ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 4, 1967 Математика

В. Б. ДЫБИН

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ВИНЕРА-ХОПФА В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ СО СТЕПЕННЫМ ХАРАКТЕРОМ ПОВЕДЕНИЯ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Интегральное уравнение типа свертки

$$(I-K)\,\varphi\equiv\varphi(t)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=\psi(t),\ \ t>0 \tag{1}$$

исследовалось при различных предположениях относительно характера поведения его коэффициентов на ∞. Основные результаты в этом направлении для невырожденного* случая уравнения (1) можно найти в работах [1]—[2].

Вырожденный случай уравнения (1), когда символ его в отдельных точках вещественной оси обращается в нуль, также изучался рядом авторов (см. [3]—[7]).

В предположениях дополнительной гладкости символа (гельдеровости или дифференцируемости) в отмеченных работах получены результаты о числе и виде решений однородного уравнения (1) в пространствах L_1, L_2. Кроме того, предложены различные ограничения на правую часть ψ, достаточные для разрешимости неоднородного уравнения (1) в указанных классах.

Ниже уравнение (1), а также ему транспонированное уравнение рассматриваются в пространствах $E_+\{\pm n\}$ $(n\geqslant 0)$, $E_+\{\pm\infty\}$.

Через $E_+\{\pm n\}$ обозначено банахово пространство функций $f(t)$, удовлетворяющих условию $(t+i)^{\mp n}f(t)\in E_+$, где E_+ одно из пространств:

$$L_{p+}\,(p>1),\ C_+^0\subset C_+\subset M_+^u\subset M_+^c\subset M_+.$$

Норма в пространстве $E_+\{\pm n\}$ вводится следующим образом (см. [1], § 6): $\|f\|_{E_+\{\pm n\}}=\|(t+i)^{\mp n}f(t)\|_{E_+}$.

Через $E_+\{-\infty\}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_+\{-n\}$ обозначено полное счетно-нормированное пространство со следующим набором попарно сравнимых и согласованных норм: $\|f\|_n=\|f\|_{E_+\{-n\}}$ $(n=0,\,1,\,2,\cdots)$.

---

* Под невырожденным понимается тот случай, когда символ уравнения $1-K(x)=1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(t)\,e^{ixt}\,dt\neq 0$ всюду на вещественной оси x.

Наконец, под $E_+\{\infty\}$ понимается пространство $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} E_+\{n\}$, где $E_+\{n\}=L_{p+}\{n\}$ $(p>1)$ или $M_+\{n\}$. Сходимость в пространстве $E_+\{\infty\}$ вводится слабая.

Предполагается, что ядро свертки $k(t)$ принадлежит пространствам $L_1\{-n\}$ или $L_1\{-\infty\}$.

В связи с этим заметим, что наряду с общим для этих двух случаев обозначением $I-K$ для оператора (1) там, где это существенно, будут также употребляться обозначения $I-K_n$ и $I-K_\infty$.

В указанных предположениях интеграл, входящий в левую часть уравнения (1), определен для любой функции $\varphi(s)\in E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$, существует почти для всех $t>0$ и является ограниченным оператором в пространстве $E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$.

Характер вырождения символа оператора $I-K$ задается следующим представлением:

$$1-K(x)=\frac{A(x)}{(x-i)^\alpha}\cdot(1-\tilde{K}(x))\quad(-\infty\leqslant x\leqslant\infty),\tag{2}$$

где $A(x)=\prod\limits_{k=1}^{r}(x-a_k)^{\alpha_k}$, причем все a_k — вещественные, α_k — целые положительные числа, $\sum\limits_{k=1}^{r}\alpha_k=\alpha$; $\tilde{K}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(t)\,e^{ixt}\,dt$,

где $\tilde{K}(t)\in L_1\{-n\}$ или $L_1\{-\infty\}$, $1-\tilde{K}(x)\neq0$ для всех вещественных значений x.

§ 1. Оператор $I-K$ в пространствах $E_+\{\pm n\}$, $E_+\{\pm\infty\}$. Невырожденный случай

Ввиду того, что метод исследования уравнения (1) в предположениях (2) состоит в сведении его к соответствующему уравнению Винера-Хопфа с невырожденным символом, приведем краткую сводку результатов для последнего случая. Все они могут быть получены тем же путем, что и в работе [1], и частично вытекают из результатов заметки [8].

Пусть $n\geqslant0$, $1-K(x)\neq0$ $(-\infty<x<\infty)$ и $\varkappa=-Ind\,(1-K(x))=$
$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\ln(1-K(x))$. Тогда имеют место следующие теоремы:

Теорема 1.1. *Если функция* $k(t)\in L_1\{-n\}$ $(L_1\{-\infty\})$ и $\varkappa=0$, *то для любой правой части* $\psi(t)\in E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$ *уравнение* (1) *имеет одно и только одно решение* $\varphi(t)\in E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$ *вида*

$$\varphi(t)=\psi(t)+\int\limits_0^{\infty}\gamma(t,s)\,\psi(s)\,ds,\ t>0,\tag{3}$$

где $\gamma(t, s)$ $(0 \leqslant t, s \leqslant \infty)$ — *некоторое ядро, обладающее тем свойством, что* $\gamma(t, 0)$ *и* $\gamma(0, t)$ *принадлежат* $L_{1+}\{-n\}$ $(L_{1+}\{-\infty\})$ *и*

$$\gamma(t, s) = \gamma(t-s, 0) + \gamma(0, s-t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \gamma(t-r, 0)\,\gamma(0, s-r)\,dr$$

$$(0 \leqslant t, s \leqslant \infty). \tag{4}$$

Теорема 1.2. *Если функция* $k(t) \in L_1\{-n\}$ $(L_1\{-\infty\})$ *и* $\varkappa > 0$, *то подпространство решений в* $E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$ *однородного уравнения* (1) $\varkappa$ — *мерно, одно и то же для всех пространств* $E_+\{\pm n\}$ $(E_+(\pm\infty\})$ *и имеет в качестве базиса следующую систему функций:*

$$\varphi_j(t) = \tilde{\varphi}_j(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \chi_+(t-s)\,\tilde{\varphi}_j(s)\,ds, \; t > 0; \; (j = 1, 2, \cdots, \varkappa), \tag{5}$$

где $\chi_+(t) \in L_1\{-n\}$ $(L_1\{-\infty\})$ *равна нулю при* $t < 0$ *и целиком определяется ядром* $k(t)$, *а* $\tilde{\varphi}_j(t) = t^{j-1}e^{-t}$, $t > 0$.

Неоднородное уравнение (1) *разрешимо при любой правой части* $\psi(t) \in E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$. *Одно из его возможных решений* $\varphi(t) \in E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$ *имеет вид* (3), (4).

Теорема 1.3. *Если функция* $k(t) \in L_1\{-n\}$ $(L_1\{-\infty\})$ *и* $\varkappa < 0$, *то однородное уравнение* (1) *ни в одном из пространств* $E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$ *не имеет решений, отличных от тривиального* $\varphi \equiv 0$.

Неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть $\psi(t) \in E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$ *удовлетворяет следующим* $|\varkappa|$ *условиям:*

$$\int_0^\infty \psi(t)\,\varphi_j(t)\,dt = 0 \;\; (j = 1, 2, \cdots, |\varkappa|), \tag{6}$$

где $\{\varphi_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, |\varkappa|)$ — *базис подпространства решений однородного уравнения, транспонированного уравнению (1). При выполнении условий (6) решение* $\varphi(t) \in E_+\{\pm n\}$ $(E_+\{\pm\infty\})$ *уравнения (1) единственно и может быть получено по формуле (3), где* $\gamma(t, s)$ — *любая из резольвент транспонированного уравнения*

$$(I - K^\tau) f \equiv f(s) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty k(t-s)\,f(t)\,dt = g(s), \; s > 0. \tag{7}$$

Из теорем 1.1—1.3 следует, что во всех пространствах $L_{p+}\{\pm n\}$ $(n \geqslant 0)$ и $L_{p+}\{-\infty\}$ $(p \geqslant 1)$ оператор $I - K$ является нетеровым, т. е. линейным нормально разрешимым оператором с конечной d-характеристикой $(\varkappa, 0)$ или $(0, -\varkappa)$. Индекс его в каждом из указанных пространств один и тот же, не зависит от n и равен $\varkappa$.

Транспонированный оператор $I - K^\tau$ обладает аналогичными свойствами, его индекс $\varkappa_\tau = -\varkappa$. Поэтому для оператора $I - K$ в любом из пространств $L_{p+}\{\pm n\}$, $L_{p+}\{-\infty\}$ $(p \geqslant 1)$ справедливо утверждение, которое обычно называется третьей теоремой Нетера (см. [9], § 53 или [10], § 23): разность числа нулей оператора $I-K$ в этом пространстве и числа нулей оператора $I-K^{*}$ в том же пространстве равна индексу оператора $I-K$.

Нетеров оператор, обладающий этим свойством, будем называть нормальным нетеровым оператором* или, для краткости, просто нормальным оператором. Многие из распространенных нетеровых операторов (сингулярное интегральное уравнение с невырождающимся на контуре символом, системы таких уравнений, дискретный и матричный аналоги уравнения Винера-Хопфа; парное интегральное уравнение в свертках и др.) являются нормальными. Тем не менее ниже будет показано, что существуют нетеровы операторы, не обладающие свойством нормальности.

§ 2. Оператор $I-K$ в пространствах $E_{+}\{-n\}$, $E_{+}\{-\infty\}$. Вырожденный случай

Рассмотрим оператор $I-K_n$, действующий из $L_{p+}\{-n\}$ в $L_{p+}\{-n\}$. Если условия (2) выполняются, то он не является нетеровым. Ниже будет показано, что можно найти такое подпространство $DL_{p+}\{-n\}$ пространства $L_{p+}\{-n\}$, что оператор $I-K_n$, действующий из $L_{p+}\{-n\}$ в $DL_{p+}\{-n\}$, нетеров.

Определение. Пусть T—линейный оператор, действующий из банахова** пространства B_1 в банахово пространство B_2. Пусть существует такой линейный оператор N, действующий из B_2 в B_1, что оператор $\widetilde{T}=NT$ нормален в пространстве B_1. Тогда будем говорить, что у оператора T в пространстве B_1 существует левый нормализатор N.

Если оператор N имеет линейный левый обратный, действующий из B_1 в B_2, тогда будем говорить, что у оператора T в пространстве B_1 существует левый равносильный нормализатор N.

Теорема 2.1. *Пусть* $k(t)\in L_1\{-n\}$ $(n\geqslant 0)$ *и выполняются условия (2). Тогда найдется такое подпространство* $DL_{p+}\{-n\}$ *пространства* $L_{p+}\{-n\}$, *что оператор* $I-K_n$, действующий из $L_{p+}\{-n\}$ в $DL_{p+}\{-n\}$ $(p\geqslant 1)$, *имеет в пространстве* $L_{p+}\{-n\}$ *левый равносильный нормализатор.*

Доказательство. В частном случае, когда

$$1-K(x)=\frac{x-a_k}{x-i}\,(1-\widetilde{K}(x)),$$

искомое пространство $DL_{p+}\{-n\}$ строится следующим образом.

Пусть оператор N_k определяется равенством

* Обращаем внимание на различие между нормальным нетеровым оператором и оператором нормально разрешимым.

** Или полного счетно-нормированного пространства.

$$N_k \psi \equiv \psi(t) + i(a_k - i) e^{-ia_k t} \int_t^\infty e^{ia_k s} \psi(s)\, ds, \quad t > 0, \tag{8}$$

где интеграл понимается в обычном смысле. Через $DL_{p+}\{-n\}$ обозначим пространство функций $\psi(t) \in L_{p+}\{-n\}$, для которых $N_k\psi$ существует и принадлежит $L_{p+}\{-n\}$. Если в пространстве $DL_{p+}\{-n\}$ ввести норму

$$\|\psi\|_{DL_{p+}\{-n\}} = \|N_k \psi\|_{L_{p+}\{-n\}},$$

то оператор N_k становится ограниченным оператором, действующим из $DL_{p+}\{-n\}$ в $L_{p+}\{-n\}$.

Покажем, что оператор N_k является левым равносильным нормализатором в $L_{p+}\{-n\}$ для оператора $I - K_n$.

Действительно, пусть $\varphi \in L_{p+}\{-n\}$. Так как $1 - K(x) = \left(1 + \frac{i - a_k}{x - i}\right)(1 - \tilde{K}(x))$, то оператор $I - K_n$ можно представить в следующей форме:

$$(I - K_n)\varphi \equiv \tilde{\varphi}(t) + i(a_k - i) \int_{-\infty}^{\infty} e_-^{t-s} \tilde{\varphi}(s)\, ds, \quad t > 0,$$

где

$$\tilde{\varphi}(t) = (I - \tilde{K}_n)\varphi \equiv \varphi(t) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \tilde{K}(t - \tau)\varphi(\tau)\, d\tau,$$

а

$$e_-^{t-s} = \begin{cases} 0, & t > s, \\ -e^{t-s}, & t < s. \end{cases}$$

Очевидно $\tilde{\varphi}(t) \in L_{p+}\{-n\}$. Покажем, что $N_k(I - K_n) = I - \tilde{K}_n$. В самом деле

$$N_k(I - K_n)\varphi \equiv (I - K_n)\varphi + i(a_k - i) e^{-ia_k t} \left[\int_t^\infty e^{ia_k s} \tilde{\varphi}(s)\, ds - \right.$$

$$\left. - i(a_k - i) \int_t^\infty e^{(ia_k + 1)s}\, ds \int_s^\infty e^{-\tau} \tilde{\varphi}(\tau)\, d\tau \right] = (I - K_n)\varphi +$$

$$+ i(a_k - i) e^{-ia_k t} \int_t^\infty e^{ia_k s} \tilde{\varphi}(s)\, ds -$$

$$- \frac{[i(a_k - i)]^2 e^{-ia_k t}}{ia_k + 1} \left\{ \left[e^{(ia_k + 1)s} \int_s^\infty e^{-\tau} \tilde{\varphi}(\tau)\, d\tau \right]_{s=t}^{s=\infty} + \int_t^\infty e^{ia_k s} \tilde{\varphi}(s)\, ds \right\} =$$

$$= (I - K_n)\varphi - i(a_k - i) \int_0^\infty e_-^{t-s} \tilde{\varphi}(s)\, ds = \tilde{\varphi}(t), \quad t > 0.$$

Законность интегрирования по частям оправдывается тем, что функции $e^{i(a_k-i)s}$ и $\int\limits_s^\infty e^{-\tau}\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau$ абсолютно непрерывны на любом отрезке $(0, N)$. Мы воспользовались также соотношением

$$\lim_{s\to\infty} e^s \int\limits_s^\infty e^{-\tau}\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau = 0.$$

Справедливость его становится очевидной, если учесть, что при $s>0$ непрерывная функция

$$e^s \int\limits_s^\infty e^{-\tau}\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau = -\int\limits_0^\infty e^{s-\tau}\tilde{\varphi}(\tau)\,d\tau \in L_{p+}\{-n\}.$$

Если положить $\tilde{K}(t)\equiv 0$, то из приведенных выше выкладок следует, что оператор $I-K_n$ с символом $1-K(x)=\dfrac{x-a_k}{x-i}$ является правым обратным для оператора N_k. Так как $\|N_k\psi\|=\|\psi\|$, то у оператора N_k существует линейный левый обратный, который совпадает с только что указанным оператором $I-K_n$. Следовательно, пространство $DL_{p+}\{-n\}$ полно по введенной выше норме, а оператор N_k является левым равносильным нормализатором в пространстве $L_{p+}\{-n\}$ для оператора $I-K_n$.

В общих предположениях (2) подпространство $DL_{p+}\{-n\}$ определяется оператором

$$N=\prod_{k=1}^{r}(N_k)^{\varkappa_k}, \tag{9}$$

где N_k — оператор вида (8). Элементами пространства $DL_{p+}\{-n\}$ являются функции $\psi\in L_{p+}\{-n\}$, удовлетворяющие требованию $N\psi\in L_{p+}\{-n\}$. Норма в пространстве $DL_{p+}\{-n\}$ вводится соотношением

$$\|\psi\|_{DL_{p+}\{-n\}}=\|N\psi\|_{L_{p+}\{-n\}}.$$

Сам же оператор N является левым равносильным нормализатором в пространстве $L_{p+}\{-n\}$ для оператора $I-K_n$.

Теорема доказана.

Оператор N вида (9), (8) можно рассматривать как ограниченный оператор, действующий в пространстве $E_+\{-\infty\}$. Это следует из справедливости неравенств

$$\|N\varphi\|_k \leqslant \text{const}\,\|\varphi\|_{k+\alpha}\quad (k=0,1,2\cdots),$$

где $\varphi\in E_+\{-\infty\}$.

Поэтому для оператора $I-K_\infty$, действующего в пространстве $L_{p+}\{-\infty\}$ может быть сформулирован следующий аналог теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть $k(t)\in L_1\{-\infty\}$ и выполняются условия (2). Тогда оператор N вида (9), (8) является левым равносильным*

нормализатором в пространстве $L_{p+}\{-\infty\}$ $(p>1)$ *для оператор*
$I-K_{<}$.

Доказательство теоремы 2.2 в основных своих пунктах совпадает с приведенным выше доказательством теоремы 2.1.

Замечание 1. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что соотношение $N(I-K)=I-\widetilde{K}$ выполняется не только в пространствах $L_{p+}\{-n\}$ $(n\geqslant 0)$ или $L_{p+}\{-\infty\}$, но и в любом из пространств C^0_+ (при $n=0$), $E_+\{-n\}$ (при $n>0$) или $E_+\{-\infty\}$. При этом в каждом из указанных пространств уравнения $(I-K)\varphi=0$ и $(I-\widetilde{K})\widetilde{\varphi}=0$ имеют одинаковые решения.

Из теорем 2.1, 2.2 и теорем предыдущего параграфа вытекает ряд следствий о разрешимости уравнения (2) в пространствах $E_+\{-n\}$ $E_+\{-\infty\}$.

Обозначим через $\widetilde{\varkappa}=-Ind\,[1-\widetilde{K}(x)]$ индекс нормального оператора $I-\widetilde{K}$, полученного путем левой равносильной нормализации оператора $I-K$.

Теорема 2.3. *Пусть* $k(t)\in L_1\{-n\}$ $(n\geqslant 0)$ *или* $L_1\{-\infty\}$ *и выполняются условия (2). Тогда подпространство решений однородного уравнения (1) в классах* L_{p+} $(p\geqslant 1)$, C^0_+ *(при* $n=0$*)*, $E_+\{-n\}$ *(при* $n>0$*)*, $E_+(-\infty)$ *конечномерно и при* $\widetilde{\varkappa}>0$ *имеет в качестве базиса систему функций вида (5). Если* $\widetilde{\varkappa}\leqslant 0$, *то оно не имеет в указанных классах решений, отличных от тривиального* $\varphi\equiv 0$.

Вторым следствием теоремы 2.1 является критерий разрешимости неоднородного уравнения (1) в пространствах $E_+\{-n\}$ $(n\geqslant 0)$*.

Теорема 2.4. *Пусть* $k(t)\in L_1\{-n\}$ $(n\geqslant 0)$ *и выполняются условия (2). Для того чтобы неоднородное уравнение (1), где* $\psi(t)\in E_+\{-n\}$ *имело решение* $\varphi(t)\in E_+\{-n\}$ *необходимы и достаточны следующие условия:*

а) $\psi(t)\in DE_+\{-n\}$,

б) *если* $\widetilde{\varkappa}<0$, *то*

$$\int\limits_{\gamma}^{\infty} N\psi(t)\widetilde{f}_j(t)\,dt=0 \quad (j=1,2,\cdots,|\widetilde{\varkappa}|), \tag{10}$$

где оператор N *имеет вид (9), (8), а* $\{\widetilde{f}_j\}$ $(j=1,2,\cdots,|\widetilde{\varkappa}|)$ — *базис подпространства нулей оператора* $I-K^{\tau}$, *транспонированного нормализованному с* $E_+\{-n\}$ *оператору* $I-\widetilde{K}$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in E_+\{-n\}$ — решение уравнения

* Здесь и всюду ниже в § 2 под $E_+\{0\}$ понимаются лишь пространства L_{p+} $(p\geqslant 1)$, C^0_+.

(1). Очевидно $N(I-K)\varphi\in E_+\{-n\}$, откуда следует необходимость условия а).

Пусть условие а) теоремы выполнено. Подействовав на уравнение (1) оператором N, получим равносильное нормальное уравнение $(I-\tilde{K})\varphi=N\psi$. Остается заметить, что по теореме 1.3 необходимые и достаточные условия разрешимости в $E_+\{-n\}$ этого уравнения имеют вид (10).

В случае пространства $E_+\{-\infty\}$ критерий разрешимости неоднородного уравнения (1) имеет более простую форму.

Теорема 2.5. *Пусть $k(t)\in L_1\{-\infty\}$ и выполняются условия (2). Если $\varkappa\geqslant 0$, то неоднородное уравнение (1) разрешимо при любой правой части $\psi\in E_+\{-\infty\}$. Для того чтобы оно имело решение $\varphi\in E_+\{-\infty\}$ при $\tilde{\varkappa}<0$ необходимо и достаточно выполнения условий (10).*

§ 3. Оператор $I-K^\tau$ в пространствах $E_+\{n\}$, $E_+\{\infty\}$. Вырожденный случай

Стремясь упростить форму изложения, будем рассматривать в классах, растущих на ∞ функций вместо оператора $I-K$ транспонированный ему оператор $I-K^\tau$, что принципиального значения не имеет.

Ввиду условий (2) характер вырождения символа оператора $I-K^\tau$ определяется следующим представлением:

$$1-K(\cdot-x)=\frac{A_\tau(x)}{(x+i)^\alpha}\,(1-\tilde{K}(-x))\quad(-\infty\leqslant x\leqslant\infty),$$

где $A_\tau(x)=\prod\limits_{k=1}^{r}(x+a_k)^{\alpha_k}$. Очевидно $1-\tilde{K}(-x)\neq 0$ на всей вещественной оси $\varkappa_\tau=-\operatorname{Ind}[1-\tilde{K}(-x)]=\operatorname{Ind}[1-\tilde{K}(x)]=-\tilde{\varkappa}$.

Введем понятие правого равносильного нормализатора.

Определение. Пусть T линейный оператор, действующий из банахова пространства B_1 в банахово пространство B_2.

Пусть существует такой линейный оператор N, действующий из пространства B_3 в B_1 $(B_3\subset B_1)$, что оператор TN, определенный на элементах пространства B_3, продолжим до нормального в B_1 оператора $\tilde{T}$. Тогда будем говорить, что у оператора T в пространстве B_1 существует правый нормализатор N.

Если при этом у оператора N существует линейный правый обратный, действующий из B_1 в B_3, тогда будем говорить, что оператор N является правым равносильным нормализатором в пространстве B_1 для оператора T.

Будем рассматривать оператор $I-K_n^\tau$ в пространстве $L_{p+}\{n\}$ $(p\geqslant 1)$. Если условия (2) выполнены, то он не является нетеровым. Оператор $I-K_n^\tau$ допускает правую равносильную нормализацию в пространстве

$L_{p+}\{n\}$. Позже с использованием этого факта будет показано, как нужно сузить область значений оператора $I-K_n^-$, чтобы он стал нетеровым.

Теорема 3.1. *Пусть* $k(t)\in L_1\{-n\}$ $(n>0)$ *и выполняются условия* (2). *Тогда найдется оператор* N^-, *действующий из некоторого подпространства* $\widetilde{L}_{p+}\{n\}$ *пространства* $L_{p+}\{n\}$ *в* $L_{p+}\{n\}$, *являющийся правым равносильным нормализатором в пространстве* $L_{p+}\{n\}$ *для оператора* $I-K_n^-$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.2. Рассмотрим частный случай, когда

$$1-K(-x)=\frac{x+a_k}{x+i}(1-\widetilde{K}(-x))=\left(1-\frac{i-a_k}{x+i}\right)(1-\widetilde{K}(-x)).$$

Будем относить к пространству $\widetilde{L}_{p+}\{n\}$ те функции $\widetilde{f}\in L_{p+}\{n\}$, для которых $N_k^-\widetilde{f}\in L_{p+}\{n\}$, где

$$N_k^-\widetilde{f}\equiv\widetilde{f}(t)+i(a_k-i)e^{ia_kt}\int\limits_0^t e^{-ia_k\tau}\widetilde{f}(\tau)\,d\tau,\ t>0. \tag{11}$$

В пространстве $\widetilde{L}_{p+}\{n\}$ можно ввести норму таким образом, чтобы оно стало банаховым*. Оператор N_k^- ограничен по введенной норме. Покажем, что оператор

$$(N_k^-)^{-1}f\equiv f(t)-i(a_k-i)\int\limits_0^\infty e_+^{-t+s}f(s)\,ds,\ t>0, \tag{12}$$

где $e_+^{-t+s}\begin{cases}e^{-t+s}, & t>s,\\ 0, & t<s\end{cases}$ является линейным правым обратным для оператора N_k^-.

Пусть $f\in L_{p+}\{n\}$ $(p\geqslant 1)$. Составим композицию $N_k^-(N_k^-)^{-1}$,

$$N_k^-(N_k^-)^{-1}f\equiv f(t)-i(a_k-i)e^{-t}\int\limits_0^t e^s f(s)\,ds+$$

$$+i(a_k-i)e^{ia_kt}\int\limits_0^t e^{-ia_k\tau}f(\tau)\,d\tau-$$

$$-[i(a_k-i)]^2e^{ia_kt}\int\limits_0^t e^{-ia_k\tau}e^{-\tau}d\tau\int\limits_0^\tau e^s f(s)\,ds=$$

$$=f(t)-i(a_k-i)e^{-t}\int\limits_0^t e^s f(s)\,ds+i(a_k-i)e^{ia_kt}\int\limits_0^t e^{-ia_k\tau}f(\tau)\,d\tau+$$

* Например, $\|f\|_{\widetilde{L}_{p+}\{n\}}=\|N_k^-f\|_{L_{p+}\{n\}}$.

$$+ i(a_k - i)e^{ia_k t}\left[e^{-i(a_k-i)\tau}\int_0^{\tau} e^s f(s)\,ds\right]_{\tau=0}^{\tau=t} -$$

$$- i(a_k - i)\,e^{ia_k t}\int_0^t e^{-ia_k\tau} f(\tau)\,d\tau = f(t),\ t > 0.$$

Таким образом $N_k^{\tau}(N_k^{\tau})^{-1} = I$. Оператор $(N_k^{\tau})^{-1}$ является ограниченным, так как

$$\|(N_k^{\tau})^{-1} f\|_{D L_{p+}\{n\}} = \|N_k^{\tau}(N_k^{\tau})^{-1} f\|_{L_{p+}\{n\}} = \|f\|_{L_{p+}\{n\}}.$$

С другой стороны, у оператора N_k^{τ} существует линейный левый обратный, поэтому оператор (12) является обратным для оператора N_k^{τ}.

Покажем, что оператор N_k^{τ}, действующий из $\widetilde{L}_{p+}\{n\}$ в $L_{p+}\{n\}$, является правым равносильным нормализатором в $L_{p+}\{n\}$ для оператора $I - K_n^{\tau}$.

Для произвольной функции $f \in L_{p+}\{n\}$ оператор $I - K_n^{\tau}$ всегда можно представить в форме

$$(I - K_n^{\tau}) f = (I - \widetilde{K}_n^{\tau})\left[f(t) - i(a_k - i)\int_0^{\infty} e_+^{-t+s} f(s)\,ds\right] =$$

$$= [I - \widetilde{K}_n^{\tau}](N_k^{\tau})^{-1} f,$$

где оператор Винера-Хопфа $I - K_n^{\tau}$ определяется ядром $\widetilde{K}(-t) \in L_1\{-n\}$. Но тогда для любой функции $\widetilde{f} \in \widetilde{L}_{p+}\{n\}$

$$(I - K_n^{\tau})\, N_k^{\tau}\widetilde{f} = [I - \widetilde{K}_n^{\tau}](N_k^{\tau})^{-1}\, N_k^{\tau}\widetilde{f} = [I - \widetilde{K}_n^{\tau}]\,\widetilde{f}.$$

Оператор $I - \widetilde{K}_n^{\tau}$ имеет невырождающийся на вещественной оси символ и является поэтому нормальным оператором, действующим в $L_{p+}\{n\}$. Его можно рассматривать как продолжение оператора $(I - K_n^{\tau})\, N^{\tau}$, определенного в $\widetilde{L}_{p+}\{n\}$, на все пространство $L_{p+}\{n\}$. Откуда и вытекают свойства равносильной нормализации оператора N_k^{τ}.

Остается заметить, что в общем случае искомый оператор N^{τ} имеет вид

$$N^{\tau} = \prod_{k=1}^{r}(N_k^{\tau})^{a_k}, \tag{13}$$

где N_k^{τ} — оператор, определенный равенством (11).

Теорема доказана.

Замечание 2. Легко видеть, что все выкладки, проделанные при доказательстве теоремы 3.1, верны не только тогда, когда

$f \in L_{p+}\{n\}$, но и для всех $f \in E_+\{n\}$ $(n \geqslant 0)$*. Таким образом, в условиях теоремы 3.1 могут быть сформулированы аналогичные результаты, касающиеся свойств оператора $I - K_n^{\tau}$ в любом из пространств $E_+\{n\}$ $(n \geqslant 0)$.

Перейдем к непосредственному исследованию уравнения (7) в пространстве $E_+\{n\}$.

Теорема 3.2. *Пусть* $k(t) \in L_1\{-n\}$ $(n \geqslant 0)$ *и выполняются условия (2), где* $\tilde{\varkappa} = -\tilde{\varkappa}_{\tau} \geqslant 0$. *Тогда однородное уравнение (7) ни в одном из пространств* $E_+\{n\}$ *не имеет решений, отличных от тривиального* $f \equiv 0$.

При $\tilde{\varkappa}_{\tau} < 0$ *неоднородное уравнение (7), где* $g \in E_+\{n\}$ *разрешимо в пространстве* $E_+\{n\}$ *в том и только в том случае, если выполняются условия*

а) $N^{\tau}(I + \tilde{\Gamma}^{\tau})\, g \in E_+\{n\}$;

б) $\int\limits_0^{\infty} g(s)\, \tilde{\varphi}_j(s)\, ds = 0$ $(j = 1, 2, \cdots, |\tilde{\varkappa}_{\tau}|)$,

где N^{τ} — *оператор вида (13), (11); оператор* $I + \tilde{\Gamma}^{\tau}$ *определяется произвольной резольвентой* $\tilde{\gamma}(t, s)$ *нормального оператора* $I - \tilde{K}_n$,

$$(I + \tilde{\Gamma}^{\tau})\, g \equiv g(s) + \int\limits_0^{\infty} \tilde{\gamma}(t, s)\, g(t)\, dt, \quad s > 0;$$

$\{\tilde{\varphi}_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, |\tilde{\varkappa}_{\tau}|)$ — *базис подпространства нулей в* $E_+\{\pm n\}$ *оператора* $I - \tilde{K}_n$.

Если условия а), б) выполнены, то единственное решение уравнения (7) дается формулой

$$f = N^{\tau}(I + \tilde{\Gamma}^{\tau})\, g. \tag{14}$$

Доказательство. Обратимся к нормальному уравнению

$$(I - \tilde{K}_n)\tilde{f} = g. \tag{15}$$

По теореме 1.3 однородное уравнение (15) ни в одном из пространств $E_+\{n\}$, а следовательно, и в $\tilde{E}_+\{n\} \subset E_+\{n\}$** не имеет нетривиальных решений. Поэтому $f \equiv 0$ — единственное решение в $E_+\{n\}$ однородного уравнения (7).

Условия б) доказываемой теоремы (см. условия (б) теоремы 1.3) необходимы и достаточны для разрешимости неоднородного урав

* Здесь и всюду ниже в § 3 под $E_+\{0\}$ понимаются пространства $C_+ \subset M_+^C \subset M_+^u \subset M_+$.

** Пространства $\tilde{E}_+\{n\}$ вводятся подобно пространствам $\tilde{L}_{p+}\{n\}$.

нения (15) в пространстве $E_+\{n\}$. Пусть они выполняются. Тогда единственное решение его $\tilde{f}\in E_+\{n\}$ имеет вид $\tilde{f}=(I+\tilde{\Gamma}^-)g$. Необходимое и достаточное условие того, чтобы $\tilde{f}\in \tilde{E}_+\{n\}$ состоит теперь в том, чтобы $N^-(I+\tilde{\Gamma}^-)g\in E_+\{n\}$. При выполнении последнего единственное решение $f=N^-\tilde{f}$ неоднородного уравнения (7) имеет вид (14).

Теорема доказана.

В случае оператора $I-K_\infty$ имеет место следующая

Теорема 3.3. *Пусть* $k(t)\in L_1\{-\infty\}$ *и выполняются условия (2), где* $\tilde{\varkappa}=-\tilde{\varkappa}_-\geqslant 0$. *Тогда ни в одном из пространств* $E_+\{\infty\}$ *неоднородное уравнение (7) не имеет нетривиальных решений.*

Если $\tilde{\varkappa}_-<0$, *то неоднородное уравнение (7) разрешимо для тех и только тех правых частей* $g\in E_+\{\infty\}$, *которые ортогональны подпространству нулей в* $E_+\{\infty\}$ *оператора* $I-K_\infty$.

Оператор N^- вида (13), (11) является ограниченным в пространстве $E_+\{\infty\}$, так как элементарный нормализатор N_k^- переводит функции из пространства $E_+\{n\}=M_+\{n\}$, $L_{p+}\{n\}$ $(p>1)$ в элементы пространства $E_+\{n+1\}$. В случае пространства $M_+\{n\}$ этот факт вытекает из обычных простейших оценок. Если же $E_+\{n\}=L_{p+}\{n\}$ $(p>1)$, то он является следствием свойств интеграла Харди-Литтльвуда ([11], § 9.9).

Поэтому какова бы ни была резольвента нормального оператора $I-\tilde{K}_\infty$ условия а) теоремы 3.2 выполняются автоматически для любой правой части $g\in E_+\{\infty\}$ уравнения (7).

Прежде чем перейти к случаю $\tilde{\varkappa}_->0$ введем ряд обозначений.

Пусть $\mu=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant r}\alpha_k$, тогда

$$\mu^E=\begin{cases}\mu+1 & \text{для } E_+\{n\}=L_+(n),\\ \mu & \text{для } E_+\{n\}=L_{p+}\{n\}\quad (p>1),\quad \overset{\circ}{C}_+\{n\},\\ \mu-1 & \text{для остальных } E_+\{n\}.\end{cases}$$

Под $\vartheta_k^E(n)$ $(k=1,2,\cdots,r)$ будем понимать следующие целочисленные функции аргумента $n\geqslant 0$: для $E_+\{n\}=L_+\{n\}$

$$\vartheta_k^E(n)=\begin{cases}\alpha_k-n+1, & \text{если } \alpha_k-n+1>0,\\ 0\quad , & \text{если } \alpha_k-n+1\leqslant 0,\end{cases}$$

для $E_+\{n\}=L_{p+}\{n\}$ $(p>1)$, $\overset{\circ}{C}_+\{n\}$

$$\vartheta_k^E(n)=\begin{cases}\alpha_k-n, & \text{если } \alpha_k-n>0,\\ 0\quad , & \text{если } \alpha_k-n\leqslant 0,\end{cases}$$

для остальных пространств $E_+\{n\}$

$$\vartheta_k^E(n)=\begin{cases} a_k-n-1, & \text{если } a_k-n-1>0,\\ 0 & , \text{если } a_k-n-1\leqslant 0.\end{cases}$$

Наконец, через $\vartheta^E(n)$ обозначим $\vartheta^E(n)=\sum_{k=1}^{r}\vartheta_k^E(n)$.

Теорема 3.4. *Пусть $k(t)\in L_1\{-n\}$ $(n\geqslant 0)$ и выполняются условия (2), где $\widetilde{\varkappa}=-\widetilde{\varkappa}_\tau<0$. Тогда при $\mu^E\leqslant n$ подпространство решений в $E_+\{n\}$ однородного уравнения (7) $\widetilde{\varkappa}_\tau$-мерно. В противном случае ($\mu^E>n$) размерность указанного подпространства равна*

$$\begin{cases}\widetilde{\varkappa}_\tau-\vartheta^E(n), & \textit{если } \widetilde{\varkappa}_\tau-\vartheta^E(n)>0,\\ 0 & , \textit{если } \widetilde{\varkappa}_\tau-\vartheta^E(n)\leqslant 0.\end{cases}$$

Если $\widetilde{\varkappa}_\tau\geqslant 0$, то неоднородное уравнение (7) разрешимо в пространстве $E_+\{n\}$, когда свободный член его g удовлетворяет условию $N^\tau(I+\widetilde{\Gamma}^\tau)g\in E_+\{n\}$, где оператор $I+\widetilde{\Gamma}^\tau$ определяется любой резольвентой ядра $\widetilde{k}(-t)\in L_1\{-n\}$, порождающего нормальный оператор $I-\widetilde{K}_n^\tau$.

Доказательство. Пусть $g\equiv 0$, тогда уравнение (15) имеет в пространстве $E_+\{n\}$ $\widetilde{\varkappa}_\tau$ линейно независимых решений. Его общее решение $\widetilde{f}$ можно представить в форме $\widetilde{f}=\sum_{j=1}^{\widetilde{\varkappa}_\tau}c_j\varphi_j$, где $\{\varphi_j\}$ $(j=1,2,\cdots,\widetilde{\varkappa}_\tau)$ — функции вида (5), а c_j — произвольные постоянные.

Условие $N^\tau\widetilde{f}\in E_+\{n\}$ определяет принадлежность решения $\widetilde{f}$ однородного уравнения (15) пространству $E_+\{n\}$. Можно показать, что требование $N^\tau\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{\varkappa}_\tau}c_j\varphi_j\right)\in E_+\{n\}$ равносильно условию

$$N^\tau\left(\sum_{j=1}^{\widetilde{\varkappa}_\tau}c_j\widetilde{\varphi}_j\right)\in E_+\{n\},\ \text{где}\ \widetilde{\varphi}_j(t)=t^{j-1}e^{-t},\ t>0\ (j=1,2,\cdots,\widetilde{\varkappa}_\tau).$$

Пусть $f_{lk}(t)=t^{l-1}e^{la_kt}$, $t>0$, $(l=1,2,\cdots;\ 1\leqslant k\leqslant r)$.

Предполагая, что $1\leqslant m,\ k\leqslant r$ $(m\neq k)$, $1\leqslant j\leqslant\widetilde{\varkappa}_\tau$, $p>1$, укажем следующие легко проверяемые свойства оператора N^τ:

а) $N_k^\tau\widetilde{\varphi}_j\equiv\sum_{s=1}^{j}A_s\widetilde{\varphi}_s+B_{lk}f_{lk}\in M_+\{0\}\cap L_{p+}\{1\}\cap L_+\{2\};\cap\overset{\circ}{C}_+\{1\}$;

б) $(\overset{\frown}{N_k^{\tau}})^{\alpha_k}\tilde{\varphi}_j = \sum_{s=1}^{j} C_s \tilde{\varphi}_s + \sum_{l=1}^{\alpha_k} D_{lk} f_{lk} \in M_+ \{\alpha_k - 1\} \cap L_{p+} \{\alpha_k\} \cap L_+ \{\alpha_k + 1\} \cap$

$$\cap C_+^0 \{\alpha_k\};$$

в) $N_m^{\tau} N_k^{\tau} \tilde{\varphi}_j = \sum_{s=1}^{j} F_s \tilde{\varphi}_s + H_{1m} f_{1m} + H_{1k} f_{1k} \in M_+ \{0\} \cap L_{p+} \{1\} \cap L_+ \{2\} \cap$

$$\cap C_+^0 \{1\};$$

г) $N_m^{\tau} (N_k^{\tau})^{\alpha_k} \tilde{\varphi}_j = \sum_{s=1}^{j} G_s \tilde{\varphi}_s + \sum_{l=1}^{\alpha_k} R_{lk} f_{lk} + R_{lm} f_{1m} \in M_+ \{\alpha_k - 1\} \cap$

$$\cap L_{p+} \{\alpha_k\} \cap L_+ \{\alpha_k + 1\} \cap \overset{\circ}{C}_+ \{\alpha_k\},$$

где постоянные A, B, C, D, F, G, H, R могут быть определены полностью.

Из этих свойств вытекает, что

$$N^{\tau} \tilde{\varphi}_j = \sum_{s=1}^{j} U_{js} \tilde{\varphi}_s + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\alpha_k} V_{jlk} f_{lk} \in E_+ \{\mu^E\}.$$

Поэтому

$$N^{\tau}\left(\sum_{j=1}^{\tilde{\varkappa}_{\tau}} c_j \tilde{\varphi}_j\right) = \sum_{s=1}^{\tilde{\varkappa}_{\tau}} U_s \tilde{\varphi}_s + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\alpha_k} V_{lk} f_{lk} \in E_+ \{\mu^E\},$$

где

$$U_s = \sum_{j=1}^{\tilde{\varkappa}_{\tau}} c_j U_{js}, \quad V_{lk} = \sum_{j=1}^{\tilde{\varkappa}_{\tau}} c_j V_{jlk}.$$

Пусть теперь $n \geqslant \mu^E$ и, следовательно, $E_+ \{\mu^E\} \subset E_+ \{n\}$. Тогда $N^{\tau}(\sum_{j=1}^{\tilde{\varkappa}_{\tau}} c_j \varphi_j) \in E_+ \{n\}$ для произвольных постоянных c_j $(j = 1, 2, \cdots, \tilde{\varkappa}_{\tau})$. Поэтому однородное уравнение (15) имеет в $\tilde{E}_+ \{n\}$ $\tilde{\varkappa}_{\tau}$-мерное подпространство решений. Откуда следует, что однородное уравнение (7) имеет в пространстве $E_+ \{n\}$ $\tilde{\varkappa}_{\tau}$ линейно независимых решений вида $N^{\tau} \varphi_j$ $(j = 1, 2, \cdots, \tilde{\varkappa}_{\tau})$.

Если $n < \mu^E$, то необходимые и достаточные условия того, чтобы $N^{\tau}\left(\sum_{j=1}^{\tilde{\varkappa}_{\tau}} c_j \varphi_j\right) \in E_+ \{n\}$ состоят в том, чтобы $V_{lk} = \sum_{j=1}^{\tilde{\varkappa}_{\tau}} c_j V_{jlk} = 0$ для всех

$$l > \left| \begin{array}{ll} n, & \text{если } E_+ \{n\} = L_+ \{n\}, \\ n+1, & \text{если } E_+ \{n\} = L_{p+} \{n\} \ (p > 1), \ \overset{\circ}{C}_+ \{n\}, \\ n+2, & \text{для всех остальных } E_+ \{n\}, \end{array} \right.$$

или, что одно и то же, для всех $1 \leqslant k \leqslant r$, для которых $\vartheta_k^E(n) > 0$. Количество этих независимых друг от друга условий равно $\vartheta^E(n)$.

Таким образом, если $\widetilde{\varkappa}_\tau > \vartheta^E(n)$, то размерность подпростран-ства решений в $\widetilde{E}_+\{n\}$ однородного уравнения (15), а вместе с тем и размерность подпространства нулей в $E_+\{n\}$ оператора $I-K_n^\tau$ равна $\widetilde{\varkappa}_\tau - \vartheta^E(n)$. В противном случае $(\widetilde{\varkappa} \leqslant \vartheta^E(n))$ оператор $I-K_n^\tau$ не имеет в пространстве $E_+\{n\}$ нулей, отличных от тривиального $f\equiv 0$.

Неоднородное уравнение (15) разрешимо при любой правой части $g\in E_+\{n\}$, его частное решение имеет вид $\widetilde{f}=(I+\widetilde{\Gamma}^\tau)\,g$.

Отсюда следует, что достаточным условием разрешимости в $E_+\{n\}$ неоднородного уравнения (7) является требование $N^\tau(I+\widetilde{\Gamma}^\tau)\,g\in E_+\{n\}$ для любой резольвенты оператора $I-\widetilde{K}^\tau$.

Теорема доказана.

Наконец сформулируем аналог теоремы 3.4 для оператора $I-K_\infty^\tau$.

Теорема 3.5. *Пусть $k(t)\in L_1\{-\infty\}$ и выполняются условия (2), где $\widetilde{\varkappa}=-\widetilde{\varkappa}_\tau\leqslant 0$. Тогда в любом из пространств $E_+\{\infty\}$ неоднородное уравнение (7) разрешимо при любой правой части $g\in E_+\{\infty\}$, а однородное уравнение имеет $\widetilde{\varkappa}_\tau$ линейно независимых решений, одинаковых в каждом из пространств $E_+\{\infty\}$.*

Более подробно с характером решений однородного уравнения (7) можно познакомиться в работе [12], § 3.

§ 4. О классах нормальной разрешимости оператора $I-K$ в вырожденном случае

Рассмотрим оператор $I-K_\infty$, действующий в пространстве $L_{p+}\{-\infty\}$ $(p\geqslant 1)$, и покажем, что он нетеров.

Действительно, если $\widetilde{\varkappa}<0$ и, следовательно, $\widetilde{\varkappa}_\tau=-\widetilde{\varkappa}>0$, то функции $N^\tau\psi_j\in E_+\{-\infty\}$ $(j=1,2,\cdots,\widetilde{\varkappa}_\tau)$ образуют $\widetilde{\varkappa}_\tau$-мерный базис подпространства нулей в $E_+\{\infty\}$ транспонированного оператора $I-K_\infty^\tau$. Если теперь учесть, что для любой функции

$$\psi(t)\in L_{p+}\{-\infty\}\ (p\geqslant 1)\int_0^\infty N\psi(t)\,\varphi_j(t)\,dt=\int_0^\infty \psi(t)\,N^\tau\psi_j(t)\,dt,$$

то ясно, что условия (10) являются условиями нормальной разрешимости оператора $I-K_\infty$ в пространстве $L_{p+}\{-\infty\}$ $(p\geqslant 1)$. Так как оператор $I-K_\infty$ имеет при этом конечную d-характеристику вида $(\widetilde{\varkappa}, 0)$ или $(0,-\widetilde{\varkappa})$, то верна следующая

Теорема 4.1. *Пусть $k(t)\in L_1\{-\infty\}$ и выполняются условия (2). Тогда оператор $I-K_\infty$, действующий в $L_{p+}\{-\infty\}$ $(p\geqslant 1)$, яв-*

ляется нормально разрешимым. Индекс его в этом пространстве конечен и совпадает с индексом $\tilde{\varkappa} = -\operatorname{Ind}[1-\tilde{K}(x)]$ *нормального оператора* $I-\tilde{K}_{\infty}$, *полученного путем левой равносильной нормализации в* $L_{p+}\{-\infty\}$ *оператора* $I-K_{\infty}$.

Перейдем к рассмотрению оператора $I-K_n$ $(n \geqslant 0)$. Ниже будет показано, что если в качестве области его определения взять пространство $L_{p+}\{-n\}$ $(p \geqslant 1)$, а в качестве области значений—пространство $DL_{p+}\{-n\}$, то он также становится нетеровым.

Сопряженный оператор $(I-K_n)^*$ действует из пространства $(DL_{p+}\{-n\})^*$ в пространство $L^*_{p+}\{-n\} = L_{q+}\{n\}\left(p>1,\ q=\dfrac{p}{p-1}\right)$; если $p=1$, то $L^*_{1+}\{-n\} = M_+\{n\}$.

Структуру пространства $(DL_{p+}\{-n\})^*$ описывает

Теорема 4.2. *Любой линейный ограниченный функционал* f *над пространством* $DL_{p+}\{-n\}$ $(p \geqslant 1)$ *может быть представлен в виде*

$$(f, \varphi) = \int_0^\infty \tilde{f}(t)\, N\varphi(t)\, dt,$$

где $\varphi \in DL_{p+}\{-n\}$, а $\tilde{f} \in L^*_{p+}\{-n\}$.

Доказательство. С помощью оператора N, определенного в пространстве $DL_{p+}\{-n\}$, установим взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $DL_{p+}\{-n\}$ и элементами $\psi = N\varphi \in L_{p+}\{-n\}$, совокупность которых обозначим через E. Ввиду того, что $\|\psi\|_{L_{p+}\{-n\}} = \|\varphi\|_{DL_{p+}\{-n\}}$, пространство $DL_{p+}\{-n\}$ изоморфно линейному замкнутому в $L_{p+}\{-n\}$ множеству E.

Любой линейный функционал f над пространством $DL_{p+}\{-n\}$ порождает линейный функционал $\tilde{f}$ над подпространством E, ограниченный по норме $L_{p+}\{-n\}$,

$$(f, \varphi) = (\tilde{f}, \psi), \text{ где } \psi \in E,$$

$$|(\tilde{f}, \psi)| = |(f, \varphi)| \leqslant c\,\|\varphi\|_{DL_{p+}\{-n\}} = c\,\|\psi\|_{L_{p+}\{-n\}}.$$

По теореме Хана-Банаха функционал $\tilde{f}$ можно продолжить на все пространство $L_{p+}\{-n\}$.

Общий вид линейного функционала над пространством $L_{p+}\{-n\}$ дается формулой

$$(\tilde{f}, \tilde{\psi}) = \int_0^\infty \tilde{f}(t)\, \tilde{\psi}(t)\, dt, \text{ где } \tilde{\psi} \in L_{p+}\{-n\},\ \tilde{f} \in L^*_{p+}\{-n\}.$$

В частности для элементов $\psi \in E \subset L_{p+}\{-n\}$

$$(\tilde{f}, \psi) = (f, \varphi) = \int_0^\infty \tilde{f}(t)\, N\varphi(t)\, dt.$$

Теорема доказана.

Покажем, что если $\widetilde{\varkappa}<0$, то подпространство нулей в $(DL_{p+}\{-n\})^*$ у оператора $(I-K_n)^*$ $\widetilde{\varkappa}_\tau$-мерно $(\widetilde{\varkappa}_\tau=-\widetilde{\varkappa})$. Базисом этого подпространства является следующая система функционалов:

$(f_j,\varphi)=(\widetilde{f}_j, N\varphi)$ $(j=1, 2, \cdots, \widetilde{\varkappa}_\tau)$, где $\varphi\in DL_{p+}\{-n\}$, а $\{\widetilde{f}_j\}$ $(j=1, 2,\cdots, \widetilde{\varkappa}_\tau)$ — базис подпространства нулей в $L^*_{p+}\{-n\}$ нормального оператора $I-\widetilde{K}^*_n$.

В самом деле, ввиду теорем 4.2 и 2.1 уравнение

$$((I-K_n)^* f, \psi)=(f, (I-K_n)\psi)=0$$

можно записать в следующей равносильной форме:

$$(f, (I-K_n)\psi)=(\widetilde{f}, N(I-K_n)\psi)=(\widetilde{f}, (I-\widetilde{K}_n)\psi)=((I-\widetilde{K}^*_n)\widetilde{f}, \psi),$$

где $\psi\in L_{p+}\{-n\}$, $\widetilde{f}\in L^*_{p+}\{-n\}$.

При этом мы воспользовались формулой

$$\int_0^\infty \widetilde{f}(x)\int_0^\infty \widetilde{K}(x-t)\,\psi(t)\,dt\,dx=\int_0^\infty \psi(t)\int_0^\infty \widetilde{K}(x-t)\,\widetilde{f}(x)\,dx\,dt.$$

Таким образом, вопрос об отыскании нулей в $(DL_{p+}\{-n\})^*$ оператора $(I-K_n)^*$ сведен к вопросу о подпространстве нулей в $L^*_{p+}\{-n\}$ нормального оператора $I-\widetilde{K}^*_n$. Обозначим через $\{\widetilde{f}_j\}$ $(j=1,2,\cdots,\widetilde{\varkappa}_\tau)$ базис указанного подпространства. Тогда функционалы

$$(f_j,\varphi)=(\widetilde{f}_j, N\varphi)\quad (j=1, 2, \cdots, \widetilde{\varkappa}_\tau)$$

образуют базис искомого подпространства нулей оператора $(I-K_n)^*$.

Теперь можно сформулировать следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть* $k(t)\in L_1\{-n\}$ $(n\geqslant 0)$ *и выполняются условия* (2). *Тогда оператор* $I-K_n$, *действующий из* $L_{p+}\{-n\}$ *в* $DL_{p+}\{-n\}$ $(p>1)$ *является нормально разрешимым. Индекс его в этом пространстве совпадает с индексом* $\widetilde{\varkappa}=-Ind\,[1-\widetilde{K}(x)]$ *нормального оператора* $I-\widetilde{K}_n$, *полученного путем левой равносильной нормализации в* $L_{p+}\{-n\}$ *оператора* $I-K_n$.

Обозначим через $DL_{p+}\{n\}$ $(n>0)$ пространство функций g, удовлетворяющих условию $N^\tau(I+\widetilde{\Gamma}^\tau)\,g\in L_{p+}\{n\}$, полное по норме

$$\|g\|_{DL_{p+}\{n\}}=\|N^\tau(I+\widetilde{\Gamma}^\tau)\,g\|_{L_{p+}\{n\}}+\|g\|_{L_{p+}\{n\}}.$$

Рассмотрим теперь оператор $I-K^\tau_n$ $(n>0)$ с пространствами $L_{p+}\{n\}$ и $DL_{p+}\{n\}$ в качестве областей определения и значений соответственно. Покажем, что при $\widetilde{\varkappa}_\tau\leqslant 0$ оператор $I-K^\tau_n$ тоже нетеров.

Для этого достаточно убедиться, что в случае, когда $\widetilde{\varkappa}_\tau<0$, сопряженный оператор $(I-K^\tau_n)^*$ имеет в пространстве $(DL_{p+}\{n\})^*$ подпространство решений, совпадающее с подпространством нулей в $E_+ \{-n\}$ оператора $I - \widetilde{K}_n$. Тогда условия (в) теоремы 3.2 являются условиями нормальной разрешимости оператора $I - K_n^{\tau}$.

Оператор $(I - K_n^{\tau})^*$ действует из пространства $(DL_{p+}\{n\})^*$ в пространство $L_{p+}^*\{n\}$. Структуру пространства $(DL_{p+}\{n\})^*$ описывает

Теорема 4.4. *Любой линейный ограниченный функционал над пространством $DL_{p+}\{n\}$ $(p \geqslant 1)$ может быть представлен в виде*

$$(\psi, g) = \int_0^\infty \widetilde{\psi}(t)\, N^{\tau}(I + \widetilde{\Gamma}^{\tau})\, g(t)\, dt, \tag{16}$$

где $g \in DL_{p+}\{n\}$, а $\widetilde{\psi} \in L_{p+}^*\{n\} = L_{q+}\{-n\}$ $\left(p>1,\ q = \frac{p}{p-1}\right)$ или $M_+\{-n\}$ $(p=1)$.

Доказательство теоремы 4.4 существенно не отличается от доказательства теоремы 4.2.

Ввиду теоремы 4.4 однородное уравнение $(I - K_n^{\tau})^*\psi = 0$ можно представить в следующей эквивалентной форме:

$$((I - K_n^{\tau})^*\psi, h) = (\psi, (I - K_n^{\tau})h) = (\widetilde{\psi}, N^{\tau}(I + \widetilde{\Gamma}^{\tau})(I - K_n^{\tau})h) = 0, \tag{17}$$

где $h \in L_{p+}\{n\}$, $\widetilde{\psi} \in L_{p+}^*\{n\}$.

Рассмотрим уравнение

$$N^{\tau}(I + \widetilde{\Gamma}^{\tau})(I - K_n^{\tau})\, h = h_1. \tag{18}$$

Оператор, стоящий в его левой части, в $L_{p+}\{n\}$ ограничен. Пусть $h_1 \in L_{p+}\{n\}$. По предположению $\widetilde{\varkappa}_{\tau} < 0$ и, следовательно, оператор $I - K_n^{\tau}$ не имеет в $L_{p+}\{n\}$ нулей, отличных от тривиального. Поэтому уравнение (18) равносильно уравнению

$$(I - K_n^{\tau})\, h = (I - K_n^{\tau})\, h_1 = g.$$

Последнее уравнение разрешимо для тех и только тех функций $g \in DL_{p+}\{n\}$ (тех и только тех функций $h_1 \in L_{p+}\{n\}$), которые удовлетворяют следующим условиям (теорема 3.2):

$$(\widetilde{\psi}_j, g) = (\widetilde{\psi}_j, (I - K_n^{\tau})\, h_1) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, |\widetilde{\varkappa}_{\tau}|). \tag{19}$$

Здесь $\{\widetilde{\psi}_j\}$ $(j = 1, 2, \cdots, |\widetilde{\varkappa}_{\tau}|)$ — базис указанного выше подпространства нулей оператора $I - \widetilde{K}_n$.

При выполнении условий (19) единственное в $L_{p+}\{n\}$ решение уравнения (18) имеет вид

$$h = N^{\tau}(I + \widetilde{\Gamma}^{\tau})(I - K_n^{\tau})\, h_1.$$

Найдем общее решение $\widetilde{\psi} \in L_{p+}^*\{n\}$ уравнения (17). Подставляя найденное для h выражение в уравнение (17), получим, что $(\widetilde{\psi}, h_1) = 0$. При этом найденное решение определено лишь на тех основных функциях $h_1 \in L_{p+}\{n\}$, которые удовлетворяют условиям (19).

Воспользовавшись идеей, предложенной в [13], продолжим функционал $\widetilde{\psi}$ на все пространство $L_{p+}\{n\}$ следующим способом:

$$(\widetilde{\psi}, h) = (\widetilde{\psi}, h_1) + \sum_{k=1}^{|\widetilde{\varkappa}_\tau|} c_k (\widetilde{\psi}_k, (I - K_n^{\tau}) h).$$

Указанное продолжение единственно с точностью до выбора постоянных c_k $(k = 1, 2, \cdots, |\widetilde{\varkappa}_\tau|)$.

Возвращаясь к уравнению $(I - K_n^{\tau})^* \psi = 0$, получим, что его общее решение имеет вид

$$(\psi, g) = (\widetilde{\psi}, N^{\tau} (I + \widetilde{\Gamma}^{\tau}) g) = \sum_{k=1}^{|\widetilde{\varkappa}_\tau|} c_k (\widetilde{\psi}_j, (I - K_n^{\tau}) N^{\tau}) I + \widetilde{\Gamma}^{\tau}) g) =$$

$$= \sum_{k=1}^{|\widetilde{\varkappa}_\tau|} c_k (\widetilde{\psi}_k, g).$$

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 4.5. *Пусть $k(t) \in L_1\{-n\} (n > 0)$ и выполняются условия (2). Тогда при $\widetilde{\varkappa}_\tau \leqslant 0$ оператор $I - K_n^{\tau}$, действующий из $L_{p+}\{n\}$ в $DL_{p+}\{n\}$ $(p > 1)$, является нормально разрешимым. Он имеет конечную d-характеристику* вида $(\widetilde{\varkappa}_\tau - \vartheta^E(n))$, $(0, 0)$ или $(0, -\widetilde{\varkappa}_\tau)$. Индекс его определяется по следующему правилу, он равен*

$$\begin{cases} \widetilde{\varkappa}_\tau - \vartheta^E(n), & \text{если } \widetilde{\varkappa}_\tau > \vartheta^E(n), \\ 0, & \text{если } 0 \leqslant \widetilde{\varkappa}_\tau \leqslant \vartheta^E(n), \\ -\widetilde{\varkappa}_\tau, & \text{если } \widetilde{\varkappa}_\tau < 0, \end{cases}$$

где через $\widetilde{\varkappa}_\tau = -Ind\,[1 - \widetilde{K}(-x)]$ обозначен индекс нормального оператора $I - \widetilde{K}_n$, полученного путем правой равносильной нормализации в $L_{p+}\{n\}$ оператора $I - K_n^{\tau}$.

Легко видеть, что ни один из операторов $I - K_\varkappa$, $I - K_n$, $I - K_n^{\tau}$ не является нормальным нетеровым. Так, например, размерность подпространства нулей в $L_{p+}\{-\infty\}$ оператора $I - K_\infty^{\tau}$ равна в случае $\widetilde{\varkappa} < 0$

$$\begin{cases} \widetilde{\varkappa}_\tau - \alpha, & \text{если } \widetilde{\varkappa}_\tau - \alpha > 0, \\ 0, & \text{если } \widetilde{\varkappa}_\tau - \alpha \leqslant 0. \end{cases}$$

Ростовский государственный университет

Поступило 3.I.1967

* См. § 3, теорему 3.4.

Վ. Բ. ԴԻԲԻՆ

ՎԻՆԵՐ-ՀՈՊՖԻ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՕՊԵՐԱՏՈՐԸ ԱՆՎԵՐՋՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԱՍՏԻՃԱՆԱՅԻՆ ՎԱՐՔ ՈՒՆԵՑՈՂ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ԴԱՍԵՐՈՒՄ

Ամփոփում

Վերը նշված ծալքի տիպի օպերատորը ուսումնասիրվում է $(t+i)^{\pm n} f(t)$ տեսքի ֆունկցիաների դասերում, որտեղ $n \geqslant 0$ — ամբողջ թիվ է, իսկ $f(t)$-ն պատկանում է L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ տարածությանը, կամ սահմանափակ ֆունկցիաների M տարածության բնական ենթատարածություններին։

Ենթադրվում է, որ օպերատորի սիմվոլը ամբողջ աստիճանի զերո է դառնում կոնտուրի վերջավոր թվով կետերում։

Նշված են տարածություններ, որոնց մեջ դիտարկվող օպերատորը բավարարում է Նյոտերի տեսությանը, հաշված է նրա ինդեքսը, կառուցված է ռեզոլվենտը։

V. B. DYBIN

WIENER-HOPF INTEGRAL OPERATOR IN THE CLASSES OF FUNCTIONS WITH POWER BEHAVIOUR AT INFINITY

Summary

The operator mentioned in the heading is assumed to be of convolution type and is investigated in the classes of functions of the form $(t+i)^{\pm n} f(t)$, where $n \geqslant 0$ is an integer and $f(t)$ belongs to the space L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, or to certain other natural subspaces of the space M of essentially bounded functions.

The symbol of the operator is supposed to be equal zero only in finite number of points on the contour.

The spaces where the operator considered satisfies Noether's theory, are pointed out its index is counted up and the resolvent is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1 *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, XIII, № 5, (83), 1958, 3—120.

2. *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский*. Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, сер. мат., 20, № 1, 1956, 3—52.

3. *В. А. Фок*. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Мат. сб., 14 (56), №№ 1—2, 1944, 3—50.

4. *Ф. Д. Гахов, В. И. Смагина*. Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки и уравнения первого рода, Изв. АН СССР, сер. мат., 26, № 3, 1962, 361—390.

5. *Ю. И. Черский*. Интегральные уравнения типа свертки и некоторые их приложения, автореферат диссертации, Тбилиси, 1964.

6. *С. Г. Самко*. Общее сингулярное уравнение в исключительном случае, ДУ, 1, № 8 (1965), 1108—1116.

7. *Г. Н. Чеботарев*. О кольцах функций, интегрируемых с весом, Изв. вузов, Математика, № 5 (36), (1963), 133—145.
8. *Ф. Д. Беркович*. Об одном интегральном уравнении на полуоси, Изв. вузов, Математика, № 1 (50), (1966), 3—14.
9. *Н. И. Мусхелишвили*. Сингулярные интегральные уравнения, М. (1962).
10. *Ф. Д. Гахов*. Краевые задачи, М. (1963).
11. *Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа*. Неравенства, М. (1948).
12. *В. Б. Дыбин, Н. К. Карапетянц*. Об интегральных уравнениях типа свертки в классе обобщенных функций, СМЖ, VII, № 3 (1966), 531—545.
13. *В. С. Рогожин*. Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщенных функций, ДАН СССР, 164, № 2 (1965), 277—280.