ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 4, 1967 Математика

Г. Г. ГЕВОРКЯН

О СХОДЯЩИХСЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ $B_\alpha(z)$

Как известно [1], если $\{z_n\}_1^\infty$ $(0<|z_k|<1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty, \tag{1}$$

то произведение Бляшке

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z_k-z}{1-z\bar{z}_k}\,\frac{|z_k|}{z_k}$$

равномерно сходится внутри единичного круга и обладает следующими свойствами:

$$1)\qquad \lim_{r\to 1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|B(re^{i\varphi})|\,d\varphi=0,$$

$$2)\qquad |B(z)|<1\qquad (|z|<1).$$

Известно также, что условия 1) и 2) полностью определяют эти произведения в том смысле, что всякая аналитическая в круге $|z|<1$ функция, удовлетворяющая указанным условиям, является произведением Бляшке [1].

В связи с установлением параметрического представления некоторых классов мероморфных в круге $|z|<1$ функций М. М. Джрбашяном было построено важное обобщение произведений Бляшке для того случая, когда последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_1^\infty$ вместо условия (1) удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<\infty\quad(-1<\alpha<\infty). \tag{1'}$$

Вкратце остановимся на определении и на некоторых основных свойствах указанных произведений (см. [2], гл. IX). Обозначим

$$A_\alpha(z;\zeta)=\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)e^{-W_\alpha(z;\zeta)},$$

где

$$W_\alpha(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\Bigg\{\zeta^{-k}\int_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-$$

$$- \zeta^k \int\limits_{|\zeta|}^{1} (1-x)^\alpha x^{-k-1}\, dx \Bigg\} z^k \quad (|z|<1; \quad |\zeta|<1).$$

Известно, что при условии (1′) произведение

$$B_\alpha(z) = \prod_{k=1}^{\infty} A_\alpha(z; \zeta) \tag{2}$$

равномерно сходится в круге $|z|<1$ и представляет аналитическую функцию с нулями, лежащими лишь на последовательности $\{z_k\}_1^\infty$. Эти произведения являются естественным обобщением произведений Бляшке, причем

$$B_\alpha(z)/_{\alpha=0} \equiv B(z).$$

Кроме того известны также следующие свойства произведений $B_\alpha(z)$:

а) если $-1<\alpha<\infty$, то

$$\lim_{r\to 1} \int\limits_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi})| d\varphi = 0;$$

б) если $0 \leqslant \alpha < \infty$, то

$$D^{-\alpha} \log |B_\alpha(z)| \leqslant 0 \quad (|z|<1).$$

Здесь оператор $D^{-\alpha} f(x)$ определяется следующим образом: если $0<\alpha<\infty$, а $f(x) \in L_1(0, l)$, то

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt,$$

а если $-1<\alpha<0$, то

$$D^{-\alpha} f(x) = \frac{d}{dx} \{D^{-(\alpha+1)} f(x)\}.$$

Отметим, что почти всюду на $(0, l)$

$$\lim_{\alpha\to+0} D^{-\alpha} f(x) = f(x),$$

в силу чего естественно распространить оператор $D^{-\alpha}$ на случай $\alpha=0$, принимая

$$D^0 f(x) = f(x).$$

Известно также, что если $0 \leqslant \alpha < \infty$, то $r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log |B_\alpha(re^{i\varphi})|$ является субгармонической функцией в круге $|z|<1$.

Наконец, приведем определение класса A_α и его параметрическое представление. Обозначим через A_α $(-1<\alpha<\infty)$ класс аналитических в круге $|z|<1$ функций $f(z)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<r<1} \left\{ \int\limits_{-\pi}^{\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi \right\} < +\infty,$$

где

$$D_{(+)}^{-\alpha} \varphi(r) = \max \{D^{-\alpha} \varphi(r), 0\}.$$

Класс A_α $(-1<\alpha<\infty)$ совпадает с множеством функций $f(z)$, допускающих в круге $|z|<1$ представление вида

$$f(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha(z;\ a_\mu)\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}S_\alpha(e^{-i\theta}z)\,d\psi(\theta)\right\}, \tag{3}$$

где

$$B_\alpha(z;\ a_\mu)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_\mu}\right)e^{-W_\alpha(z;\ a_\mu)},$$

$$S_\alpha(e^{-i\theta}z)=\Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{(1-e^{-i\theta}z)^{1+\alpha}}-1\right\}, \tag{4}$$

$\psi(\theta)$ — вещественная функция с конечным полным изменением на $[-\pi,\ \pi]$, $\lambda\geqslant 0$ — любое целое число, γ — любое вещественное число, а

$$k_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Заметим, что условия а) и б) являются обобщением условий 1) и 2), характеризующих произведения Бляшке и отождествляются с ними при $\alpha=0$.

В настоящей статье доказывается, во-первых, что условия а) и б) характерны для произведений $B_\alpha(z)$. Затем устанавливаются две теоремы, являющиеся распространением на произведения $B_\alpha(z)$ двух основных теорем Г. Ц. Тумаркина [3] о сходящихся в круге $|z|<1$ последовательностях произведений Бляшке.

Что касается некоторых других результатов работ [3] (§ 1—4) и [4] (§§ 1, 2), то их обобщения мы не приводим, поскольку они получаются без особых затруднений.

Автор выражает глубокую благодарность профессору М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство при выполнении настоящей работы.

1°. Характерные свойства произведения $B_\alpha(z)$

Теорема 1. *Если для данного α $(0\leqslant\alpha<\infty)$ аналитическая в круге $|z|<1$ функция $F(z)$ удовлетворяет условиям а) и б), то ее можно представить в виде*

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^\lambda B_\alpha(z), \tag{1.1}$$

где $\lambda\geqslant 0$ — целое, а γ — вещественное число, $B_\alpha(z)$ — некоторое произведение вида (2), наконец,

$$k_\alpha=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+\alpha)}.$$

Доказательство. Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ есть последовательность нулей функции $F(z)$, пронумерованных в порядке неубывания модулей, а

$\lambda \geqslant 0$ — кратность возможного нуля в начале координат. Составим п
следовательность функций

$$\varphi_n(z) \equiv \frac{F(z)}{e^{\lambda k_\alpha} z^\lambda \prod_{k=1}^{n} A_\alpha(z;\ z_k)} \quad (n = 1,\ 2, \cdots), \qquad (1$$

которая равномерно сходится внутри единичного круга, причем

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(z) = \varphi(z) = \frac{F(z)}{e^{\lambda k_\alpha}\ z^\lambda\ B_\alpha(z)}, \qquad (1$$

функция $\varphi(z)$ голоморфна и не имеет нулей в круге $|z| < 1$. Следо
тельно аналитической будет функция $\log \varphi(z)$, а также функц
$D^{-\alpha} \log \varphi(z)$ $(-1 < \alpha < \infty)$*.

Из самого определения оператора $D^{-\alpha}$ непосредственно следуе
что при $0 \leqslant \alpha < \infty$ внутри круга $|z| < 1$ равномерно будем иметь

$$\lim_{n \to \infty} D^{-\alpha} \log \varphi_n(z) = D^{-\alpha} \log \varphi(z) \quad (|z| < 1).$$

Следовательно

$$\lim_{n \to \infty} D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)| = D^{-\alpha} \log |\varphi(z)| \quad (0 \leqslant \alpha < \infty,\ |z| < 1),$$

причем для любого ρ $(0 < \rho < 1)$ имеет место следующее интегральн
представление**:

$$\log |\varphi(re^{i\varphi})| = \frac{r^{-\alpha}}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_\alpha\left(\varphi - \vartheta,\ \frac{r}{\rho}\right) D^{-\alpha} \log |\varphi(\rho e^{i\vartheta})|\, d\vartheta \qquad (1.$$

$$(0 \leqslant r < \rho;\ -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi),$$

где

$$P_\alpha\left(\varphi - \vartheta;\ \frac{r}{\rho}\right) = \Gamma(1+\alpha)\left\{Re\ \frac{2(\rho e^{i\vartheta})^{1+\alpha}}{(\rho e^{i\vartheta} - re^{i\varphi})^{1+\alpha}} - 1\right\}.$$

Поскольку

$$r^{-\alpha} D^{-\alpha}\{1\} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)},\quad r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log r = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}[\log r - k_\alpha],$$

из условий (1.2) и б) теоремы получим

$$D^{-\alpha} \log |\varphi_n(z)| = D^{-\alpha} \log |F(z)| - \frac{\lambda r^\alpha \log r}{\Gamma(1+\alpha)} - D^{-\alpha} \log |B_{\alpha,\,n}(z)| \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\lambda r^\alpha \log r}{\Gamma(1+\alpha)} - D^{-\alpha} \log |B_{\alpha,\,n}(z)|, \qquad (1.5$$

где

$$B_{\alpha,\,n}(z) = \prod_{k=1}^{n} A_\alpha(z;\ z_k).$$

---

* См. [2], стр. 594.

** См. [2], стр. 596.

Пользуясь параметрическим представлением (3) функций класса A_α, легко видеть, что если $f(z)\in A_\alpha$ $(0\leqslant\alpha<\infty)$, то $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|f(re^{i\varphi})|$ будет субгармонической функцией в круге $|z|<1$, поскольку, как было отмечено уже, при $0\leqslant\alpha<\infty$, $r^{-\alpha}$ $D^{-\alpha}\log|B_\alpha(re^{i\varphi})|$ — субгармоническая функция. Из определения класса A_α следует, что $\varphi_n(z)\in A_\alpha$ $(n=1, 2,\cdots)$ и потому $D^{-\alpha}\log|\varphi_n(z)|$ $(n=1, 2,\cdots)$ также будут субгармоническими функциями в круге $|z|<1$.

Поскольку для каждого α $(-1<\alpha<\infty)$

$$\lim_{r\to 1} D^{-\alpha}\log|A_\alpha,(re^{i\varphi}; z_k)|=0^*,$$

то, считая n фиксированным, для любого $\varepsilon>0$ можем выбрать r_1 $(0<r_1<1)$ так, чтобы коль скоро $r_1\leqslant|z|<1$ имели бы место неравенства

$$|D^{-\alpha}\log|A_\alpha(z; z_k)||<\frac{\varepsilon}{2n}\quad(k=1, 2,\cdots, n).$$

Итак, при $r_1\leqslant|z|<1$ справедливо неравенство

$$|D^{-\alpha}\log|B_{\alpha, n}(z)||<\frac{\varepsilon}{2}\cdot \tag{1.6}$$

Теперь выберем r_2 $(r_1\leqslant r_2<1)$ таким образом, чтобы имело место неравенство

$$\left|\frac{\lambda r^\alpha\log r}{\Gamma(1+\alpha)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad(r\geqslant r_2). \tag{1.7}$$

Учитывая (1.5), (1.6) и (1.7), получим

$$|D^{-\alpha}\log|\varphi_n(z)||<\varepsilon\quad(r_2<|z|<1|. \tag{1.8}$$

Так как при $\alpha\geqslant 0$ $D^{-\alpha}\log|\varphi_n(z)|$ $(n=1, 2,\cdots)$ — субгармонические функции в круге $|z|<1$, то согласно принципу максимума неравенство (1.8) имеет место во всем круге $|z|<1$.

Устремляя $\varepsilon>0$ к нулю, из последнего неравенства получаем, что при любом z $(|z|<1)$

$$D^{-\alpha}\log|\varphi_n(z)|\leqslant 0.$$

Наконец, устремив $n\to\infty$, приходим к неравенству

$$D^{-\alpha}\log|\varphi(z)|\leqslant 0. \tag{1.9}$$

Заметив, что

$$D^{-\alpha}\log|\varphi(0)|=\lim_{n\to\infty} D^{-\alpha}\log|\varphi_n(0)|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D^{-\alpha}\log|F(r_n e^{i\varphi})|d\varphi-\frac{\lambda r_n^\alpha\log r_n}{\Gamma(1+\alpha)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D^{-\alpha}\log|B_{\alpha, n}(r_n e^{i\varphi})|d\varphi\right\},$$

---

* См. [2], стр. 619.

и пользуясь условием а) теоремы и равенствами

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda r_n^{\alpha}\log r_n}{\Gamma(1+\alpha)}=0,\ \lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}D^{-\alpha}\log|B_{\alpha,n}(r_ne^{i\varphi})|\,d\varphi=0,$$

получим

$$D^{-\alpha}\log|\varphi(0)|=0. \tag{1.10}$$

Из (1.9) и (1.10) согласно принципу максимума следует, что

$$D^{-\alpha}\log|\varphi(z)|\equiv 0.$$

Имея ввиду (1.4), отсюда заключаем также, что $\log|\varphi(z)|\equiv 0$, т. е. $\varphi(z)\equiv e^{i\gamma}$, где γ — вещественная постоянная.

Таким образом, из (1.3) следует представление

$$F(z)=e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^{\lambda}B_\alpha(z).$$

Теорема доказана.

Условимся называть произведением типа $B_\alpha(z)$ выражение вида

$$e^{i\gamma+\lambda k_\alpha}z^{\lambda}B_\alpha(z).$$

Тогда справедливо утверждение: для того чтобы для данного α $(0\leqslant\alpha<\infty)$ аналитическая в круге $|z|<1$ функция $F(z)$ была произведением типа $B_\alpha(z)$ необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям а) и б).

2°. Свойства предельных функций произведений $B_\alpha(z)$

Теорема 2. *Пусть $0\leqslant\alpha<\infty$. Для того чтобы предельная функция $F(z)$ равномерно сходящейся внутри круга $|z|<1$ последовательности произведений $\{e^{i\gamma_k}B_\alpha^{(k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ была снова произведением типа $e^{i\gamma}B_\alpha(z)$ необходимо и достаточно, чтобы*

1) во всяком круге $|z|<r$ $(0<r<1)$ число нулей функций $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ было равномерно ограничено,

2) для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое R $(0<R<1)$, что при всех k $(k=1, 2, 3,\cdots)$

$$\sum_{|z_{kj}|>R}(1-|z_{kj}|)^{1+\alpha}<\varepsilon.$$

Здесь суммирование ведется по всем нулям $B_\alpha^{(k)}(z)$ с модулями $>R$.

Доказательство. Необходимость. Поскольку необходимость условия 1) очевидна, докажем необходимость условия 2). Так как предельная функция последовательности есть $e^{i\gamma}B_\alpha(z)$, то

$$\lim_{\rho\to 1-0}\int_0^{2\pi}D^{-\alpha}\log|B_\alpha(\rho e^{i\theta})|\,d\theta=0^{*}\quad(-1<\alpha<\infty). \tag{2.1}$$

---

* См. [2], стр. 626.

С другой стороны

$$\frac{\rho^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{2\pi}\int_0^{2\pi} D^{-\alpha}\log|B_\alpha(\rho e^{i\vartheta})|\,d\vartheta =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty}\int_{|z_j|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx + \sum_{0<|z_j|<\rho}\int_{\frac{|z_j|}{\rho}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx, \tag{2.1'}$$

где $\{z_j\}_1^\infty$ — нули $B_\alpha(z)$*.

Из (2.1) и (2.1′) следует, что для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать $r_0=r_0(\varepsilon)<1$ так, чтобы имело место неравенство

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\int_{|z_j|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx + \sum_{0<|z_j|<r_0}\int_{\frac{|z_j|}{r_0}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx > -\frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку последовательность $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ равномерно сходится внутри круга $|z|<1$, то можно указать такое $k_0=k(r_0)$, чтобы как только $k>k_0$

$$\frac{r_0^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{2\pi}\int_0^{2\pi} D^{-\alpha}\log|B_\alpha^{(k)}(r_0e^{i\varphi})|\,d\varphi =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty}\int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx + \sum_{0<|z_{kj}|<r_0}\int_{\frac{|z_{kj}|}{r_0}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx > -\varepsilon. \tag{2.2}$$

Итак, при $k\geqslant k_0$, имеем

$$-\sum_{|z_{kj}|>r_0}\int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx + \sum_{0<|z_{kj}|<r_0}\left\{\int_{\frac{|z_{kj}|}{r_0}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right\} > -\varepsilon. \tag{2.2'}$$

Поскольку второе слагаемое в правой части (2.2′) отрицательно, то тем более, при $k\geqslant k_0$

$$\sum_{|z_{kj}|>r}\int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx < -\varepsilon. \tag{2.3}$$

Наконец, заметим, что

$$\int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx \geqslant \frac{(1-|z_{kj}|)^{1+\alpha}}{1+\alpha}. \tag{2.4}$$

* См. [2], стр. 627.

Из (2.3) и (2.4) получаем при $k > k_0$, $r > r_0(\varepsilon)$

$$\sum_{|z_{kj}|>r_0} (1-|z_{kj}|)^{1+\alpha} \leqslant \sum_{|z_{kj}|>r} (1-|z_{kj}|)^{1+\alpha} < \varepsilon. \tag{2.3'}$$

Теперь возьмем $R > r$ настолько близким к единице, чтобы имели место неравенства

$$\sum_{|z_{kj}|>R} (1-|z_{kj}|)^{1+\alpha} < \varepsilon \quad (k=1, 2, \cdots, (k_0). \tag{2.3''}$$

Из (2.3′) и (2.3″) следует необходимость условия 2).

Достаточность. Нужно доказать, что при выполнении условий 1) и 2) предельная функция $F(z)$ последовательности $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям а) и б).

В самом деле, поскольку при $\alpha > 0$

$$D^{-\alpha} \log |B_\alpha^{(k)}(re^{i\varphi})| \leqslant 0 \begin{pmatrix} 0 \leqslant r < 1, \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{pmatrix},$$

$$(k=1, 2, \cdots),$$

то, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$D^{-\alpha} \log |F(re^{i\varphi})| \leqslant 0 \begin{pmatrix} 0 \leqslant r < 1 \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \end{pmatrix},$$

так как сходимость $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ к $F(z)$ равномерна внутри круга $|z|<1$.

Остается показать, что предельная функция $F(z)$ удовлетворяет условию а), то есть

$$\lim_{r\to 1} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |F(re^{i\varphi})| \, d\varphi = 0.$$

Заметим, что для любого $k \geqslant 1$ имеем

$$\frac{\rho^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |B_\alpha^{(k)}(\rho e^{i\theta})| \, d\theta =$$

$$= -\sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_{kj}|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0<|z_{kj}|<\rho} \int_{\frac{|z_{kj}|}{\rho}}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx. \tag{2.5}$$

Покажем, что независимо от $k \geqslant 1$ можно выбрать $r\ (0 < r < 1)$ так, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$ имела место оценка

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} \int_{|z_{kj}|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx + \sum_{0<|z_{kj}|<r} \int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \right| < \varepsilon \quad (k=1, 2\cdots). \tag{2.6}$$

С этой целью, во-первых, заметим, что если $|z_{kj}| \leqslant \rho < 1$, то

$$\int_{\frac{|z_{kj}|}{\rho}}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx \leqslant \int_{|z_{kj}|}^{1} \frac{(1-x)^\alpha}{x} dx < \frac{(1-|z_{kj}|)^{1+\alpha}}{|z_{kj}|(1+\alpha)} \tag{2.7}$$

и

$$\int_{|z_{kj}|}^{\frac{|z_{kj}|}{\rho}} \frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx < \frac{(1-|z_{kj}|)^\alpha}{|z_{kj}|}\left(\frac{|z_{kj}|}{\rho}-|z_{kj}|\right)=(1-|z_{kj}|)^\alpha\left(\frac{1}{\rho}-1\right). \tag{2.8}$$

Имеем далее

$$-\sum_{j=1}^{\infty}\int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx+\sum_{0<|z_{kj}|<r}\int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx=$$

$$=-\sum_{|z_{kj}|>r_1}\int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx+\sum_{0<|z_{kj}|<r_1}\left[\int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx-\int_{|z_{jk}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right]+$$

$$+\sum_{r_1<|z_{jk}|<r}\int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\equiv J_1+J_2+J_3. \tag{2.9}$$

Из условия 2) теоремы и неравенства (2.7) следует, что можно выбрать r_1 $(0<r_1<1)$ так, чтобы

$$|J_1|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot \tag{2.10}$$

Согласно условию 1) теоремы число нулей произведений $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ в круге $|z|\leqslant r_1$ равномерно ограничено, допустим некоторым числом $N(r_1)$, следовательно в J_2 независимо от k число слагаемых не превосходит $N(r_1)$. Из (2.8) и ограниченности слагаемых в J_2 следует, что r $(r_1<r<1)$ можно выбрать так, что

$$|J_2|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot \tag{2.11}$$

Наконец

$$|J_3|<|J_1|<\frac{\varepsilon}{3}\cdot \tag{2.12}$$

Из (2.9), (2.10), (2.11) и (2.12) следует

$$\left|-\sum_{j=1}^{\infty}\int_{|z_{kj}|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx+\sum_{0<|z_{jk}|<r}\int_{\frac{|z_{kj}|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right|<\varepsilon,$$

то есть

$$\left|\frac{r^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{2\pi}\int_0^{2\pi}D^{-\alpha}\log|B_\alpha^{(k)}(re^{i\varphi})|\,d\varphi\right|<\varepsilon \quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим

$$\left| \frac{r^{-\alpha}\Gamma(1+\alpha)}{2\pi} \int_0^{2\pi} D^{-\alpha} \log |F(re^{i\varphi})|\, d\varphi \right| < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что предельная функция $F(z)$ удовлетворяет условию а).

Теорема доказана.

Теперь рассмотрим случай, когда предельная функция последовательности произведений $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ не имеет нулей в круге $|z|<1$.

Определим последовательность аналитических в круге $|z|<1$ функций

$$M_\alpha^{(k)}(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\, d\psi_k(\vartheta)\right\} \quad (k=1, 2, \cdots), \tag{2.13}$$

где $\psi_k(\vartheta)$ является функцией скачков и определяется из соотношения

$$\psi_k(\vartheta) = -\frac{2\pi}{\Gamma(2+\alpha)} \sum_{0<\arg z_{kj}<\vartheta} (1-|z_{kj}|)^{1+\alpha}. \tag{2.14}$$

Теорема 3. *Пусть дана равномерно сходящаяся внутри круга* $|z|<1$ *последовательность произведений* $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$, где α $(-1<\alpha<\infty)$ — *любое, причем для* α $(-1<\alpha<0)$

$$\sup_{0<r<1} \int_0^{2\pi} D_{(+)}^{-\alpha} \log |B_\alpha^{(k)}(re^{i\varphi})|\, d\varphi \leqslant M < +\infty, \tag{2.15}$$

где постоянная M *от* k *не зависит. Предположим, что предельная функция* $F(z)$ *последовательности* $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ *не обращается в нуль в круге* $|z|<1$. *Тогда последовательность функций* $\{M_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$, *определенная по формуле* (2.13), *будет как и* $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$, *равномерно сходиться внутри круга* $|z|<1$ *к той же функции* $F(z)$.

Доказательство. Так как

$$B_\alpha^{(k)}(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_{kj}}\right) e^{-W_\alpha(z;z_j)} = \prod_{j=1}^{\infty} e^{-\omega_\alpha(z;z_j)}, \tag{2.16}$$

где

$$\omega_\alpha(z;\zeta) = \int_{|\zeta|}^{1}\left\{\left(1-\frac{\zeta z}{x}\right)^{-1-\alpha} + \left(1-\frac{xz}{\zeta}\right)^{-1-\alpha} - 1\right\}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\, dx, \tag{2.17}$$

то для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ и r $(0<r<1)$, начиная с достаточно большого k, имеет место неравенство

$$\left| -\sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha(z;z_j) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)\, d\psi_k(\vartheta) \right| < \varepsilon, \tag{2.18}$$

где функции $\psi_k(\vartheta)$ и $S_\alpha(e^{-i\vartheta}z)$ определяются формулами (2.14) и (4).

С этой целью обозначим

$$\omega_\alpha^*(z;\zeta)=\int_{|\zeta|}^{1}\left\{(1-\bar{\zeta}z)^{-1-\alpha}+\left(1-\frac{z}{\zeta}\right)^{-1-\alpha}-1\right\}(1-x)^{\alpha}\,dx$$

и, пользуясь биномиальным разложением

$$\frac{1}{(1-w)^{1+\alpha}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\,w^{k}\ (|w|<1), \qquad (2.19)$$

представим функцию $\omega_\alpha^*(z;\zeta)$ в следующем виде:

$$\omega_\alpha^*(z;\zeta)=\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{1+\alpha}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\left(|\zeta|^{k}+\frac{1}{|\zeta|^{k}}\right)(e^{-i\theta}z)^{k}-1\right\}. \qquad (2.20)$$

Оценим разность $\omega_\alpha^*(z;\zeta)-\omega_\alpha(z;\zeta)$, заметив, что для $0<|z|<r<1$

$$|\omega_\alpha^*(z;\zeta)-\omega_\alpha(z;\zeta)|<\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}|\zeta|^{k}|z|^{k}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}(x^{-k-1}-1)\,dx+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\left|\frac{z}{\zeta}\right|^{k}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}(1-x^{k-1})\,dx+\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx\equiv$$

$$\equiv J_1+J_2+J_3,$$

$$J_1=\sum_{k=0}^{N}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\,|\zeta|^{k}|z|^{k}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}(x^{-k-1}-1)\,dx+$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\,|\zeta|^{k}|z|^{k}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}(x^{-k-1}-1)\,dx\equiv J_1'+J_1^{*}.$$

Так как

$$\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}(x^{-k-1}-1)\,dx\leqslant\frac{1}{|\zeta|^{k+1}}\int_{|\zeta|}^{1}(1-x)^{\alpha}dx=\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\,|\zeta|^{k+1}},$$

то

$$J_1^{*}\leqslant\frac{(1-|\zeta|)^{1+\alpha}}{(1+\alpha)\,|\zeta|}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}|z|^{k}. \qquad (2.21)$$

Замечая, что при фиксированном z ($|z|<1$) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}|z|^{k}$$

сходится, для $\varepsilon>0$ и $r\,(0<r<1)$ выберем $N=N(\varepsilon,r)$ так, чтобы для всех z ($|z|\leqslant r$) имело место неравенство

$$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}|z|^{k}<\frac{\varepsilon}{2}(1+\alpha)\,r. \qquad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) следует

$$J_1' \leqslant \frac{\varepsilon}{12}(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}. \tag{2.23}$$

Затем, поскольку

$$J_1' \leqslant \sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |z|^k \int_{|\varsigma|}^{1} (1-x)^{\alpha} \frac{(1-x^{k+1})}{x} dx,$$

то, пользуясь очевидным неравенством $(1-x^{k+1}) < k(1-x)$ $(0 < x < 1)$ и имея ввиду, что при $(|z| \leqslant r < |\varsigma| < 1)$ очевидно

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} |z|^k \leqslant \frac{1}{(1-r)^{1+\alpha}},$$

получим

$$J_1' \leqslant \frac{N(1-|\varsigma|)^{2+\alpha}}{|\varsigma|(2+\alpha)(1-r)^{1+\alpha}}. \tag{2.24}$$

Теперь возьмем ς так, чтобы имело место неравенство

$$\frac{N(1-|\varsigma|)}{|\varsigma|(2+\alpha)(1-r)^{1+\alpha}} < \frac{\varepsilon}{12}. \tag{2.25}$$

Из (2.24) и (2.25) следует

$$J_1' \leqslant \frac{\varepsilon}{12}(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}. \tag{2.26}$$

Из неравенств (2.23) и (2.26) получим

$$J_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{6}(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}. \tag{2.27}$$

Таким же образом мы получаем неравенства

$$J_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{6}(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}, \tag{2.28}$$

$$J_3 = \int_{|\varsigma|}^{1} (1-x)^{1+\alpha} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{(1-|\varsigma|)^{2+\alpha}}{|\varsigma|(2+\alpha)} < \frac{\varepsilon}{6}(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}. \tag{2.29}$$

Из (2.27), (2.28) и (2.29) следует

$$\left| \omega_\alpha^*(z;\varsigma) - \omega_\alpha(z;\varsigma) \right| < \frac{\varepsilon}{2}(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}. \tag{2.30}$$

Теперь оценим разность

$$\omega_\alpha^*(z;\varsigma) - \frac{(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} S_\alpha(e^{-i\theta}z) =$$

$$= \frac{(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} (e^{-i\theta}z)^k \frac{(1-|\varsigma|^k)^2}{|\varsigma|^k}. \tag{2.31}$$

Для данного r $(0 < r < 1)$ и $\varepsilon > 0$ обозначим $r/|\varsigma_0| = q$ $(r < |\varsigma_0| < 1)$ и выберем $N(\varepsilon, q)$ так, чтобы

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} q^k < \frac{\varepsilon}{4}(1+\alpha).$$

Тогда получим также

$$\left|\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \frac{(1-|\varsigma|^k)^2}{|\varsigma|^k} (e^{-i\theta} z)^k\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} \left|\frac{z}{\varsigma}\right|^k < \frac{\varepsilon}{4}(1+\alpha), \tag{2.32}$$

причем одновременно для всех значений z $(|z|\leqslant r)$ и ς $(|\varsigma_0|\leqslant|\varsigma|\leqslant 1)$.

Кроме того, поскольку

$$\left|\sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} (e^{-i\theta} z)^k \frac{(1-|\varsigma|^k)^2}{|\varsigma|^k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(1-|\varsigma|^N)^2}{|\varsigma|^N} \sum_{k=0}^{N} \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)} q^k \leqslant \frac{(1-|\varsigma|^N)^2}{|\varsigma|^N (1-q)^{1+\alpha}},$$

выберем ς_1 $(|\varsigma_0|\leqslant|\varsigma_1|\leqslant 1)$ так, чтобы

$$\frac{(1-|\varsigma|^N)^2}{|\varsigma|^N (1-q)^{1+\alpha}} < \frac{\varepsilon}{4}(1+\alpha). \tag{2.33}$$

Из (2.29) и (2.33) следует, что для любого фиксированного r $(0<r<1)$ можно выбрать R $(0<R<1)$ так, чтобы в круге $|z|\leqslant r$ при $R\leqslant|\varsigma|\leqslant 1$ имели бы

$$\left|\omega_\alpha(z;\varsigma) - \frac{(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} S_\alpha(e^{-i\theta} z)\right| \leqslant \varepsilon(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}. \tag{2.34}$$

Далее

$$-\frac{(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}}{\Gamma(2+\alpha)} S_\alpha(e^{-i\theta} z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-it} z)\, d\psi(t),$$

где $\psi(t)$ — кусочно постоянна на $[-\pi, \pi]$ и имеет единственный скачок в точке $t=\vartheta$, равный $-2\pi(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}/\Gamma(1+\alpha)$.

Следовательно неравенство (2.34) можно записать в следующем виде:

$$\left|\omega_\alpha(z;\varsigma) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-it} z)\, d\psi(t)\right| < \varepsilon(1-|\varsigma|)^{1+\alpha}. \tag{2.34'}$$

Так как предельная функция последовательности $\{B_\alpha^{(k)}(z)\}_1^\infty$ в круге $|z|<1$ не имеет нулей, то для любого фиксированного R $(0<R<1)$ можно указать такой номер k_0, чтобы для $k>k_0$ произведения $B_\alpha^{(k)}(z)$ в круге $|z|\leqslant R$ не имели бы нулей.

Предполагая, что $k>k_0$, с помощью (2.34') оценим каждое слагаемое разложения

$$\log B_\alpha^{(k)}(z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \omega_\alpha(z; z_j).$$

Тогда будем иметь

$$\left|\log B_\alpha^{(k)}(z) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_\alpha(e^{-i\vartheta} z)\, d\psi_k(\vartheta)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_{kj}|)^{1+\alpha}, \tag{2.35}$$

где $\psi_k(\vartheta)$ определяется формулой (2.14).

Так как предельная функция $F(z) \in A_\alpha$ (для $0 \leqslant \alpha < \infty$ очевидно, а для $-1 < \alpha < 0$ это следует из условия (2.15)) и не имеет нулей в круге $|z| < 1$, то, пользуясь леммой 9.17 [2], легко доказать, что

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sum_{j=1}^{\infty} (1-|z_{kj}|)^{1+\alpha} < \infty.$$

Отсюда, учитывая (2.35), получим (2.18).

Теорема доказана.

Ереванский государственный университет

Поступило 20.X.1966

Գ. Գ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ

$B_\alpha(z)$ ԱՐՏԱԴՐՅԱԼՆԵՐԻ ԶՈՒԳԱՄԵՏ ՀԱՋՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Ներկա հոդվածում Բլյաշկեի արտադրյալների համար Գ. Ց. Տումարկինի [3] ստացած հիմնական արդյունքները տարածված են Մ. Մ. Ջրբաշյանի [2] կողմից մուծված $B_\alpha(z)$ արտադրյալների վրա։

Նախ ապացուցված է՝ որպեսզի տված α $(0 \leqslant \alpha < \infty)$-ի համար $|z| < 1$ շրջանում անալիտիկ $F(z)$ ֆունկցիան լինի $B_\alpha(z)$ տիպի արտադրյալ անհրաժեշտ է և բավարար, որ նա բավարարի a) և б) պայմաններին։

Այնուհետև նշված են $|z| < 1$ շրջանում $B_\alpha(z)$ $(0 \leqslant \alpha < \infty)$ տիպի արտադրյալներից կազմված հավասարաչափ զուգամետ հաջորդականության սահմանային ֆունկցիան $B_\alpha(z)$ տիպի արտադրյալ լինելու անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ։

Վերջում ուսումնասիրված է այն դեպքը, երբ $|z| < 1$ շրջանում հավասարաչափ զուգամետ $B_\alpha(z)$ տիպի արտադրյալների հաջորդականության սահմանային ֆունկցիան միավոր շրջանում զերո չի դառնում։

G. G. GEVORKIAN

ON TNE CONVERGENT SEQUENCES OF $B_\alpha(z)$ TYPE PRODUCTS

Summary

The present paper extends some of Toumarkin's results on Blyaske products over $B_\alpha(z)$ type products, which were introduced by Dzrbashian.

First, it is proved, that given α $(0 < \alpha < \infty)$, conditions a) and b) are both necessary and sufficient for an analytical in the unit circle $F(z)$ function to be a product of $B_\alpha(z)$ type.

Necessary and sufficient conditions for the limit of an uniformly over $|z| < 1$ convergent sequence of $B_\alpha(z)$ type products to be again a product of $B_\alpha(z)$ type then follow.

Also the case, when the limit of such sequence does not vanish in the unit circle is studied.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М. (1950).
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Издательство „Наука“ (1966).
3. *Г. Ц. Тумаркин.* Сходящиеся последовательности произведений Бляшке, Сибирский математический журнал, № 1 (1964).
4. *Г. Ц. Тумаркин.* Условия равномерной сходимости и сходимости граничных значений аналитических и мероморфных функций с равномерно ограниченными характеристиками, Сибирский математический журнал, № 2 (1964).
5. *А. И. Маркушевич.* Теория аналитических функций (1950).