи.

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступило 19.V.1967

Բ. Ի. ՕՍԻՊՈՎ

ՕՐԹՈԳՈՆԱԼ ՀԱՐՔԵՐԻ ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅԱՆԸ ՏԱՐԱՄԻՏԵԼՈՒ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը.

Թեորեմ 1. $[0, 1]$ հատվածի վրա գոյություն ունի ֆունկցիաների լրիվ օրթոնորմավորված սիստեմ $\{\varphi_n(x)\}$, օժտված հետևյալ հատկություններով՝

ա) $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմը հանդիսանում է ներկայացման սիստեմ, այսինքն ցանկացած $f(x)$ ֆունկցիայի համար, որը չափելի և համարյա ամենուրեք վերջավոր է $[0, 1]$ հատվածի վրա, գոյություն ունի այնպիսի շարք

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, որը զուգամիտում է $f(x)$ ֆունկցիային համարյա ամենուրեք $[0, 1]$ -ում.

բ) $\{\varphi_n(x)\}$ սիստեմով գրված շարքը չի կարող տարամիտել անվերջ ությանը դրական չափի բազմություն վրա.

գ) $\frac{mE_n^+}{mE_n^-} \rightarrow \infty$, որտեղ $E_n^+ \equiv E(\varphi_n(x) > 0)$; $E_n^- \equiv E(\varphi_n(x) < 0)$:

R. I. OSIPOV

ON DIVERGENCE OF ORTHOGONAL SERIES TO INFINITY

S u m m a r y

The following theorem is proved in the paper:

THEOREM: There exists a complete orthonormal system of functions on $[0, 1]$ with properties

a) To every measurable, a.e. on $[0, 1]$ finite function $f(x)$ does correspond a series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, which converges to $f(x)$ a.e. on $[0, 1]$.

b) No series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ does diverge to infinity on any set of positive measure.

c) $\frac{mE_n^+}{mE_n^-} \rightarrow \infty$, where $E_n^+ \equiv E(\varphi_n(x) > 0)$, $E_n^- \equiv E(\varphi_n(x) < 0)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ф. Г. Арутюнян и А. А. Талалян. О сходимости рядов по системе Хаара $k + \infty$ Математ. сборник, 66 (108) : 3, 1965, 240—247.
2. С. Качмаж и Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, 1958, стр. 143.
3. А. А. Талалян. О рядах, универсальных относительно перестановок, Известия АН Арм.ССР, серия физ.-мат. наук, 24, 1960, 580—592.