ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 5, 1967 Математика

А. Ф. ЛЕОНТЬЕВ

К ВОПРОСУ О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ ДИРИХЛЕ И ДРУГИМИ БОЛЕЕ ОБЩИМИ РЯДАМИ

В работах [1]—[3] рассматривались вопросы, связанные с представлением в конечных областях произвольных аналитических функций рядами Дирихле. Отметим некоторые из полученных результатов.

Пусть $L(\lambda)$—целая функция экспоненциального типа, $\gamma(t)$—функция ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\overline{D}$—наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее все особенности $\gamma(t)$, D—открытая часть $\overline{D}$. Допустим, что $0\in\overline{D}$. Возьмем произвольную функцию $F(z)$, аналитическую на множестве $\overline{D}$. Положим

$$\omega_L(\mu, F)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \gamma(\xi)\left[\int\limits_0^{\xi} F(\xi-\eta)\, e^{\mu\eta}\, d\eta\right]d\xi,$$

где C — замкнутый контур, охватывающий $\overline{D}$, на котором и внутри которого $F(z)$ — аналитическая функция. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$—различные нули $L(\lambda)$ и $p_1, p_2, \cdots$— соответственно их кратности. Функции $F(z)$ приведем в соответствие ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} P_\nu(z)\, e^{\lambda_\nu z}, \tag{1}$$

где

$$P_\nu(z)\, e^{\lambda_\nu z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_\nu}\frac{\omega_L(\mu, F)\, e^{\mu z}\, d\mu}{L(\mu)}.$$

Здесь C_ν — замкнутый контур, содержащий нуль λ_ν функции $L(\lambda)$ и не содержащий других нулей этой функции.

В работе [2] показано, что если все $P_\nu(z)\equiv 0$, то $F(z)\equiv 0$. Следовательно, коэффициенты $P_\nu(z)$ ряда (1) полностью определяют функцию $F(z)$. Возникает естественная задача: каким образом можно восстановить функцию $F(z)$, если известны $P_\nu(z)$? В статье [1] получен следующий результат: пусть D—непустое множество и пусть имеются окружности $|\lambda|=r_k\uparrow\infty$ такие, что при любом $\varepsilon>0$

$$\ln|L(r_k e^{i\varphi})|>[h(\varphi)-\varepsilon]\, r_k,\ \ k>K(\varepsilon)$$

($h(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\lambda)$). Тогда

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(\sum_{r_{k-1}<|\lambda|<r_k} P_\nu(z)\,e^{\lambda_\nu z}\Bigr),\quad z\in D. \tag{2}$$

Ряд (2) вообще не может сходиться в большей области. Пусть теперь D — пустое множество и, следовательно, $\overline{D}$ — отрезок. Такая ситуация имеет место, например, когда $L(\lambda)=\prod_1^{\infty}\Bigl(1-\frac{\lambda^2}{\lambda_n^2}\Bigr)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\lambda_n}=\sigma$, $\lambda_n>0$. В этом случае $\overline{D}$ — вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$ с серединой в начале координат и ряд (1) имеет вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\pm\nu}\,e^{\pm\lambda_\nu z},\quad a_{\pm\nu}=\frac{\omega_L(\pm\lambda_\nu, F)}{L'(\pm\lambda_\nu)}. \tag{3}$$

При $\lambda_n=n$ ряд (3), как нетрудно показать, становится обычным рядом Фурье для функции $F(z)$. Ряд (3), таким образом, является непосредственным обобщением ряда Фурье. Отметим, что этот ряд или соответствующий ему ряд (2) вообще не может сходиться ни в какой области. В статье [3] указан способ его суммирования. Пусть K — горизонтальная звезда голоморфности функции $F(z)$ (точка $z_0\in K$, если $F(z)$ можно аналитически продолжить в z_0 по горизонтали, исходя из отрезка $\overline{D}$). Положим

$$S_q(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_{k-1}<|\lambda_\nu|<r_k}\frac{a_{\pm\nu}\,e^{\pm\lambda_\nu z}}{\Gamma(1+\alpha\lambda_\nu)}\int_0^q e^{-\xi}\,\xi^{\alpha\lambda_\nu}\,d\xi,\quad \alpha>0,\ q>0.$$

Это — целая функция. Оказалось, что, каково бы ни было замкнутое ограниченное множество $\overline{G}\subset K$, при некотором α ($\alpha=\alpha(\overline{G})$) на множестве $\overline{G}$ равномерно

$$\lim_{q\to\infty} S_q(z)=F(z).$$

В данной работе рассматриваются аналогичные вопросы, но только они связаны с представлением произвольных аналитических функций не в конечных областях, а во всей плоскости. Речь идет, следовательно, о целых функциях. В соответствии с предыдущим мы необходимо должны считать, что $L(\lambda)$ — целая функция по меньшей мере первого порядка максимального типа. Мы будем предполагать, что она — целая функция порядка $\rho>1$. Наши рассуждения нисколько не усложнятся, если вместо рядов Дирихле мы будем рассматривать более общие ряды — ряды по системе $\{f(\lambda_n z)\}$. Поэтому с самого начала мы будем оперировать именно с этими более общими рядами. С целью представления произвольных целых функций они впервые были введены в статье [4]. Напомним как это делается.

Пусть $f(z)=\sum\limits_0^{\infty} a_n z^n$ — фиксированная целая функция конечного порядка $\rho>0$, причем $a_n\neq 0$ ($n=0,1,2,\cdots$) и существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \ln n}{\ln \left|\frac{1}{a_n}\right|} = \rho.$$

Пусть далее $L(\lambda) = \sum_0^\infty c_n \lambda^n$ — целая функция порядка $\rho_1 > \rho$; $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ — ее различные нули и $p_1, p_2, \cdots$ — соответственно их кратности. Возьмем произвольную целую функцию $F(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ порядка $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$.

Положим

$$\omega_L(\mu, F) = \sum_{n=1}^\infty c_n [D^{n-1} F(0) + \mu D^{n-2} F(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F(0)], \qquad (4)$$

где по определению

$$D^k F(z) = \sum_{n=k}^\infty b_n \frac{a_{n-k}}{a_n} z^{n-k} \ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

При условии $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ ряд (4) равномерно сходится в любой ограниченной области и, следовательно, представляет собой целую функцию. Обозначим

$$K_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\omega_L(\mu, F)\, f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

где C_n — замкнутый контур, внутри которого лежит нуль λ_n функции $L(\lambda)$ и нет других нулей этой функции. Если λ_n — простой нуль, то

$$K_n(z) = \frac{\omega_L(\lambda_n, F)}{f(0)\, L'(\lambda_n)} f(\lambda_n z),$$

в противном случае

$$K_n(z) = \sum_{m=0}^{p_n - 1} A_m^n z^m f^{(m)}(\lambda_n z),$$

где A_m^n — некоторые постоянные. Функции $F(z)$ приводится в соответствие ряд

$$\sum_{m=1}^\infty K_m(z). \qquad (5)$$

Это и есть тот общий ряд, о котором говорилось выше.

Мы в данной статье показываем (теорема единственности), что если $K_m(z) = 0$ $(m = 1, 2, \cdots)$, то $F(z) \equiv 0$. Доказательство только в малой части следует схеме доказательства теоремы единственности в случае конечной области. Из теоремы единственности следует, что по $K_m(z)$ $(m = 1, 2, \cdots)$ можно принципиально восстановить функцию $F(z)$. В работе [4] показано, что если имеются окружности $|\lambda| = r_n \uparrow \infty$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\ln |L(r_n e^{i\varphi})| > r_n^{\rho_1 - \varepsilon}, \ n > N(\varepsilon), \qquad (6)$$

то тогда

$$F(z) = \sum_{n=1}^\infty \Bigg(\sum_{r_{n-1} < |\lambda_m| < r_n} K_m(z) \Bigg), \qquad (7)$$

сходимость в любой ограниченной области—равномерная. Анализ доказательства этого результата показывает, что представление (7) остается в силе, если вместо условия (6) будет выполняться более слабое условие

$$\ln|L(r_n e^{i\varphi})| > r_n^p, \quad n > N, \quad \rho < p < \rho_1. \tag{8}$$

В данной статье рассматривается ситуация, когда и это условие не выполняется. Указывается метод суммирования ряда (5). Свои рассуждения подробно мы проводим в частном случае, когда

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^m}{\lambda_n^m}\right), \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho_1}} = \sigma, \lambda_n > 0, \frac{m}{2} < \rho_1 < m, \tag{9}$$

где m — целое положительное число. Этот случай соответствует указанному выше случаю, когда отмечалась аналогичная ситуация при рассмотрении конечных областей. Кроме того, проследив метод в этом простом случае, можно будет видеть, как его распространить на другие более сложные случаи. Отметим, что рассматриваемый метод суммирования отличен от метода суммирования, описанного выше при рассмотрении ряда (3).

Стоит заметить, что функция (9) удовлетворяет следующему условию: существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}} = \frac{\pi\sigma}{\sin\dfrac{\pi\rho_1}{m}} \cos\rho_1\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right), \; 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

Правая часть при $0 < \varphi < \varphi_0 = \dfrac{\pi}{m} - \dfrac{\pi}{2\rho_1}$ отрицательна. Следовательно функция $L(\lambda)$ в угле $0 < \varphi < \varphi_0$ стремится к нулю при $\lambda \to \infty$ и условие (8) заведомо не выполняется (при $\rho_1 < \dfrac{m}{2}$ будет выполняться условие (6)).

При рассмотрении и теоремы единственности и метода суммирования нам пришлось существенно опираться на асимптотическое поведение функции $\omega_L(\mu, F)$ при $\mu \to \infty$. Поэтому в § 1 устанавливается асимптотическое поведение этой функции.

§ 1. Об ином представлении функции $\omega_L(\mu, F)$

Прежде чем сформулировать соответствующий результат о представлении функции $\omega_L(\mu, F)$ отметим некоторые необходимые вспомогательные факты.

Будем говорить, что последовательность целых функций $\{F_m(z)\}$ имеет порядок α, если выполняется условие: при любом $\varepsilon > 0$

$$|F_n(z)| < \exp|z|^{\alpha+\varepsilon}, \quad |z| > r_0(\varepsilon), \tag{10}$$

где $r_0(\varepsilon)$ не зависит от n, причем нет числа с таким свойством меньшего α. Очевидно, что если $\{F_n(z)\}$ имеет порядок α, то каждая функция $F_m(z)$ имеет порядок $\leqslant \alpha$. Обратное неверно: если каждая функция $F_m(z)$ имеет порядок $\leqslant \alpha$, то из этого не следует, что порядок $\{F_m(z)\}$ будет $\leqslant \alpha$. Например, порядки функций

$$F_m(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \cdots + \frac{z^m}{m!} \ (m = 1, 2, \cdots)$$

равны нулю, а порядок последовательности $\{F^m(z)\}$ равен единице.

Лемма 1. *Пусть последовательность целых функций $\{F_m(z)\}$ имеет порядок $\alpha < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ и пусть $\{F_m(z)\}$ сходится к $F(z)$. Тогда*

$$\lim_{m \to \infty} \omega_L(\mu, F_m) = \omega_L(\mu, F).$$

Для доказательства обратимся к формуле (4). Согласно этой формуле

$$\omega_L(\mu, F_m) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n [D^{n-1} F_m(0) + \mu D^{n-2} F_m(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F_m(0)],$$

причем, если $F_m(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(m)} z^n$, то

$$D^k F_m(0) = b_k^{(m)} \frac{a_0}{a_k}.$$

Из условия

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n \ln n}{\ln \left| \frac{1}{a_n} \right|} = \rho$$

и неравенств (10) следует, что

$$|D^k F_m(0)| < A(\varepsilon)\, k^{k\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right)}, \tag{11}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое и $A(\varepsilon)$ не зависит от m. Такое же неравенство будет справедливо и для $D^k F(0)$. Имеем

$$\omega_L(\mu, F) - \omega_L(\mu, F_m) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} c_n [D^{n-1}(F - F_m)_0 + \mu D^{n-2}(F - F_m)_0 + \cdots + \mu^{n-1} D^0 (F - F_m)_0] +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n [D^{n-1}(F - F_m)_0 + \mu D^{n-2}(F - F_m)_0 + \cdots + \mu^{n-1} D^0 (F - F_m)_0] =$$

$$= J_m' + J_m''.$$

На основании (11) квадратная скобка по модулю при $|\mu| \leqslant R$, $R > 1$ не превосходит

$$2A(\varepsilon)\, n R^n n^{n\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right)}$$

(не нарушая общности рассуждений можно считать $\alpha > \rho$, в силу чего $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} > 0$) и поэтому, учитывая неравенство

$$|c_n| < n^{-n\left(\frac{1}{\rho_1}-\varepsilon\right)}$$

(оно верно при больших n), получим оценку

$$|\overset{*}{J}_m| < 2A(\varepsilon) \sum_{n=N+1}^{\infty} nR^n n^{-n\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\rho}-2\varepsilon\right)}, \quad |\mu| \leqslant R.$$

В силу условия $\alpha < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ круглая скобка в правой части при малом $\varepsilon > 0$ положительна. Выберем N так, чтобы было $|\overset{*}{J}_m| < \varepsilon_1$ (здесь m — любое). Фиксируя N, обратимся к $\overset{*}{J}_m$. Из (10) следует, что последовательность $\{F_m(z)\}$ в круге $|\mu| \leqslant R$ сходится равномерно, в силу чего при каждом k

$$\lim_{m\to\infty} D^k(F-F_m)_0 = 0.$$

Следовательно, можно выбрать такое K, что при $m > K$ будем иметь $|\overset{*}{J}_m| < \varepsilon_1$. В итоге при $m > K$ в круге $|\mu| \leqslant R$

$$|\omega_L(\mu, F) - \omega_L(\mu, F_m)| < 2\varepsilon_1,$$

что и доказывает лемму.

Лемма 2. *Пусть $L_1(\lambda)$ — целая функция порядка $\beta > \rho$, удовлетворяющая условиям:*

1) *имеются окружности $|\lambda| = r_k \uparrow \infty$ такие, что при любом $\varepsilon > 0$*

$$\ln|L_1(r_k e^{i\varphi})| > r_k^{\beta-\varepsilon}, \quad k > K(\varepsilon);$$

2) *все нули $\mu_1, \mu_2, \cdots$ функции $L_1(\lambda)$ — простые, число их в кольце $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$ не превосходит некоторого фиксированного числа p, одного и того же для всех $k = 1, 2, \cdots$;*

3) *существует постоянная q такая, что $\frac{r_k}{r_{k-1}} < q$ $(k = 1, 2, \ldots)$;*

4) *существуют постоянные A и h, $h < \beta$, такие, что для любых λ_m и λ_n, $m \neq n$, из кольца $r_{k-1} < |\lambda| < r_k$*

$$|\lambda_m - \lambda_n| > Ae^{-r_k^h}.$$

Пусть далее $F(z)$ — целая функция порядка $\nu < \frac{\rho\beta}{\beta-\rho}$. Положим

$$A_k = \frac{\omega_{L_1}(\mu_k, F)}{f(0)L_1'(\mu_k)} \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

Верны неравенства

$$\left|F(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k f(\mu_k z)\right| < A(\varepsilon)\, e^{-|\mu_m|^{\beta-\varepsilon}} \exp|z|^{\left(\frac{\rho\beta}{\beta-\rho}+\varepsilon\right)} \quad (m = 1, 2, \cdots), \tag{12}$$

где $\varepsilon > 0$ — любое и $A(\varepsilon)$ не зависит от m.

Эта лемма есть непосредственное следствие теоремы 1 (см. неравенство (1.3)) из работы [4], если учесть неравенство (4.4) из этой же работы.

Заметим, что из неравенств (12) следует, что порядок последовательности

$$F_m(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k f(\mu_k z) \quad (m = 1, 2, \cdots) \tag{13}$$

не превосходит величины $\frac{\rho\beta}{\beta-\rho}$.

Приведем пример функции $L_1(\lambda)$, удовлетворяющей всем условиям леммы 2. Положим

$$L_1(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^m}{v_n^m}\right), \quad v_n = n^{\frac{1}{\beta}},$$

где m — целое число $> \beta$. Показывается, что существует предел (см. [5], стр. 88)

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|L_1(re^{i\varphi})|}{r^\beta} = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\beta}{m}} \cos\beta\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right), \quad 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

Таким образом, $L_1(\lambda)$ — целая функция порядка β конечного типа, причем ее индикатриса роста $h(\varphi)$ равна

$$h(\varphi) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi\beta}{m}} \cos\beta\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right), \quad 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}.$$

В силу непрерывности $h(\varphi)$ имеем: $h(0) = \pi \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{m}$. Из вида функции $L_1(\lambda)$ следует, что

$$|L_1(\lambda)| \geqslant |L(|\lambda|)|. \tag{14}$$

Нулями функции $L_1(\lambda)$ являются точки $\varepsilon^s v_n$, $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$ $(s = 0, 1, \cdots, m-1;$ $n = 1, 2, \cdots)$, они расположены на m лучах. Так как существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{v_n^\beta} = 1$$

и при больших n

$$v_{n+1} - v_n > \alpha v_n^{1-\beta}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

то вне кружков $|\lambda - v_n| < \alpha v_n^{1-\beta}$ и аналогичных кружков с центрами в точках $\varepsilon^s v_n$ выполняется (см. [5], стр. 126) асимптотическое равенство

$$\ln|L_1(re^{i\varphi})| \sim r^\beta h(\varphi). \tag{15}$$

При $\alpha < \frac{1}{2}$ на положительной части действительной оси между v_k и

v_{k+1} найдется точка r_k, в которой будет иметь место соотношение (15). Отсюда, согласно (14), получаем

$$\ln |L_1(r_k e^{i\varphi})| > \ln |L_1(r_k)| > [h(0) - \varepsilon]\ r_k^\beta = \left[\pi \operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{m} - \varepsilon\right] r_k^\beta .$$

Подчиним m условию: $m > 2\beta$. Тогда $\operatorname{ctg} \frac{\pi\beta}{m} > 0$ и

$$\ln |L_1(r_k e^{i\varphi})| > \delta r_k^\beta, \quad \delta > 0.$$

Числа r_k и нули $L_1(\lambda)$ удовлетворяют, что уже очевидно, всем другим условиям леммы 2. Таким образом функция $L_1(\lambda)$— искомая.

Заметим, что наряду с $L_1(\lambda)$ условиям леммы 2 удовлетворяет и функция $L_1(\lambda e^{i\psi})$, где ψ — любое. В дальнейшем в качестве такой функции мы возьмем функцию

$$L_1(\lambda e^{i\frac{\pi}{m}}) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{\lambda^m}{v_n^m}\right), \quad v_n = n^{\frac{1}{\beta}}.$$

Ее индикатриса $h(\varphi)$ равна $h(\varphi) = \dfrac{\pi}{\sin \frac{\pi\beta}{m}} \cos \beta\varphi, \ |\varphi| < \dfrac{\pi}{m}$.

Теперь мы в состоянии и сформулировать и доказать теорему об асимптотическом поведении функции $\omega_L(\mu, F)$ при $\mu \to \infty$.

Теорема 1. *Пусть $F(z)$ —целая функция порядка $v < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. Выберем число $\beta > \rho_1$ следующим образом: $v < \frac{\rho\beta}{\beta - \rho} < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. Пусть $L_1(\lambda)$ — целая функция порядка β, удовлетворяющая условиям леммы 2. Допустим дополнительно, что нули μ_n $(n = 1, 2, \cdots)$ этой функции расположены на лучах $l_1, l_2, \cdots, l_s$, исходящих из начала. Тогда мы имеем*

$$\omega_L(\mu, F) = -A(\mu) + B(\mu)\, L(\mu),$$

где

$$A(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k L(\mu_k)}{\mu - \mu_k}, \quad B(\mu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{\mu - \mu_k}, \quad B_k = \frac{\omega_{L_1}(\mu_k, F)}{L_1'(\mu_k)} \tag{15'}$$

— мероморфные функции с простыми полюсами в точках μ_k, которые в любом угле D с вершиной в начале, не содержащем лучей $l_1, l_2, \cdots, l_s$, имеют при $\mu \to \infty$ следующие асимптотические представления:

$$A(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\mu^{k+1}}, \quad B(\mu) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta_k}{\mu^{k+1}} \cdot \tag{16}$$

Здесь

$$\alpha_k = D^k \{M_L[F(z)]\}_0, \ \beta_k = D^k F(0) \quad (k = 0, 1, 2, \cdots), \tag{17}$$

а

$$M_L[F(z)]=\sum_{n=0}^{\infty} c_n D^n F(z).$$

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим последовательность (13). Ее порядок не превосходит величины $\frac{\rho\beta}{\beta-\rho}<\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$ и она, в силу (12), сходится к $F(z)$. По лемме 1

$$\omega_L(\mu, F)=\lim_{m\to\infty}\omega_L(\mu, F_m).$$

Так как

$$D^n[f(\lambda z)]=\lambda^n f(\lambda z),$$

в силу чего

$$\omega_L[\mu, f(\lambda z)]=f(0)\,\frac{L(\mu)-L(\lambda)}{\mu-\lambda},$$

то

$$\omega_L(\mu, F_m)=f(0)\sum_{k=1}^{m} A_k\,\frac{L(\mu)-L(\mu_k)}{\mu-\mu_k}$$

и, следовательно

$$\omega_L(\mu, F)=f(0)\sum_{k=1}^{\infty} A_k\,\frac{L(\mu)-L(\mu_k)}{\mu-\mu_k}=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\,\frac{L(\mu)-L(\mu_k)}{\mu-\mu_k}. \tag{18}$$

Обратимся к неравенству (12). Из него, положив $z=0$, следует, что

$$|A_k|<C(\varepsilon)\exp\left[-|\mu_k|^{\beta-\varepsilon}\right],$$

где $C(\varepsilon)$ не зависит от k. Далее, на основании этого при больших k получим

$$|A_k L(\mu_k)|<\exp\left[-|\mu_k|^{\beta-\varepsilon}+|\mu_k|^{\rho_1+\varepsilon}\right]<\exp\left[-\frac{1}{2}\,|\mu_k|^{\beta-\varepsilon}\right], \tag{19}$$

ибо $\beta>\rho_1$. Но $|\mu_k|>k^{\frac{1}{\beta+\varepsilon}}$ при больших k. Поэтому ряды (15) всюду сходятся кроме точек μ_k и представляют собой мероморфные функции с простыми полюсами в этих точках. В силу (18) имеем

$$\omega_L(\mu, F)=-A(\mu)+B(\mu)\,L(\mu).$$

Осталось найти асимптотику функций $A(\mu)$ и $B(\mu)$. С этой целью запишем

$$\frac{1}{\mu-\mu_k}=\sum_{m=0}^{n}\frac{\mu_k^m}{\mu^{m+1}}+\left(\frac{\mu_k}{\mu}\right)^{n+1}\frac{1}{\mu-\mu_k}.$$

В силу этого тождества

$$A(\mu)=\sum_{m=0}^{n}\frac{a_m}{\mu^{m+1}}+A_n(\mu),$$

где

$$a_m=\sum_{k=1}^{\infty} B_k\mu_k^m L(\mu_k),\quad A_n(\mu)=\frac{1}{\mu^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty} B_k\,\mu_k^{n+1}\,\frac{L(\mu_k)}{\mu-\mu_k}.$$

Пусть D — угол с вершиной в начале координат, в котором нет лучей $l_1, l_2, \cdots, l_s$. Тогда $|\mu-\mu_k|>\gamma|\mu|$, $\gamma>0$, для $\mu\in D$ и

$$|A_n(\mu)|<\frac{c_n}{|\mu|^{n+2}},\ \mu\in D,$$

где

$$c_n=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}|B_k\mu_k^{n+1}L(\mu_k)|$$

— конечная величина, в силу оценки (19). Следовательно,

$$A(\mu)\sim\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a_m}{\mu^{m+1}}.$$

Выясним чему равны коэффициенты a_m. Для этого подействуем оператором

$$M_L(y)=\sum_0^{\infty}c_n D^n y$$

на нашу функцию

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_k f(\mu_k z).$$

Можно показать, что

$$M_L(F)=\lim_{m\to\infty}M_L(F_m)=\sum_{k=0}^{\infty}A_k L(\mu_k)f(\mu_k z).$$

Отсюда получаем

$$D^m\{M_L(F)\}=\sum_{k=0}^{\infty}A_k L(\mu_k)\mu_k^m f(\mu_k z),$$

$$D^m\{M_L(F)\}_0=a_m.$$

Еще проще убедиться в искомой асимптотике для функции $B(\mu)$. Теорема доказана.

Замечание. Для дальнейшего полезно отметить следующее. Пусть в теореме 1 роль функции $L_1(\lambda)$ играет функция

$$L_1(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^m}{v_n^m}\right),\ v_n=n^{\frac{1}{\beta}},$$

рассмотренная перед теоремой 1. Посмотрим, как ведет себя функция $A(\mu)$ на окружностях $|\lambda|=r_k$. Напомним, что r_k мы выбирали между v_k и v_{k+1} вне интервалов $|\lambda-v_n|<av_n^{1-\beta}$, $0<a<\frac{1}{2}$. Поэтому при $|\mu|=r_k$

$$|\mu-\mu_n|>|r_k-v_k|>av_k^{1-\beta}>a_1|\mu|^{1-\beta},\ 0<a_1<a,$$

в силу чего

$$|A(\mu)| < \frac{1}{\alpha_1} |\mu|^{\beta-1} \sum_{n=1}^{\infty} |B_n L(\mu_n)|, \quad |\mu| = r_k.$$

Ряд справа, на основании неравенства (19), сходится.

Следствие 1. Пусть функция $F(z)$ не удовлетворяет уравнению $M_L(y) = 0$ и пусть p—наименьшее целое число, удовлетворяющее условию: $D^p \{M_L [F(z)]\}_0 \neq 0$. Если $L(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей, то при больших n

$$\omega_L(\lambda_n, F) \sim -\frac{D^p \{M_L [F(z)]\}_0}{\lambda_n^{p+1}}.$$

Если $M_L [F(z)] = 0$, то величина $\omega_L(\lambda_n, F)$ быстрее стремится к нулю при $n \to \infty$.

Для доказательства возьмем в теореме 1 в качестве функции $L_1(\lambda)$ сначала функцию

$$\varphi(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^m}{v_n^m}\right), \quad v_n = n^{\frac{1}{\beta}}, \quad m > 2\beta,$$

а затем функцию $\varphi(\lambda e^{i\frac{\pi}{m}})$. В первом случае роль лучей $l_1, l_2, \cdots, l_s$ будут играть лучи l_k: $\arg \lambda = \frac{2\pi}{m} k$ $(k = 0, 1, \cdots, m-1)$, а во втором случае — лучи l_k^1: $\arg \lambda = \frac{2\pi}{m} k + \frac{\pi}{m}$ $(k = 0, 1, \cdots, m-1)$. Объединение внешности лучей l_k и внешности лучей l_k' охватит всю плоскость и потому

$$\omega_L(\lambda_n, F) = -A(\lambda_n)$$

(здесь $A(\mu)$ определяется или по функции $\varphi(\lambda)$ или по функции $\varphi(\lambda e^{\frac{\pi i}{m}})$. Отсюда, учитывая (16) и (17), все и следует.

Следствие 2. Пусть выражение

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)}$$

является целой функцией. Если $L(\lambda)$ имеет бесконечно много нулей, то функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению $M_L(y) = 0$.

Согласно условию имеем $\omega_L(\lambda_n, F) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Отсюда, на основании следствия 1, вытекает, что

$$D^p \{M_L [F(z)]\}_0 = 0 \quad (p = 0, 1, 2, \cdots).$$

Следовательно, $M_L(F) = 0$.

§ 2. Теорема единственности

Здесь мы хотим доказать, что если в ряде (5) все члены равны нулю, то $F(z) \equiv 0$. Предположение, что в ряде (5) все члены равны нулю, эквивалентно предположению, что функция

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} \tag{20}$$

—целая. Поэтому теорему единственности мы сформулируем в следующем виде.

Теорема 2. *Пусть* $L(\mu)$ *имеет бесконечно много нулей и функция* (20)*-целая. Тогда* $F(z) \equiv 0$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 3. Пусть $L(\beta) = 0$ *и* $\tilde{L}(\lambda) = \dfrac{L(\lambda)}{\lambda - \beta}$. *Тогда имеет место тождество*

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta)\, \omega_{\tilde{L}}(\mu, F) + M_{\tilde{L}}(F)_0. \tag{21}$$

Имеем

$$\omega_L[\mu, f(\lambda z)] = f(0)\frac{L(\mu) - L(\lambda)}{\mu - \lambda}, \quad \omega_{\tilde{L}}[\mu, f(\lambda z)] = f(0)\frac{\tilde{L}(\mu) - \tilde{L}(\lambda)}{\mu - \lambda},$$

$$M_{\tilde{L}}[f(\lambda z)] = \tilde{L}(\lambda) f(\lambda z)$$

и тождество (21) сразу проверяется для функции $F(z) = f(\lambda z)$. Тогда оно верно для функции (13). Итак

$$\omega_L(\mu, F_m) = (\mu - \beta)\, \omega_{\tilde{L}}(\mu, F_m) + M_{\tilde{L}}(F_m)_0.$$

Устремим теперь m в ∞. В пределе, на основании леммы 1, мы и получим (21).

Лемма 4. *Пусть функция* (20)*—целая и пусть* $L(\beta) = 0$. *Тогда*

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{\tilde{L}}(\mu, F)}{\tilde{L}(\mu)}, \quad \tilde{L}(\mu) = \frac{L(\mu)}{\mu - \beta}.$$

Согласно условию $\omega_L(\beta, F) = 0$. Положив $\mu = \beta$ в (21), получим $M_{\tilde{L}}(F)_0 = 0$. В силу этого, тождество (21) примет вид

$$\omega_L(\mu, F) = (\mu - \beta)\, \omega_{\tilde{L}}(\mu, F),$$

откуда и вытекает нужный результат.

Лемма 5. *Пусть* $L(\lambda)$ *имеет бесконечно много нулей и функция* (20)*—целая. Тогда*

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_\varphi(\mu, F)}{\varphi(\mu)}, \quad \varphi(\mu) = \mu L(\mu).$$

На основании тождества (21) имеем

$$\omega_\varphi(\mu, F) = \mu\omega_L(\mu, F) + M_L(F)_0.$$

Так как функция (20)—целая, то по следствию 2 из теоремы 1 функция $F(z)$ удовлетворяет уравнению $M_L(y) = 0$. Следовательно, $M_L(F)_0 = 0$. Поэтому

$$\omega_\varphi(\mu, F) = \mu\, \omega_L(\mu, F),$$

что и надо было показать.

Лемма 6. *Пусть последовательность целых функций* $\{\varphi_k(\mu)\}$ *имеет порядок* $\leqslant \rho_1$ *и пусть она сходится к функции* $\varphi(\mu)$. *Тогда*

$$\lim_{k\to\infty} \omega_{\varphi_k}(\mu, F) = \omega_\varphi(\mu, F).$$

Для доказательства положим

$$\varphi_k(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n^{(k)} \mu^n, \quad \varphi(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \mu^n.$$

Имеем

$$\omega_\varphi(\mu, F) - \omega_{\varphi_k}(\mu, F) =$$

$$= \sum_{n=1}^{N} (d_n - d_n^{(k)})[D^{n-1}F(0) + \mu D^{n-2}F(0) + \cdots + \mu^{n-1}D^0F(0)] +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} (d_n - d_n^{(k)})[D^{n-1}F(0) + \mu D^{n-2}F(0) + \cdots + \mu^{n-1}D^0F(0)] = J_k' + J_k''.$$

Функция $F(z)$ имеет порядок $\nu < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. Поэтому квадратная скобка не превосходит (см. доказательство леммы 1) по модулю при $|\mu| \leqslant R$, $R > 1$,

$$A(\varepsilon)\, nR^n n^{n\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} + \varepsilon\right)}, \quad \nu < \alpha < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}, \quad \alpha > \rho.$$

Согласно условию

$$|d_n^{(k)}| < B(\varepsilon)\, n^{-n\left(\frac{1}{\rho_1} - \varepsilon\right)},$$

где $B(\varepsilon)$ не зависит от k. То же неравенство будет иметь место и для коэффициентов d_n. В силу всего этого

$$|J_k''| < 2A(\varepsilon)\, B(\varepsilon) \sum_{n=N+1}^{\infty} nR^n\, n^{n\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\rho_1} + 2\varepsilon\right)}.$$

Круглая скобка при малом ε отрицательна. Поэтому $|J_k''|$ можно сделать малым за счет большого N. Величина $|J_k'|$ будет малой (при фиксированном N) при достаточно больших k, ибо при любом фиксированном n

$$\lim_{k\to\infty} d_n^{(k)} = d_n.$$

Лемма 7. *В условиях леммы* 5

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_\psi(\mu, F)}{\psi(\mu)}, \quad \psi(\mu) = L(\mu)\, P(\mu),$$

где $P(\mu)$ — *целая функция порядка* $\leqslant \rho_1$.

Пусть

$$P(\mu) = \sum_{0}^{\infty} d_n \mu^n, \quad P_k(\mu) = \sum_{n=0}^{k} d_n \mu^n, \quad \psi_k(\mu) = L(\mu) \cdot P_k(\mu).$$

По лемме 5

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{\varphi_1}(\mu, F)}{\varphi_1(\mu)} = \cdots = \frac{\omega_{\varphi_k}(\mu, F)}{\varphi_k(\mu)}, \quad \varphi_s(\mu) = \mu^s L(\mu),$$

откуда по известному свойству пропорций

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{k} d_n \omega_{\varphi_n}(\mu, F)}{\sum\limits_{n=0}^{k} d_n \varphi_n(\mu)} = \frac{\omega_{\psi_k}(\mu, F)}{\psi_k(\mu)}.$$

Последовательность $\{\psi_k(\mu)\}$ имеет порядок $\leqslant \rho_1$ и она сходится к $\psi(\mu)$. По лемме 6 тогда получаем

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \lim_{k\to\infty} \frac{\omega_{\psi_k}(\mu, F)}{\psi_k(\mu)} = \frac{\omega_{\psi}(\mu, F)}{\psi(\mu)}.$$

Доказательство теоремы. Пусть

$$L(\lambda) = \lambda^p e^{P(\lambda)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\lambda^s}{s\lambda_n^s}},$$

где $p \geqslant 0$, $s \leqslant \rho_1$ и $P(\lambda)$ — многочлен степени $\leqslant \rho_1$. Возьмем фиксированное число m и положим

$$P_m(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right), \quad Q_N(\lambda) = \prod_{n=N}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_n} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_n^2} + \cdots + \frac{\lambda^s}{s\lambda_n^s}}, \quad N > m.$$

Применяя сначала несколько раз последовательно лемму 4, а затем лемму 7, получим

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{\varphi_N}(\mu, F)}{\varphi_N(\mu)}, \quad \varphi_N(\mu) = P_m(\mu)\, Q_N(\mu).$$

Последовательность $\{\varphi_N(\mu)\}$ имеет порядок $\leqslant \rho_1$ и сходится к $P_m(\mu)$. На основании леммы 6 тогда будем иметь

$$\frac{\omega_L(\mu, F)}{L(\mu)} = \frac{\omega_{P_m}(\mu, F)}{P_m(\mu)}.$$

Поскольку это отношение—целая функция, причем $P_m(\mu)$ — многочлен степени m, а $\omega_{P_m}(\mu, F)$ — многочлен степени $\leqslant (m-1)$, то

$$\omega_{P_m}(\mu, F) \equiv 0. \tag{22}$$

Пусть

$$P_m(\mu) = \sum_{n=0}^{m} d_n \mu^n.$$

Тогда тождество (22) запишется в виде

$$\sum_{n=1}^{m} d_n \left[D^{n-1} F(0) + \mu D^{n-2} F(0) + \cdots + \mu^{n-1} D^0 F(0)\right] \equiv 0,$$

откуда, приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях μ, получим

$$
\begin{aligned}
d_1 D^0 F(0) + d_2 D^1 F(0) + \cdots + d_m D^{m-1} F(0) &= 0,\\
d_2 D^0 F(0) + \cdots + d_m D^{m-2} F(0) &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\\
d_{m-1} D^0 F(0) + d_m D^1 F(0) &= 0,\\
d_m D^0 F(0) &= 0.
\end{aligned}
$$

Из этих равенств последовательно, начиная с конца, находим

$$D^0 F(0) = D^1 F(0) = \cdots = D^{m-1} F(0) = 0.$$

Поскольку m — любое, то, следовательно, все $D^k F(0) = 0$. Поэтому $F(z) \equiv 0$, что и надо было доказать.

§ 3. Интегральное представление произвольной функции

Теорема единственности обеспечивает принципиальную возможность восстановления функции $F(z)$, если известны члены ряда (5). Во введении было отмечено, что если функция $L(\lambda)$ удовлетворяет условию (6) или условию (8), то она представляется рядом (7). Здесь мы рассмотрим случай, когда эти условия не выполняются. Пусть

$$L(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\lambda^m}{\lambda_n^m}\right), \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{\rho_1}} = \sigma, \ \lambda_n > 0, \quad \frac{m}{2} < \rho_1 < m, \tag{23}$$

где m — целое положительное число. Показывается (см. [5], стр. 88), что существует предел

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln|L(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_1}} = \frac{\pi\sigma}{\sin\frac{\pi\rho_1}{m}} \cos\rho_1\left(\varphi - \frac{\pi}{m}\right), \ 0 < \varphi < \frac{2\pi}{m}. \tag{24}$$

Учитывая (24) и тот факт, что функция $L(\lambda)$ принимает одинаковые значения в точках $\lambda e^{\frac{2k\pi}{m}i}$ $(k = 0, 1, \cdots, m-1)$, можно утверждать следующее: в углах

$$D_k^- : \left|\arg\left(\frac{2\pi}{m}k - \varphi\right)\right| < \varphi_0 \ (k = 0, 1, \cdots, m-1), \ \varphi_0 = \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{2\rho_1} > 0, \tag{25}$$

функция $L(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ стремится к нулю, а в углах

$$D_k^+ : \left|\arg\left(\frac{2\pi}{m}k + \frac{\pi}{m} - \varphi\right)\right| < \frac{\pi}{2\rho_1} \ (k = 0, 1, \cdots, m-1) \tag{26}$$

она стремится к бесконечности. Отсюда, в частности, следует, что эта функция не удовлетворяет условию (8) и тем более условию (6). Наша задача получить для функции $F(z)$ порядка $\upsilon < \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ интегральное представление через $L(\lambda)$ и $\omega_L(\lambda, F)$. С этой целью введем вспомогательную функцию

$$L_1(\lambda)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\lambda^{2m}}{\upsilon_n^{2m}}\right),\ \upsilon_n=n^{\frac{1}{\beta}},\tag{27}$$

где m — то же, что и выше, а β таково, что $\rho_1<\hat\beta<m$ и $\upsilon<\frac{\rho\beta}{\hat\beta-\rho}<$ $<\frac{\rho\rho_1}{\rho_1-\rho}$. В § 1 мы убедились, что эта функция удовлетворяет всем условиям леммы 2. В силу леммы 2 имеем

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kf(\mu_k z),\ \ A_k=\frac{\omega_{L_1}(\mu_k, F)}{f(0)L_1'(\mu_k)},\tag{28}$$

где μ_k $(k=1, 2,\cdots)$—нули функции $L_1(\mu)$. По теореме 1

$$\omega_L(\mu, F)=-A(\mu)+B(\mu)L(\mu),\tag{29}$$

где

$$A(\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_kL(\mu_k)}{\mu-\mu_k},\ \ B(\mu)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{B_k}{\mu-\mu_k},\ B_k=f(0)A_k.\tag{30}$$

Точки μ_s $(s=1, 2,\cdots)$ расположены на лучах $l_k:\arg\mu=\frac{\pi}{2m}+$ $+\frac{k\pi}{m}$ $(k=0,\cdots, 2m-1)$. Так как в неравенстве (26), определяющем угол D_k^+, величина $\frac{\pi}{2\rho_1}>\frac{\pi}{2m}$, то лучи l_k $(k=0, 1,\cdots, 2m-1)$ все расположены в углах D_s^+ $(s=0, 1,\cdots, m-1)$. Рассмотрим подробнее угол D_0^+. В нем расположены лучи l_0, l_1. Построим замкнутый конечный контур C_k^0 следующим образом. Проведем в угле D_0^+ луч l_0' ниже луча l_0 и луч $\overset{\bullet}{l_0}$ выше луча l_1. Пусть $|\lambda|=r_k\uparrow\infty$ — окружности, такие, что при любом $\varepsilon>0$

$$\ln|L_1(r_ke^{i\varphi})|>r_k^{\beta-\varepsilon},\ k>K(\varepsilon)$$

(такие окружности имеются, ибо функция $L_1(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2). Контур C_k^0 состоит из отрезков p_k', $\overset{\bullet}{p_k}$ лучей l_0', $\overset{\bullet}{l_0}$, заключенных между началом координат и окружностью $|\lambda|=r_k$, и дуги γ_k этой окружности, заключенной между лучами l_0', $\overset{\bullet}{l_0}$. В силу (29) имеем равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k^0}\frac{\omega_L(\mu, F)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)L(\mu)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_k^0}\frac{A(\mu)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)L(\mu)}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{\overset{\bullet}{C_k}}\frac{B(\mu)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)}.$$

Левая часть равна нулю, так как внутри C_k^0 нет нулей функции $L(\mu)$. Второй интеграл из правой части, учитывая представление (30), равен

$$\sum_{\mu_j \in E_k^0} A_j f(\mu_j z),$$

где E_k^0 — область, ограниченная контуром C_k^0. Таким образом

$$\sum_{\mu_j \in E_k^0} A_j f(\mu_j z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{p_k'} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{p_k^{\bullet}} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)} + $$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)}. \tag{31}$$

На дугах γ_k функция $L(\mu)$, в силу равенства (24), удовлетворяет условию:

$$\ln |L(\mu)| > C |\mu|^{\rho_1}, \ C > 0.$$

На тех же дугах имеем (см. замечание после теоремы 1):

$$|A(\mu)| < C_1 |\mu|^{\beta - 1}.$$

Поэтому третий интеграл в правой части равенства (31) стремится к нулю при $k \to \infty$. В итоге получаем

$$\sum_{\mu_j \in D_0^+} A_j f(\mu_j z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0'} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_0^{\bullet}} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)}, \tag{32}$$

причем переменная интегрирования μ пробегает луч l_0' в направлении от начала до ∞, а луч $l_0^{\bullet}$ — в направлении от ∞ до начала.

Равенства, аналогичные равенству (32), имеют место для каждого угла D_k^+. Сложив их и приняв во внимание формулу (28), получим

$$F(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k'} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_k^{\bullet}} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)} \right\}. \tag{33}$$

Здесь l_k', $l_k^{\bullet}$ — лучи из угла D_k^+, которые обладают следующим свойством: переход от l_k' к $l_k^{\bullet}$ происходит в D_k^+ против часовой стрелки, точки $\mu_j \in D_k^+$ (они находятся на двух лучах) лежат между l_k' и $l_k^{\bullet}$. Формула (33) и есть искомая формула. Мы ее сейчас запишем в несколько ином виде. Учтем, что в интегралах из формулы (33) луч l_k' обходится от начала координат до ∞, а луч $l_k^{\bullet}$ — в обратном направлении. Имея это в виду, обозначим через Γ_k ($k = 0, 1, \cdots, m-1$) контур, составленный из лучей $l_{k-1}^{\bullet}$, l_k', и проходимый против часовой стрелки (при $k=0$ следует считать $l_{-1}^{\bullet} = l_{m-1}^{\bullet}$). Заметим, что угол D_k^- (в нем $L(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ быстро стремится к нулю) лежит внутри контура Γ_k. С помощью контуров Γ_k формула (33) запишется в виде

$$F(z) = -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)}. \tag{34}$$

Следует отметить, что внутри контуров Γ_k $(k=0, 1, \cdots, m-1)$ у мероморфной функции $A(\mu)$ нет особых точек. Напротив, все нули функции $L(\mu)$ лежат внутри контуров Γ_k. Отсюда следует, в частности, принимая во внимание формулу (29), что у функций

$$-\frac{A(\mu) f(\mu z)}{f(0) L(\mu)}, \quad \frac{\omega_L(\mu, F) f(\mu z)}{f(0) L(\mu)}$$

вычеты в нулях $L(\mu)$ равны (у мероморфной функции $B(\mu)$ внутри Γ_k нет особых точек). Однако к интегралам из формулы (34) мы не можем применить непосредственно теорию вычетов, потому что знаменатель $L(\mu)$ внутри Γ_k, тогда $\mu \to \infty$ и $\mu \in D_k^-$, быстро стремится к нулю. В следующем параграфе будет показано, каким образом все-таки можно будет выразить интегралы через указанные вычеты.

§ 4. О суммировании ряда

Рассмотрим из формулы (34) интеграл

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{A(\mu) f(\mu z)\, d\mu}{f(0) L(\mu)}. \tag{35}$$

В нем Γ_0 — граница угла $|\arg \mu| < \varphi_1 = \varphi_0 + \delta$, где $\varphi_0 = \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{2\rho_1}$ и δ — достаточно малое положительное число (лучи $\arg \mu = \pm \varphi_1$ лежат в областях D_0^+ и D_{m-1}^+). Функция $A(\mu)$ внутри Γ_0 — аналитическая.

Возьмем семейство функций $\{\varphi_q(\mu)\}$, обладающее следующими свойствами:

1) все функции $\varphi_q(\mu)$ регулярны на контуре Γ_0 и внутри него;

2) на любой конечной части контура Γ_0 равномерно $\varphi_q(\mu) \to 1$ при $q \to \infty$ и имеется такое $p < \rho_1$, что при всех q

$$|\varphi_q(\mu)| < A e^{|\mu|^p}, \quad \mu \in \Gamma_0,$$

где постоянная A не зависит от q;

3) для каждого q имеются такие положительные $C(q)$ и $\beta(q)$, причем $\beta(q) > \rho_1$, что на Γ_0 и внутри Γ_0 выполняется условие

$$|\varphi_q(\mu)| < C(q)\, e^{-|\mu|^{\beta(q)}}.$$

Убедимся сначала, что такие семейства существуют. С этой целью введем функцию

$$\Phi(\mu) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu^m}{\nu_n^m}\right), \quad \nu_n = n^{\frac{1}{\rho_2}}, \quad \rho_1 < \rho_2 < m.$$

Для нее существует предел

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln |\Phi(re^{i\varphi})|}{r^{\rho_2}} = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi \rho_2}{m}} \cos \rho_2 \varphi, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{m}.$$

Правая часть положительна, если $|\varphi| < \frac{\pi}{2\rho_2}$. В силу неравенств $\frac{m}{2} < \rho_1 < m$, $\rho_1 < \rho_2 < m$ имеем

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{m} - \frac{\pi}{2\rho_1} < \frac{\pi}{2m}, \quad \frac{\pi}{2\rho_2} > \frac{\pi}{2m}.$$

Поэтому при достаточно малом $\delta > 0$ получаем $\frac{\pi}{2\rho_2} > \varphi_1 = \varphi_0 + \delta$ и значит, на контуре Γ_0 и внутри Γ_0

$$|\Phi(\mu)| > Ce^{\gamma|\mu|^{\rho_2}}, \ \gamma > 0, \ C > 0. \tag{36}$$

Теперь положим

$$\varphi_q(\mu) = \frac{1}{\Phi(\mu)} \prod_{n=1}^{q} \left(1 + \frac{\mu^m}{\nu_n^m}\right) = \left\{ \prod_{n=q+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\mu^n}{\nu_n^m}\right) \right\}^{-1} \ (q=1, 2, \cdots). \tag{37}$$

У нас $\varphi_0 < \frac{\pi}{2m}$, при малом $\delta > 0$ также $\varphi_1 = \varphi_0 + \delta < \frac{\pi}{2m}$. В силу этого $|\arg(\mu^m)| < \frac{\pi}{2}$, когда точка μ находится на контуре Γ_0. Поэтому

$$\left|1 + \frac{\mu^m}{\nu_n^m}\right| \geqslant 1, \ \mu \in \Gamma_0$$

и $|\varphi_q(\mu)| < 1$, $\mu \in \Gamma_0$. Отсюда и из оценки (36) вытекает, что последовательность $\{\varphi_q(\mu)\}$ удовлетворяет всем необходимым требованиям.

После этого вернемся к рассмотрению интеграла (35). Положим

$$\Phi_q(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_0} \frac{A(\mu)\, \varphi_q(\mu)\, f(\mu z)\, d\mu}{f(0)\, L(\mu)}. \tag{38}$$

Из свойства 2) семейства $\{\varphi_q(\mu)\}$ следует, что для z из любой ограниченной области равномерно

$$\lim_{q \to \infty} \Phi_q(z) = F_0(z).$$

Интеграл (38) вычисляется с помощью теории вычетов. Укажем как это делается. Функция $L(\mu)$ является функцией вполне регулярного роста и для нее поэтому имеются окружности $|\mu| = r_k \uparrow \infty$ такие, что

$$\ln|L(r_k e^{i\varphi})| > [h(\varphi) - \varepsilon]\, r_k^{\rho_1}, \ k > K(\varepsilon),$$

где $h(\varphi)$ — индикатриса роста $L(\mu)$. Отсюда

$$\left|\frac{1}{L(\mu)}\right| < e^{\alpha|\mu|^{\rho_1}}, \ |\mu| = r_k \ (k=1, 2, \cdots), \ \alpha > 0. \tag{39}$$

Функция $A(\mu)$ является ограниченной на Γ_0 и внутри Γ_0, функция $f(\mu z)$, когда z лежит в круге $|z| < R$, удовлетворяет условию

$$|f(\mu z)| < Ce^{|\mu|^{\rho'}}, \ \rho' > \rho.$$

Отсюда, принимая во внимание оценку (39) и свойство 3) семейства $\{\varphi_q(\mu)\}$ заключаем, что подынтегральная функция в интеграле (38) имеет оценку

$$\left|\frac{A(\mu)\varphi_q(\mu)f(\mu z)}{f(0)L(\mu)}\right| < C_1(q)\,e^{-\frac{1}{2}|\mu|^{\beta(q)}},\quad |\mu| = r_k,\ |\arg\mu| \leqslant \varphi_1,\ |z| < R.$$

Следовательно, учитывая представление (23), получим

$$\Phi_q(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{r_{k-1}<\lambda_\nu<r_k}\frac{A(\lambda_\nu)\varphi_q(\lambda_\nu)f(\lambda_\nu z)}{f(0)L'(\lambda_\nu)}\Bigg).$$

Но (см. конец предыдущего параграфа)

$$A(\lambda_\nu) = -\omega_L(\lambda_\nu, F).$$

Поэтому окончательно

$$\Phi_q(z) = -\sum_{k=1}^{\infty}\Bigg(\sum_{r_{k-1}<\lambda_\nu<r_k}\frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{f(0)L'(\lambda_\nu)}\varphi_q(\lambda_\nu)f(\lambda_\nu z)\Bigg).$$

В результате, интеграл (35) мы выразили через

$$\frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{f(0)L'(\lambda_\nu)}f(\lambda_\nu z) = K(z, \lambda_\nu),$$

где $K(z, \lambda_\nu)$ — член ряда (5), соответствующий нулю λ_ν функции $L(\mu)$. Аналогичным образом рассматривается интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_k}\frac{A(\mu)f(\mu z)\,d\mu}{f(0)L(\mu)},\quad k>0$$

из формулы (34). Отметим только следующее. Можно считать, что контур Γ_k получается из контура Γ_0 поворотом последнего на угол $\frac{2\pi}{m}k$. Внутри Γ_k у $L(\mu)$ лежат нули $\lambda_\nu e^{\frac{2\pi}{m}ki}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. Если $\{\varphi_q(\mu)\}$ — уже рассмотренное семейство функций, связанных с контуром Γ_0, то $\{\varphi_q(\mu e^{-\frac{2\pi}{m}ki})\}$ — соответствующее семейство для контура Γ_k. В точках $\lambda_\nu e^{\frac{2\pi}{m}ki}$ функции этого семейства имеют те же значения что и функции исходного семейства в точках λ_ν.

Имея все это в виду, на основании формулы (34), можно утверждать следующее.

Теорема 3. *Пусть $L(\mu)$ — функция вида* (23), $|\mu| = r_k \uparrow \infty$ — *окружности, на которых выполняется условие*

$$\ln|L(r_k e^{i\varphi})| > [h|\varphi| - \varepsilon]\,r_k,\quad k > K(\varepsilon)$$

($h(\varphi)$ — *индикатриса роста* $L(\mu)$), $\{\varphi_q(\mu)\}$ — *семейство функций со свойствами* 1), 2), 3). *Если* $F(z)$ — *целая функция порядка* $< \frac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$, *то*

$$F(z)=\lim_{q\to\infty} S_q(z),$$

где

$$S_q(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r_{k-1}<\lambda_\nu<r_k}\varphi_q(\lambda_\nu)\sum_{s=0}^{m-1}\frac{\omega_L(\lambda_\nu\,\varepsilon^s, F)}{f(0)\,L'(\lambda_\nu\,\varepsilon^s)}\,f(\lambda_\nu\,\varepsilon^s z),\quad \varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Указанный процесс мы можем рассматривать как метод суммирования исходного ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{m-1}\frac{\omega_L(\lambda_\nu\,\varepsilon^s,\ F)}{f(0)\,L'(\lambda_\nu\,\varepsilon^s)}\,f(\lambda_\nu\,\varepsilon^s z), \tag{40}$$

который расходится, если $M_L(F)\not\equiv 0$. То, что этот ряд расходится, видно из следующих рассуждений. Пусть p — наименьшее целое число такое, что $D^p\{M_L(F)\}_0\neq 0$. По следствию 1 из теоремы 1 имеем

$$\omega_L(\lambda_\nu, F)\sim-\frac{D^p\{M_L(F)\}_0}{\lambda_\nu^{p+1}}.$$

В угле $|\arg\mu|<\delta<\varphi_0=\dfrac{\pi}{m}-\dfrac{\pi}{2\rho_1}$, согласно равенству (24), справедлива оценка

$$|L(\mu)|<Ae^{-\alpha|\mu|^{\rho_1}},\ A>0,\ \alpha>0. \tag{41}$$

Пусть C_ν — окружность $|\mu-\lambda_\nu|=1$. Согласно формуле

$$L'(\lambda_\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\nu}\frac{L(\mu)\,d\mu}{(\mu-\lambda_\nu)^2},$$

на основании оценки (41), получаем

$$|L'(\lambda_\nu)|<A_1 e^{-\alpha_1\lambda_\nu^{\rho_1}},\ \alpha_1>0.$$

Таким образом

$$\left|\frac{\omega_L(\lambda_\nu, F)}{L'(\lambda_\nu)}\right|>A_2\frac{e^{\alpha_1\lambda_\nu^{\rho_1}}}{\lambda_\nu^{p+1}}, \tag{42}$$

и ряд (40) расходится по крайней мере в точке $z=0$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 10.II.1967

Ա. Ֆ. ԼԵՈՆՏԵՎ

ԱՄԲՈՂՋ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ՝ ԴԻՐԻԽԼԵՑԻ ԵՎ ԱՎԵԼԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՇԱՐՔԵՐՈՎ ՆԵՐԿԱՅԱՑՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ամփոփում

Դիցուք $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$*-ը* ρ *կարգի ամբողջ ֆունկցիա է, ընդ որում*

բոլոր $a_n \neq 0$ և գոյություն ունի $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln n}{\ln\left|\dfrac{1}{a_n}\right|} = \rho$ սահմանը, $L(\lambda) = \sum\limits_{0}^{\infty} c_n \lambda^n$ ամբողջ ֆունկցիա է. $\rho_1 > \rho$ կարգի և $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ նրա զրոներն են, $F(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} b_n z^n$ $\nu < \dfrac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$ կարգի ամբողջ ֆունկցիա է, նշանակենք $\omega(\mu, F) =$

$$= a_0 \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + \mu \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} + \cdots \mu^{n-1} \frac{b_0}{a_0}\right).$$

Ուսումնասիրվում է

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n f(\lambda_n z), \quad A_n = \frac{\omega(\lambda_n, F)}{L'(\lambda_k)}. \tag{1}$$

շարքը։ Ստացված է $\omega(\mu, F)$ ֆունկցիայի ասիմպտոտական ներկայացումը (μ)-ի մեծ արժեքների համար։ Ապացուցված է միակության թեորեմ՝ եթե բոլոր $A_k = 0$, ապա $F(z) \equiv 0$, $L(\lambda)$-ի վրա դրված որոշ պայմանների դեպքում տրված է (1) շարքի $F(z)$ ֆունկցիային գումարման մեթոդ։

A. F. LEONTEV

ON THE REPRESENTATION OF ARBITRARY ENTIRE FUNCTIONS BY DIRICHLET AND SOME OTHER FUNCTIONAL SERIES

Summary

Let $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ — be an entire function of order ρ with $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \cdots$, and let the $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\ln n}{\ln\left|\dfrac{1}{a_n}\right|} = \rho$ exist. Also, let $L(\lambda) = \sum\limits_{0}^{\infty} c_n \lambda^n$ — be an entire function of order $\rho_1 > \rho$, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots$ — be the set of points where it vanishes, and $F(z) = \sum\limits_{0}^{\infty} b_n z^n$ — be an entire function of order $\nu < \dfrac{\rho\rho_1}{\rho_1 - \rho}$. We build

$$\omega(\mu, F) = a_0 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \left(\frac{b_{n-1}}{a_{n-1}} + \mu \frac{b_{n-2}}{a_{n-2}} + \cdots + \mu^{n-1} \frac{b_0}{a_0}\right).$$

The series

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n f(\lambda_n z), \quad A_n = \frac{\omega(\lambda_n, F)}{L'(\lambda_k)}, \tag{1}$$

are investigated in the paper. The asymptotic representation of $\omega(\mu, F)$ for arbitrary large values of $|\mu|$ is obtained. A uniqueness result is prooved: if $A_k=0$ for every k, then $F(z)\equiv 0$.

Under certain assumptions about $L(\lambda)$ a summation method of the series (1) to $F(z)$ is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Ф. Леонтьев.* О представлении функций последовательностями полиномов Дирихле, Матем. сб., 70 (112), № 1, 1966, 132—144.
2. *А. Ф. Леонтьев.* Об одном свойстве единственности, Матем. сб., 72 (114), № 2, 1967, 237—250
3. *А. Ф. Леонтьев.* О суммировании ряда Дирихле с действительными показателями для произвольной аналитической функции, Изв. АН СССР, серия матем., 31, № 1, 1967, 87—102.
4. *А. Ф. Леонтьев.* О представлении целых функций некоторыми общими рядами, Матем. сб., 71 (113), № 1, 1966, 3—13.
5. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, Москва, Гостехиздат, 1956.