ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 5, 1967 Математика

М. М. ДЖРБАШЯН и В. С. ЗАХАРЯН

ГРАНИЧНЫЕ СВОЙСТВА МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССА N_α

1°. Как известно [1], класс функций ограниченного вида N, введенный Р. Неванлинна, обладает следующими важными свойствами:

(а) если $F(z) \in N$, то предел

$$F(e^{i\theta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\theta}) \tag{1}$$

существует всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$ линейной меры нуль;

(б) если функция $F(z) \not\equiv 0$ из класса N, то для ее граничных значений $F(e^{i\theta})$ выполняется условие

$$\int_0^{2\pi} |\log |F(e^{i\theta})|| \, d\theta < +\infty. \tag{2}$$

С другой стороны, в недавних работах [2], [3] введены новые классы N_α $(-1 < \alpha < \infty)$ мероморфных в круге $|z| < 1$ функций и установлено их параметрическое представление.

Класс N_α $(-1 < \alpha < \infty)$ определялся посредством α-характеристики

$$T_\alpha(r; F) \equiv m_\alpha(r; F) + N_\alpha(r; F) \tag{3}$$

как множество тех мероморфных в круге $|z| < 1$ функций $F(z)$, для которых

$$\sup_{0<r<1} \{T_\alpha(r; F)\} < +\infty. \tag{4}$$

При этом функции $m_\alpha(r; F)$, $N_\alpha(r; F)$ и $T_\alpha(r; F)$ представляют собой своеобразные аналоги известных неванлинновских функций $m(r; F)$, $N(r; F)$ и $T(r; F)$, совпадая с ними при значении параметра $\alpha = 0$. Функции эти для каждого значения параметра α $(-1 < \alpha < \infty)$ определяются таким образом.

Пусть $D^{-\alpha}$ — оператор интегрирования (при $0 < \alpha < \infty$) или дифференцирования (при $-1 < \alpha < 0$) в смысле Римана-Лиувилля с началом в нулевой точке, т. е.

$$D^{-\alpha}\varphi(r) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^r (r-t)^{\alpha-1} \varphi(t) \, dt \quad (0 < \alpha < \infty) \tag{5}$$

и

$$D^{-\alpha}\varphi(r) = \frac{d}{dr} D^{-(1+\alpha)}\varphi(r) \quad (-1 < \alpha < 0),$$

и пусть

$$D^{-\alpha}\varphi(r)\Big|_{\alpha=0}=\varphi(r),\ D^{-\alpha}_{(+)}\varphi(r)=\max\{D^{-\alpha}\varphi(r),\ 0\}. \tag{6}$$

Тогда для каждого α $(-1<\alpha<\infty)$

$$m_\alpha(r;F)\equiv m_\alpha(r;\infty)=\frac{r^{-\alpha}}{2\pi}\int_0^{2\pi}D^{-\alpha}_{(+)}\log|F(re^{i\vartheta})|\,d\vartheta, \tag{7}$$

$$N_\alpha(r;F)\equiv N_\alpha(r;\infty)=\frac{n(0;\infty)}{\Gamma(1+\alpha)}[\log r-k_\alpha]+k$$

$$+\frac{r^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^r\frac{(r-t)^\alpha}{t}[n(t;\infty)-n(0;\infty)]\,dt,\ k_\alpha=\alpha\sum_1^\infty\frac{1}{n(n+\alpha)}, \tag{8}$$

где $n(0;\infty)$ означает кратность возможного полюса функции в точке $z=0$, $n(t,\infty)$ — число ее полюсов, лежащих в круге $|z|\leqslant t$ $(0<t<1)$ и отличных от $z=0$, в предположении, что каждый полюс считается столько раз, какова его кратность.

Поскольку при значении параметра $\alpha=0$ имеем

$$T_0(r;F)\equiv T(r;F),$$

то $N_0\equiv N$, где N — класс функций ограниченного вида Р. Неванлинна.

Вместе с тем, важной особенностью классов N_α является то обстоятельство, что для любых значений $-1<\alpha_1<\alpha_2<+\infty$ имеет место строгое включение $N_{\alpha_1}\subset N_{\alpha_2}$ и, в частности,

$$N_\alpha\subset N_0\quad(-1<\alpha<0). \tag{9}$$

2°. В связи со свойством (9) классов N_α естественно возникают два вопроса.

1. Не „утоньшается“ ли для функций класса N_α $(-1<\alpha<0)$ то исключительное множество $E\subset[0,2\pi]$ нулевой линейной меры, где предел (1) возможно и не существует? Если да, то каким образом можно характеризовать его в зависимости от значения параметра α?

2. Нельзя ли утверждать для граничных значений функций класса N_α $(-1<\alpha<0)$ нечто большее, чем конечность интеграла (2)?

В настоящей статье, привлекая понятие γ-емкости множеств [4], приводится положительное решение обеих поставленных выше задач.

Рассмотрим систему всех множеств $\{B\}$, измеримых по Борелю и лежащих на $[0,2\pi]$.

Будем называть *мерой* μ всякую неотрицательную, вполне аддитивную функцию множеств, определенную на $\{B\}$ и нормированную, т. е. $\mu[0,2\pi]=1$. Будем говорить, что *мера сосредоточена на* B и писать $\mu\prec B$, если $\mu(B)=1$, т. е. если

$$\int_B d\mu=\int_0^{2\pi}d\mu=1.$$

Фростман и другие авторы ввели и изучили понятие γ-емкости множества. Мы не будем здесь указывать как надо находить величину γ-емкости множества, а лишь ограничимся тем, что приведем определение и будем различать множества *γ-емкости* положительной и равной нулю, а именно:

Множество E, измеримое B, имеет *положительную γ-емкость* $(0<\gamma<1)$, если найдется такая $\mu \prec E$, для которой функция

$$V_\gamma(x;\ r) = \int_0^{2\pi} \frac{d\mu}{|e^{it} - re^{ix}|^\gamma} \tag{10}$$

остается равномерно ограниченной по x при $r \to 1-0$, то есть если при некотором $\mu \prec E$

$$V_\gamma(\mu) = \sup_{0<r<1} \left\{ \max_{0<x<2\pi} V_\gamma(x;\ r) \right\} < +\infty. \tag{11}$$

Если же для любой меры $\mu \prec E$ $V_\gamma(\mu) = +\infty$, то E имеет *γ-емкость, равную нулю;* и тогда будем писать $\operatorname{cap}_\gamma E = 0$.

Из самого определения непосредственно следуют следующие свойства множеств, имеющих нулевую γ-емкость:

а) если для данного γ $(0<\gamma<1)$, $\operatorname{cap}_\gamma E = 0$, то для любого γ' $(\gamma \leqslant \gamma' < 1)$ имеем также $\operatorname{cap}_{\gamma'} E = 0$;

б) если

$$\operatorname{cap}_\gamma E_k = 0 \quad (k=1,\ 2, \cdots, p),$$

то имеем также

$$\operatorname{cap}_\gamma \left\{ \bigcup_1^p E_k \right\} = \operatorname{cap}_\gamma \left\{ \bigcap_1^p E_k \right\} = 0.$$

Следующие две основные теоремы дают ответ на поставленные выше вопросы о функциях класса N_α $(-1<\alpha<0)$.

Теорема 1. *Если $F(z) \in N_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$, то предел*

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1-0} F(re^{i\vartheta})$$

существует для любого $\vartheta \in [0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, γ-емкость которого (где γ — любое число из интервала $1+\alpha<\gamma<1$) равна нулю.

Теорема 2. *Пусть $F(z) \in N_\alpha$ $(-1<\alpha<0)$ и $E \subset [0, 2\pi]$ — любое множество с положительной γ-емкостью (где γ — любое число из интервала $1+\alpha<\gamma<1$). Тогда для любой меры $\mu \prec E$, у которой $V_\gamma(\mu) < +\infty$, для граничных значений $F(e^{i\vartheta})$ функции $F(z)$ выполняется условие*

$$\int_E \left|\log|F(e^{i\vartheta})|\right| d\mu(\vartheta) = \int_0^{2\pi} \left|\log|F(e^{i\vartheta})|\right| d\mu(\vartheta) < +\infty. \tag{12}$$

Как известно, класс N Неванлинна может быть определен как множество функций, представимых в виде отношения двух функций, аналитических и по модулю ограниченных единицей в единичном круге.

В заключении данной статьи будет установлено, что аналогичный факт имеет место и для функций класса N_α $(-1<\alpha<0)$. А именно, будет доказана

Теорема 3. *Класс* N_α $(-1<\alpha<0)$ *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$F(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \quad (|z|<1),$$

где

$$|f_k(z)|\leqslant 1 \quad (|z|<1), \quad f_k(z)\in N_\alpha \quad (k=1,2).$$

Ниже будет приведено доказательство этих и еще трех вспомогательных теорем, имеющих также и самостоятельный интерес.

3°. Пусть функция $F(z)$ мероморфна в круге $|z|<1$, $\{a_\mu\}$ и $\{b_\nu\}$ суть соответственно последовательности ее нулей и полюсов, отличных от $z=0$ и пронумерованных в порядке неубывания их модулей

$$0<|a_1|\leqslant|a_2|\leqslant\cdots\leqslant|a_\mu|\leqslant\cdots,$$

$$0<|b_1|\leqslant|b_2|\leqslant\cdots\leqslant|b_\nu|\leqslant\cdots,$$

причем каждый нуль или полюс мы записываем столько раз, какова его кратность.

Известно [2], [3], что если $F(z)\in N_\alpha$ $(-1<\alpha<+\infty)$, то ряды

$$\sum_{(\mu)}(1-|a_\mu|)^{1+\alpha}, \quad \sum_{(\nu)}(1-|b_\nu|)^{1+\alpha}$$

сходятся.

С другой стороны, известно также, что для любой последовательности комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1)$, подчиненной лишь условию

$$\sum_{k=1}^\infty(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty, \tag{13}$$

существует функция из класса N_α с нулями, лежащими лишь в точках $\{z_k\}_1^\infty$. Важным примером такой функции служит бесконечное произведение

$$B_\alpha(z;z_k)=\prod_{k=1}^\infty\left(1-\frac{z}{z_k}\right)e^{-W_\alpha(z;z_k)}, \tag{14}$$

где для $|z|<1$ и $|\zeta|<1$

$$W_\alpha(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^1\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-$$

$$-\sum_{k=1}^\infty\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx-\bar\zeta^k\int_{|\zeta|}^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k. \tag{15}$$

Эта функция, введенная и изученная в работах [2], [3], служит важным элементом в параметрическом представлении класса N_α.

Доказательство теорем 1 и 2, во-первых, существенно опирается на представления класса N_α и функции $B_\alpha(z; z_k)$. Приведем соответствующие теоремы.

Теорема А [2], [3]. *Класс* N_α $(-1<\alpha<\infty)$ *совпадает с множеством функций* $F(z)$, *допускающих представление вида*

$$F(z)=cz^{\lambda}\frac{B_\alpha(z; a_\nu)}{B_\alpha(z; b_\nu)}\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\}, \tag{16}$$

где c — *постоянная*, $\lambda\geqq 0$ — *целое число*,

$$S_\alpha(z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{1}{(1-z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{17}$$

а $\psi(\vartheta)$ — *произвольная вещественная функция ограниченной вариации на* $[0, 2\pi]$.

Известно, что при $\alpha=0$ функция $B_\alpha(z; z_k)$ совпадает с обычным произведением Бляшке

$$B_0(z; z_k)=B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-\bar{z}_k z}\cdot\frac{|z_k|}{z}. \tag{18}$$

В заметке [5] было установлено одно новое важное свойство функции Бляшке, заключающееся в том, что при $-1<\alpha<0$ условия (13) и $B(z)\in N_\alpha$ эквивалентны.

Отсюда и из теоремы А непосредственно следовала

Теорема В. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условию* (13), *где* $-1<\alpha<0$, *то имеет место представление*

$$B_\alpha(z; z_k)=B_0(z; z_k)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\omega(\vartheta)\right\}, \tag{19}$$

где $\omega(\vartheta)$ — *некоторая функция ограниченной вариации на* $[0, 2\pi]$.

4°. Доказательство теорем 1 и 2 опирается также на приводимые ниже две теоремы Салема-Зигмунда [4] и Карлесона [6].

Теорема С [4]. *Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\,k^{\beta}<+\infty\quad(0<\beta<1),$$

то тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos k\vartheta+b_k\sin k\vartheta$$

может расходиться только на множестве, у которого $(1-\beta)$-*емкость равна нулю.*

Отметим, что еще раньше, до появления работ [2], [3], Карлесоном [6] были введены другие классы мероморфных функций, входящие в класс N. Эти классы существенно отличны от классов N_α $(-1<\alpha<0)$ и определяются следующим образом.

Для данного значения β $(0<\beta<1)$ в класс T_β входят мероморфные в круге $|z|<1$ функции $w(z)$, для которых

$$T_\beta(w)=\int_0^1 (1-r)^{-\beta} A(r; w)\,dr<+\infty, \tag{20}$$

где

$$A(r; w)=\iint_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\,dxdy \tag{21}$$

—известная функция Альфорса-Симидзу.

В своем исследовании Карлесон установил, что *для каждой функции* $F(z)\in T_\beta$ *утверждение теоремы* 1 *справедливо, притом для значения* $\gamma=1-\beta$.

В случае, когда $F(z)$ — ограниченная функция из класса T_β $(0<\beta<1)$, это утверждение есть простое следствие теоремы В Салема-Зигмунда.

Наметим его простое доказательство, приведя его в виде отдельной теоремы.

Теорема D. *Если* $w(z)$ — *ограниченная функция из класса* T_β $(0<\beta<1)$, *то предел*

$$w(e^{i\theta})=\lim_{r\to 1-0} w(re^{i\theta})$$

существует почти всюду на $[0, 2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0, 2\pi]$, *у которого* $(1-\beta)$*-емкость равна нулю.*

В самом деле, пусть

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (|z|<1)$$

и

$$\sup_{|z|<1} |w(z)|=w_0<+\infty.$$

Тогда имеем оценку

$$A(r; w)\geqslant(1+w_0^2)^{-2}\int_0^r\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{\infty} ka_k r^{k-1} e^{ik\varphi}\right|^2 rdrd\varphi=$$

$$=2\pi(1+w_0^2)^{-2}\int_0^r\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^2|a_k|^2 r^{2k-1}\right\}dr=\pi(1+w_0^2)^{-2}\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k}.$$

Поскольку $w(z)\in T_\beta$, то отсюда следует далее, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2\int_0^1(1-r)^{-\beta} r^{2k}\,dr\leqslant\frac{(1+w_0^2)^2}{\pi}\int_0^1(1-r)^{-\beta} A(r; w)\,dr<+\infty. \tag{22}$$

Воспользовавшись формулой Стирлинга, получим

$$\lim_{k\to\infty} k^{1-\beta}\int_0^1(1-r)^{-\beta} r^{2k}\,dr=\frac{\Gamma(1-\beta)}{2^{1-\beta}},$$

откуда и из неравенства (22) следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{\beta} |a_k|^2 < +\infty. \tag{23}$$

На основании теоремы C из условия (23) заключаем, что тригонометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\theta}$$

может расходиться только на множестве $E \subset [0, 2\pi]$, у которого $(1-\beta)$-емкость равна нулю.

Остается заметить еще, что по теореме Абеля будем иметь

$$\lim_{r\to 1-0} w(re^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{ik\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi] - E$$

и, тем самым, завершить доказательство.

Отметим, наконец, что позже, в работе [7], было анонсировано, что при определенных условиях *для любой функции* $F(z) \in T_\beta$ *справедливо утверждение теоремы 2 для значения* $\gamma = 1 - \beta$.

5°. Рассмотрим обобщенный интеграл типа Коши-Стильтеса

$$K_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\theta)}{(1-e^{-i\theta} z)^{1+\alpha}} \quad (-1 < \alpha < 0), \tag{24}$$

где $\psi(\theta)$ — произвольная вещественная функция ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$.

Установим теорему о граничных свойствах интегралов вида $K_\alpha(z)$, играющую важную роль в дальнейшем.

Теорема 4. *Интеграл* $K_\alpha(z)$ *имеет радиальные пределы*

$$K_\alpha(e^{i\varphi}) = \lim_{r\to 1-0} K_\alpha(re^{i\varphi}), \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

всюду на $[0, 2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E \subset [0, 2\pi]$, γ-*емкость которого (где* γ *— любое число из интервала* $1+\alpha < \gamma < 1$) *равна нулю.*

Доказательство. Ввиду свойств а) и б) множеств нулевой γ-емкости, очевидно, достаточно установить справедливость теоремы для того случая, когда $\psi(\theta)$ — неубывающая функция. В таком предположении введем в рассмотрение функцию

$$w(z) = \exp\{-K_\alpha(z)\} \quad (|z| < 1). \tag{25}$$

Поскольку

$$\operatorname{Re}\frac{1}{(1-e^{-i\theta} z)^{1+\alpha}} \geqslant \frac{(1-r)^{1+\alpha}}{|1-re^{i(\varphi-\theta)}|^{2+2\alpha}} \quad (z = re^{i\varphi}) \tag{26}$$

и $d\psi(\theta) \geqslant 0$, то, обозначая

$$\omega_\alpha(re^{i\varphi}) = \frac{(1-r)^{1+\alpha}}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\psi(\theta)}{|1-re^{i(\varphi-\theta)}|^{2+2\alpha}}, \tag{27}$$

из (24), (25) и (26) приходим к оценке

$$|w(re^{i\varphi})|^2 \leqslant \exp\{-\omega_\alpha(re^{i\varphi})\} \leqslant 1. \tag{28}$$

Таким образом, $w(z)$ — аналитична и ограничена по модулю единицей в круге $|z|<1$.

Но из (25) и (24) имеем также

$$|w'(re^{i\varphi})| \leqslant |w(re^{i\varphi})| \frac{1+\alpha}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{2+\alpha}}.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Буняковского, в силу (27) и (28), приходим к следующей оценке:

$$|w'(re^{i\varphi})|^2 \leqslant \omega_\alpha(re^{i\varphi})\, e^{-\omega_\alpha(re^{i\varphi})}(1-r)^{-1-\alpha} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^2}. \tag{29}$$

Наконец, замечая, что вообще $\omega e^{-\omega} \leqslant e^{-1}$ $(0 \leqslant \omega < +\infty)$, из (29) получим неравенство

$$\frac{|w'(re^{i\varphi})|}{(1+|w(re^{i\varphi})|^2)^2} \leqslant e^{-1}(1-r)^{-1-\alpha} \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\psi(\vartheta)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^2}. \tag{30}$$

Проинтегрируем теперь (30) по φ по промежутку $[0, 2\pi]$, учитывая, что

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^2} = 2\pi(1-r^2)^{-1} \leqslant 2\pi(1-r)^{-1}.$$

В результате получим

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{|w'(re^{i\varphi})|^2}{(1+|w(re^{i\varphi})|^2)^2}\, d\varphi < \frac{2\pi e^{-1}}{(1-r)^{2+\alpha}} \int\limits_0^{2\pi} d\psi(\vartheta)$$

и поэтому

$$A(r; w) = \iint\limits_{|z|<r} \frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\, ds \leqslant c_\alpha \frac{r}{(1-r)^{1+\alpha}}, \tag{31}$$

где

$$c_\alpha = \frac{2\pi e^{-1}}{1+\alpha} \int\limits_0^{2\pi} d\psi(\vartheta) > 0.$$

Из оценки (31) заключаем, что для любого γ $(1+\alpha<\gamma<1)$

$$\int\limits_0^1 A(r; w)(1-r)^{\gamma-1}\, dr < \infty.$$

Итак, $w(z)$ — ограниченная функция из класса $T_{1-\gamma}$, следовательно, согласно теореме D, утверждение теоремы справедливо для нее и, тем самым, для функции

$$K_\alpha(z) = -\log w(z).$$

6°. Докажем теперь теорему о граничных свойствах функции $B_\alpha(z; z_k)$.

Теорема 5*. *Пусть последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0<|z_k|\leqslant\leqslant|z_{k+1}|<1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty \quad (-1<\alpha<0). \tag{32}$$

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) *для функции* $B(z)=B_0(z;z_k)$ *предел*

$$B(e^{i\theta})=\lim_{r\to1-0}B(re^{i\theta}),\ \theta\in[0,2\pi]$$

существует всюду на $[0,2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0,2\pi]$, *у которого* $(1+\alpha)$*-емкость равна нулю;*

б) *для функции* $B_\alpha(z;z_k)$ *предел*

$$B_\alpha(e^{i\theta};z_k)=\lim_{r\to1-0}B_\alpha(re^{i\theta};z_k),\ \theta\in[0,2\pi]$$

существует всюду на $[0,2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E\subset[0,2\pi]$, γ*-емкость которого (где* γ *— любое число из интервала* $1+\alpha<\gamma<1$*) равна нулю.*

Доказательство. а) Обозначим через $n(t)$ — числовую функцию последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, т. е. число точек z_k, лежащих в круге $|z|\leqslant t$ $(0<t<1)$.

Заметим, что для любого r $(0<r<1)$

$$\sum_{|z_k|<r}(1-|z_k|)^{1+\alpha}=\int_0^r(1-t)^{1+\alpha}\,dn(t)=$$

$$=(1-r)^{1+\alpha}\,n(r)+(1+\alpha)\int_0^r(1-t)^\alpha\,n(t)\,dt.$$

Отсюда, ввиду условия (32) и того, что $-1<\alpha<0$, следуют неравенства

$$(1-r)^\alpha\int_r^1\frac{n(t)}{t}\,dt<\int_r^1\frac{n(t)}{t}(1-t)^\alpha\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{r}\int_0^1(1-t)^\alpha\,n(t)\,dt\leqslant2\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty \tag{33}$$

для любого r $\left(\frac{1}{2}\leqslant r<1\right)$.

---

* Утверждение а) этой теоремы было установлено Карлесоном [6]. Основным моментом в его доказательстве служило обнаружение того факта, что при условии (31) $B(z)\in T_{-\alpha}$. Поскольку на этот же факт опирается также частично и доказательство утверждения б), то для удобства читателя мы сочли уместным изложить их в одной общей теореме.

Итак

$$\lim_{r\to 1-0}\sup\,(1-r)^{\alpha}\int_{r}^{1}\frac{n(t)}{t}\,dt<+\infty. \tag{33'}$$

Далее, как известно, для любой мероморфной в круге $|z|<1$ функции $w(z)$ имеет место формула Альфорса-Симидзу [1]

$$\frac{1}{\pi}\frac{A(r;w)}{r}=\frac{n(r;w)}{r}+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\log\left(1+|w(re^{i\vartheta})|^{2}\right)d\vartheta, \tag{34}$$

где функция $A(r;w)$ определяется из (31), а $n(r;w)$ -- число полюсов $w(z)$ в круге $|z|\leqslant r$ с учетом их кратности.

Применим теперь формулу (34) к функции $w(z)=B^{-1}(z)$, заметив, что тогда $n(r;B^{-1})=n(r)$. Будем иметь

$$\frac{1}{\pi}\frac{A(r;B^{-1})}{r}=\frac{n(r)}{r}+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\log\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{|B(re^{i\varphi})|^{2}}\,d\varphi=$$

$$=\frac{n(r)}{r}+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dr}\int_{0}^{2\pi}\log\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{2|B(re^{i\varphi})|^{2}}\,d\varphi. \tag{34'}$$

Теперь проинтегрируем тождество (34′) по промежутку (0,1) с весом $(1-r)^{\alpha}$, в результате чего получим

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{A(r;B^{-1})}{r}(1-r)^{\alpha}\,dr=\int_{0}^{1}\frac{n(r)}{r}(1-r)^{\alpha}\,dr+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}(1-r)^{\alpha}\,dr\int_{0}^{2\pi}\log\left\{\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{2|B(re^{i\varphi})|^{2}}\right\}d\varphi=U_{1}(\alpha)+U_{2}(\alpha). \tag{35}$$

Заметим, что, ввиду конечности третьего из интегралов, стоящих в неравенствах (33), очевидно, что $U_{1}(\alpha)<+\infty$.

Заметим далее, что в круге $|z|<1$

$$1\leqslant\frac{1+|B(z)|^{2}}{2|B(z)|^{2}}\leqslant\frac{1}{|B(z)|^{2}}, \tag{36}$$

а также, что по формуле Енсена

$$\int_{0}^{2\pi}\log\frac{1}{|B(re^{i\varphi})|}\,d\varphi=2\pi\int_{r}^{1}\frac{n(t)}{t}\,dt\quad(0<r<1). \tag{37}$$

Теперь уже, учитывая неравенства (36) и формулу (37), заключаем, что

$$U_{2}(\alpha;r)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{r}(1-r)^{\alpha}\,dr\int_{0}^{2\pi}\log\left\{\frac{1+|B(re^{i\varphi})|^{2}}{2|B(re^{i\varphi})|^{2}}\right\}d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1-r)^{\alpha}\int_{r}^{1}\frac{n(t)}{t}\,dt\qquad(0<r<1)$$

и, следовательно, в силу (33'), имеем $U_2(\alpha) < +\infty$.

Таким образом, интеграл, стоящий в левой части тождества (35), также имеет конечную величину.

Наконец, легко видеть, что $A(r; B^{-1}) = A(r; B)$ и поэтому имеем также

$$\int_0^1 \frac{A(r; B)}{r} (1-r)^\alpha \, dr < +\infty,$$

т. е. $B(z) \in T_{-\alpha}$. Поскольку функция $B(z)$ ограничена в круге $|z| < 1$, то утверждение о ее граничных свойствах непосредственно следует из теоремы D.

Дополнительно отметим еще, что, ввиду свойств множеств с нулевой γ-емкостью, очевидно, что утверждение а) остается в силе, если заменить в нем $(1+\alpha)$-емкость любой γ-емкостью, где $1+\alpha \leqslant \gamma < 1$.

б) Поскольку

$$S_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \left\{ \frac{2}{(1-z)^{1+\alpha}} - 1 \right\},$$

то, согласно теореме 3, любая функция вида

$$\exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta} z) \, d\omega(\vartheta) \right\}$$

обладает требуемым свойством, т. е. ее радиальные пределы существуют везде на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $E \subset [0, 2\pi]$, $\operatorname{cap}_\gamma E = 0$, где γ — любое число из промежутка $1+\alpha < \gamma < 1$.

Выше уже было установлено, что тем же свойством обладает и функция Бляшке $B(z) \equiv B_0(z; z_k)$.

Поэтому, пользуясь представлением функции $B_\alpha(z; z_k)$ $(-1 < \alpha < 0)$,

$$B_\alpha(z; z_k) = B_0(z; z_k) \exp\left\{ \int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta} z) \, d\omega(\vartheta) \right\}, \tag{38}$$

даваемым теоремой B, мы завершаем доказательство теоремы.

Отметим, наконец, что теорема Карлесона 4 (а) все же не содержит первоначального результата Фростмана, впервые рассмотревшего произведения Бляшке с нулями $\{z_k\}_1^\infty$, подчиненными условию (32).

Приведем формулировку теоремы Фростмана [8], поскольку она нам будет нужна ниже.

Теорема E. *При условии* (32) *будем иметь*

$$\lim_{r \to 1-0} |B(re^{i\vartheta})| = 1, \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

всюду на $[0, 2\pi]$, *кроме, быть может, некоторого исключительного множества* $E \subset [0, 2\pi]$, *у которого* $(1+\alpha)$-*емкость** *равна нулю.*

* и, следовательно, любая γ — емкость, если только $1+\alpha < \gamma < 1$.

7°. Переходим к доказательству основных теорем.

Доказательство теоремы 1. Оно непосредственно следует из теорем А, 4 и 5.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим функцию класса N_α $(-1<\alpha<0)$

$$\Phi(z)=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\,d\psi(\vartheta)\right\} \quad (|z|<1), \tag{39}$$

где $\psi(\vartheta)$ — произвольная вещественная функция с конечной вариацией на $[0, 2\pi]$.

Согласно теореме 1 для данного значения γ $(1+\alpha<\gamma<1)$ пределы

$$\Phi(e^{i\varphi})=\lim_{r\to 1-0}\Phi(re^{i\varphi}),\quad \varphi\in[0,2\pi] \tag{40}$$

существуют всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества γ-емкости нуль.

Далее из (39), принимая во внимание значение (38) ядра $S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)$, мы получим неравенство

$$|\log|\Phi(re^{i\varphi})||\leqslant\frac{1}{2\pi\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2\pi}|d\psi(\vartheta)|+\frac{1}{\pi\Gamma(1+\alpha)}\int_0^{2\pi}\frac{|d\psi(\vartheta)|}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{1+\alpha}}.$$

Поскольку $0<1+\alpha<\gamma<1$, то отсюда приходим к оценке

$$|\log|\Phi(re^{i\varphi})||\leqslant c_0+c_1\int_0^{2\pi}\frac{|d\psi(\vartheta)|}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{\gamma}}\quad (0<r<1,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi), \tag{41}$$

где $c_0>0$ и $c_1>0$ — постоянные, не зависящие от φ и r.

Пусть, далее, при том же γ $(1+\alpha<\gamma<1)$, $E\subset[0, 2\pi]$ представляет собою множество, γ-емкость которого положительна. Это означает, что найдется такая мера $\mu\prec E$, для которой интегралы

$$V_\gamma(\vartheta;r)=\int_0^{2\pi}\frac{d\mu(\varphi)}{|1-re^{i(\varphi-\vartheta)}|^{\gamma}}$$

удовлетворяют условию

$$\sup_{0<\vartheta<1}\left\{\max_{0<\vartheta<2\pi}V_\gamma(\vartheta;r)\right\}=V_\gamma(\mu)<+\infty. \tag{42}$$

Теперь, пользуясь оценкой (41), ввиду (42), будем иметь

$$\int_E|\log|\Phi(re^{i\varphi})||d\mu(\varphi)\leqslant c_0+c_1V_\gamma(\mu)\int_0^{2\pi}|d\psi(\vartheta)|=c_2<+\infty\quad(0<r<1), \tag{43}$$

где $c_2>0$, очевидно, от r не зависит.

Наконец, принимая во внимание, что предел (40) может не существовать лишь на множестве нулевой γ-емкости, путем перехода к пределу в неравенстве (43), в силу теоремы Фату [9], заключаем, что

$$\int_E |\log|\Phi(e^{i\varphi})||\,d\mu(\varphi) < +\infty. \tag{44}$$

Итак, для любой функции $\Phi(z)$ вида (39) утверждение нашей теоремы справедливо.

Установим теперь справедливость теоремы для любой функции $B_\alpha(z; z_k)$.

Для этого, во-первых, заметим, что, согласно теореме E, при условии

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty$$

граничные значения $B(e^{i\varphi})$ функции Бляшке $B(z)$ удовлетворяют условию

$$\log|B(e^{i\varphi})| = 0 \tag{45}$$

всюду на $[0, 2\pi]$, кроме, быть может, некоторого исключительного множества $(1+\alpha)$-емкости нуль. Очевидно, что такое множество имеет нулевую γ-емкость при любом $1+\alpha \leqslant \gamma < 1$.

Следовательно, если $E \subset [0, 2\pi]$ — любое множество положительной γ-емкости $(1+\alpha < \gamma < 1)$ и $\mu \prec E$, то, ввиду характера тождества (45), будем иметь

$$\int_E |\log|B(e^{i\varphi})||\,d\mu(\varphi) = 0. \tag{46}$$

Обратимся далее к представлению (38) функции $B_\alpha(z; z_k)$, обладающей радиальными пределами

$$B_\alpha(e^{i\varphi}; z_k) = \lim_{r\to 1-0} B_\alpha(re^{i\varphi}; z_k)$$

всюду на $[0, 2\pi]$, за исключением, быть может, некоторого исключительного множества нулевой γ-емкости $(1+\alpha < \gamma < 1)$. Тогда, ввиду (46) и свойства (44) функций вида $\Phi(z)$, будем иметь

$$\int_E |\log|B_\alpha(e^{i\varphi}; z_k)||\,d\mu(\varphi) < +\infty. \tag{47}$$

Наконец, полное доказательство теоремы следует из утверждений (44) и (47), если принять во внимание представление функций класса N_α $(-1 < \alpha < 0)$, даваемое теоремой А.

8°. Чтобы установить теорему 3, предварительно докажем теорему.

Теорема 6. *Если последовательность* $\{z_k\}_1^\infty$ $(0 < |z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha} < +\infty \quad (-1 < \alpha < 0),$$

то справедливо неравенство

$$|B_\alpha(z; z_k)| \leqslant |B_0(z; z_k)| \quad (|z|<1). \tag{48}$$

Доказательство. Заметим сначала, что, в силу определения (14) функции $B_\alpha(z; z_k)$, достаточно установить справедливость неравенства

$$U_\alpha(z; \zeta) \equiv \mathrm{Re}\,\{W_\alpha(z; \zeta) - W_0(z; \zeta)\} > 0 \tag{49}$$

для любых значений $|z|<1$, $|\zeta|<1$.

Но из разложения (15) функции $W_\alpha(z; \zeta)$ мы имеем

$$U(z; \zeta) = \frac{a_0(\rho)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\rho)\, |\omega|^k \cos(k \arg \omega), \tag{50}$$

где $\rho = |\zeta|$, $\omega = z\bar{\zeta}$ $(|\omega| = \rho\, |z| < 1)$,

$$a_0(\rho) = 2\int_\rho^1 [(1-x)^\alpha - 1]\, \frac{dx}{x} \geqslant 0, \tag{51}$$

$$a_k(\rho) = \frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)} \left\{ \rho^{-2k} \int_0^\rho (1-x)^\alpha x^{k-1}\, dx - \right.$$

$$\left. - \int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1}\, dx \right\} \quad (k = 1, 2, 3, \cdots). \tag{52}$$

Заметим далее, что достаточно установить выпуклость последовательности $\{a_k(\rho)\}_0^\infty$, т. е. справедливость неравенств

$$\varphi_k(\rho) \equiv \Delta^2 a_k(\rho) = a_k(\rho) - 2a_{k+1}(\rho) + a_{k+2}(\rho) \geqslant 0 \quad (0<\rho<1,\ k>0), \tag{53'}$$

чтобы требуемое неравенство (49) непосредственно следовало из известной теоремы о неотрицательных тригонометрических рядах [4].

Докажем первое из условий (53), т. е. установим, что

$$\varphi_0(\rho) \equiv \Delta^2 a_0(\rho) = a_0(\rho) - 2a_1(\rho) + a_2(\rho) > 0 \quad (0<\rho<1). \tag{53''}$$

С этой целью, пользуясь формулами (51) и (52), запишем функцию $\varphi_0(\rho)$ в раскрытом виде

$$\varphi_0(\rho) = 2\int_\rho^1 [(1-x)^\alpha - 1]\, \frac{dx}{x} -$$

$$-2\left\{1 - (1+\alpha)\left[\rho^{-2}\int_0^\rho (1-x)^\alpha\, dx - \int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-2}\, dx\right]\right\} +$$

$$+\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha)\left[\rho^{-4}\int_0^\rho (1-x)^\alpha x\, dx - \int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-3}\, dx\right]\right\}. \tag{53''}$$

Заметим сперва, что

$$\varphi_0'(\rho) = -2\left[(1-\rho)^\alpha - 1\right]\rho^{-1} + 4(1+\alpha)\left[-\rho^{-3}\int_0^\rho (1-x)^\alpha\,dx + \rho^{-2}(1-\rho)^\alpha\right] -$$

$$-(1+\alpha)(2+\alpha)\left[-2\rho^{-5}\int_0^\rho (1-x)^\alpha\,x\,dx + \rho^{-3}(1-\rho)^\alpha\right]. \qquad (54)$$

Далее, имеем также представления

$$(1-\rho)^\alpha - 1 = \int_0^\rho d(1-x)^\alpha, \quad \int_0^\rho (1-x)^\alpha\,dx = \rho(1-\rho)^\alpha - \int_0^\rho x\,d(1-x)^\alpha,$$

$$2\int_0^\rho (1-x)^\alpha\,x\,dx = \rho^2(1-\rho)^\alpha - \int_0^\rho x^2\,d(1-x)^\alpha,$$

с учетом которых формула (54) запишется в виде

$$\frac{\rho}{2}\varphi_0'(\rho) = -\int_0^\rho \left\{1 - 2(1+\alpha)x\rho^{-2} + \frac{(1+\alpha)(2+\alpha)}{2}x^2\rho^{-4}\right\} d(1-x)^\alpha. \qquad (55)$$

Поскольку при $-1 < \alpha < 0$ $(1+\alpha)^2 < \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha)$,

то

$$1 - 2(1+\alpha)x\rho^{-2} + \frac{1}{2}(1+\alpha)(2+\alpha)x^2\rho^{-4} > \left[1-(1+\alpha)x\rho^{-2}\right]^2 \geqslant 0.$$

Наконец, заметив, что при $-1 < \alpha < 0$ функция $(1-x)^\alpha$ возрастает на $[0, 1)$, из (55) заключаем, что $\varphi_0'(\rho) \leqslant 0$. Это значит, что на интервале $[0,1]$ функция $\varphi_0(\rho)$ — убывающая и, в частности,

$$\varphi_0(\rho) \geqslant \varphi_0(1) \quad (0 < \rho \leqslant 1).$$

Остается заметить, что, как следует простой проверкой из (53″), $\varphi_0(1) = 0$. Итак, утверждение (53) для $k=0$ справедливо.

Чтобы доказать неравенства (53) для $k \geqslant 1$, запишем сначала функции $a_k(\rho)$ $(k \geqslant 1)$ в виде

$$a_k(\rho) = b_k(\rho) + d_k(\rho),$$

где

$$b_k(\rho) = \frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\rho^{-2k}\int_0^{\rho^2} (1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx, \qquad (56)$$

$$d_k(\rho) = \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left\{\int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx - \rho^{-2k}\int_{\rho^2}^\rho (1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx\right\}. \qquad (57)$$

Теперь путем проведения непосредственных оценок установим выпуклость обеих последовательностей $\{b_k(\rho)\}_1^\infty$ и $\{d_k(\rho)\}_1^\infty$ в отдельности.

Во-первых, отметим, что эти последовательности неотрицательны.

В самом деле, из (56) имеем

$$b_k'(\rho) = -2\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\rho^{-1}(1-\rho^2)^\alpha - k\rho^{-2k-1}\int_0^{\rho^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx\right\} \leqslant 0, \tag{58}$$

поскольку, как легко видеть, при $-1<\alpha<0$

$$\int_0^{\rho^2}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx \leqslant \frac{\rho^{2k}}{k}(1-\rho^2)^\alpha \quad (0<\rho<1).$$

Из (58) следует, что

$$b_k(\rho) > b_k(1)=0,\ k=1,2,\cdots, \tag{59}$$

причем равенства $b_k(1)=0$ $(k\geqslant 1)$ непосредственно проверяются.

Чтобы установить неравенства

$$d_k(\rho) > d_k(1) = 0 \quad (k=1,2,\cdots) \tag{60}$$

достаточно заметить, что при $-1<\alpha<0$

$$\int_\rho^1 (1-x)^\alpha x^{-k-1}dx \geqslant (1-\rho)^\alpha\frac{\rho^{-k}-1}{k} \qquad (0<\rho<1),$$

$$\rho^{-2k}\int_{\rho^2}^{\rho}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx \leqslant \rho^{-2k}(1-\rho)^\alpha\int_{\rho^2}^{\rho}x^{k-1}\,dx =$$

$$=(1-\rho)^\alpha\frac{\rho^{-k}-1}{k} \qquad (0<\rho<1).$$

Теперь, записав формулу (56) в виде

$$b_k(\rho) = \frac{1}{k} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1(1-\rho^2x)^\alpha x^{k-1}\,dx,$$

мы имеем

$$\Delta^2 b_k(\rho) = \frac{2}{k(k+1)(k+2)} - \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1(1-\rho^2x)^\alpha x^{k-1}\left\{1-\right.$$

$$\left.-\frac{2(1+\alpha+k)}{1+k}x + \frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\right\}dx. \tag{61}$$

Но, как легко видеть, при $-1<\alpha<0$ для любого y

$$1-\frac{2(1+\alpha+k)}{1+k}y + \frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}y^2 > \left(1-\frac{1+\alpha+k}{1+k}y\right)^2 > 0. \tag{62}$$

Поскольку при $-1<\alpha<0$ выражение $(1-\rho^2 x)^\alpha$ $(0\leqslant\rho\leqslant 1,$ $0<x<1)$ является возрастающей функцией от ρ, то из (61) и (62) получим неравенство

$$\Delta^2 b_k(\rho)\geqslant\Delta^2 b_k(1)=\frac{1}{k(k+1)(k+2)}-$$

$$-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\int_0^1(1-x)^\alpha x^{k-1}\left\{1-\frac{2(1+\alpha+k)}{1+k}x+\right.$$

$$\left.+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\right\}dx.$$

Остается заметить, что стоящее в правой части этого неравенства выражение равно нулю. Это можно проверить непосредственным подсчетом.

Итак, отсюда и из (59) получим при $0<\rho<1$

$$b_k(\rho)\geqslant 0,\ \Delta^2 b_k(\rho)\geqslant 0\ (k=1,2,3,\cdots). \tag{63}$$

Далее, из (57) имеем

$$\Delta^2 d_k(\rho)=\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left\{\int_\rho^1(1-x)^\alpha x^{-k-1}\left[1-\right.\right.$$

$$\left.-2\cdot\frac{1+\alpha+k}{1+k}x^{-1}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^{-2}\right]dx-$$

$$\left.-\rho^{-2k}\int_{\rho^2}^{\rho}(1-x)^\alpha x^{k-1}\left[1-2\frac{1+\alpha+k}{1+k}x\rho^{-2}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\rho^{-4}\right]dx\right\}. \tag{64}$$

Но выражения, стоящие в подынтегральных квадратных скобках справа в (64), очевидно, неотрицательны, в силу неравенства (62). Поэтому, учитывая еще, что функция $(1-x)^\alpha$ при $-1<\alpha<0$ не убывает на (0,1), из (64) получим следующую оценку:

$$\Delta^2 d_k(\rho)\geqslant(1-\rho)^\alpha\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\times$$

$$\times\left\{\int_\rho^1 x^{-k-1}\left[1-2\frac{1+\alpha+k}{1+k}x^{-1}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^{-2}\right]dx-\right.$$

$$\left.-\rho^{-2k}\int_{\rho^2}^{\rho}x^{k-1}\left[1-2\frac{1+\alpha+k}{1+k}x\rho^{-2}+\frac{(1+\alpha+k)(2+\alpha+k)}{(1+k)(2+k)}x^2\rho^{-4}\right]dx\right\}.$$

С помощью простого подсчета можно установить, что выражение, стоящее в правой части этого неравенства, равно нулю.

Отсюда и из (60) получим при $0<\rho\leqslant 1$

$$\operatorname{Re} S_\alpha(z) > 0 \quad (|z| < 1),$$

будем иметь $|\Phi_k(z)| \leqslant 1$ $(|z| < 1)$, $(k=1, 2)$. Из сказанного вытекает, что

$$|f_k^*(z)| \leqslant 1 \quad (|z| < 1), \quad f_k^*(z) \in N_\alpha \quad (k = 1, 2),$$

откуда и из (67′) легко следует представление (67)—(68) теоремы.

Отметим, что результаты этой статьи, за исключением теорем 2 и 3, были вкратце анонсированы в [10].

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступило 26. IV.1967

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ և Վ. Ս. ԶԱՔԱՐՅԱՆ

N_α ԴԱՍԻ ՄԵՐՈՄՈՐՖ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԵԶՐԱՅԻՆ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

Ամփոփում

Հոդվածում ապացուցված է հետևյալ թեորեմը՝

Եթե $F(z) \in N_\alpha$ $(-1 < \alpha < 0)$ *ապա*

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\vartheta})$$

գոյություն ունի կամայական $\vartheta \in [0, 2\pi]$ *համար, բացի գուցե մի բացառիկ* $E \subset [0, 2\pi]$ *բազմությունից, որի* γ*-ունակությունը (որտեղ* γ*-ն կամայական թիվ է* $1 + \alpha < \gamma < 1$ *ինտերվալից) հավասար է զերոյի։*

Ապացուցված է նաև, որ եթե $-1 < \alpha < 0$, *ապա* N_α *դասի ամեն մի ֆունկցիա կարելի է ներկայացնել որպես* N_α *դասի երկու սահմանափակ ֆունկցիաների հարաբերություն։*

M. M. DŽRBAŠHIAN AND V. S. ZAKARIAN

THE BOUNDARY PROPERTIES OF MEROMORPH FUNCTIONS, BELONGIHG TO N_α

Summary

The following proposition is proved in the paper: If $F(z)$ belongs to N_α $(-1 < \alpha < 0)$ then the limit

$$F(e^{i\vartheta}) = \lim_{r \to 1-0} F(re^{i\vartheta})$$

existes for every $\vartheta \in [0, 2\pi]$ may be with exception of a set $E \subset [0, 2\pi]$, whose ϑ — capacity (ϑ is arbitrary from the interval $1 + \alpha < \vartheta < 1$) is equal zero.

Also it is proved that every function from the class N_α, $-1 < \alpha < 0$ may be presented as a ratio of two bounded functions, belonging to N_α.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. Неванлинна.* Однозначные аналитические функции, Гостехиздат, М., 1957.
2. *М. М. Джрбашян.* О параметрическом представлении некоторых общих классов мероморфных функций в единичном круге, ДАН СССР, 157, № 5, 1964, 1024—1027.
3. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., Наука, 1966, гл. IX.
4. *Н. Бари.* Тригонометрические ряды, М., 1961.
5. *М. М. Джрбашян.* Об одном свойстве функции Бляшке, ДАН СССР, 175, № 5, 1967, 981—984.
6. *L. Carleson.* On a class of meromorphic functions and its associated exceptional sets, Thesis, University of Uppsala, 1950.
7. *В. С. Захарян.* Об одной теореме единственности, ДАН СССР, 154, № 5, 1964, 1019—1022.
8. *O. Frostman.* Sur les produits de Blaschke, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar, vol. 12, 1942, 169—182.
9. *С. Сакс.* Теория интеграла, М., 1949.
10. *М. М. Джрбашян* и *В. С. Захарян.* О граничных свойствах мероморфных функций класса N_α, ДАН СССР, 173, № 6, 1967, 1247—1250.