ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա 2, № 4, 1967 Математика

В. А. ПЕТРОВ

АНАЛОГИ ТЕОРЕМЫ ФАТУ ДЛЯ ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Функция $w(z)$ называется **полианалитической** порядка n (или n-аналитической) в области D, если она представима в виде

$$w(z)=f_0(z)+\bar{z}f_1(z)+\cdots+\bar{z}^{n-1}f_{n-1}(z), \tag{1}$$

где $f_i(z)$ $(i=0, 1, \cdots, n-1)$ — функции, аналитические в D.

Известно [1], что аналитическая и ограниченная в единичном круге функция почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения (теорема Фату). Оказывается, для полианалитических функций это уже не так. Для того чтобы убедиться в этом вначале покажем, что справедлива следующая

Лемма 1. *Существует функция $f(z)$, аналитическая в круге $|z|<1$ и обладающая свойствами:*

$$1)\ |f(re^{i\theta})|\leqslant\frac{6}{1-r},\ \theta\in[0, 2\pi],\ 0\leqslant r<1; \tag{2}$$

2) *для некоторой последовательности* $\{r_\nu\}$, $r_\nu\to 1$,

$$|f(r_\nu e^{i\theta})|>\frac{1}{2}\frac{1}{1-r_\nu},\ \theta\in[0, 2\pi]. \tag{3}$$

Доказательство. Факт существования такой функции и идея ее построения любезно указаны нам Е. П. Долженко.

Будем строить $f(z)$ с помощью лакунарных рядов. Пусть

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k z^{n_k}, \tag{4}$$

где

$$a_k=\frac{1}{\max\limits_{0<r<1}\{r^{n_k}(1-r)\}}.$$

Покажем, что последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ можно выбрать так, что функция (4) будет обладать свойствами (2), (3). Заметим прежде всего, что

$$\max_{0<r<1}\{r^t(1-r)\}=\frac{t^t}{(1+t)^t}\cdot\frac{1}{1+t},$$

и точки максимума r_t с увеличением номера t приближаются к единице.

Пусть n_1 — произвольное натуральное число. Выбор остальных чисел n_k подчиним пока только следующим требованиям:

все числа n_k — нечетные;

$$n_k + 1 > 2n_{k-1}. \tag{5}$$

Тогда

$$|f(re^{i\theta})| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} r^{n_k}(1+n_k)\left(\frac{1+n_k}{n_k}\right)^{n_k} <$$

$$< 3\sum_{k=1}^{\infty}(1+n_k)\cdot r^{n_k} < 3\sum_{k=1}^{\infty} 2\left(r^{\frac{n_k+1}{2}} + \cdots + r^{n_k-1} + r^{n_k}\right) <$$

$$< 6(1 + r + r^2 + \cdots) = \frac{6}{1-r}.$$

Отсюда следует, что ряд (4) сходится в круге $|z| < 1$, то есть $f(z)$ аналитична в единичном круге, и для нее выполняется соотношение (2).

Последовательность $\{r_k\}$, о которой говорится во второй части леммы выберем таким образом: r_k равно тому r, которое дает максимум функции $\{r^{n_k}(1-r)\}$. В таком случае

$$|f(r_\nu e^{i\theta})| > \frac{1}{1-r_\nu} - \left(\sum_{k=1}^{\nu-1} a_k r_\nu^{n_k} + \sum_{k=\nu+1}^{\infty} a_k r_\nu^{n_k}\right). \tag{6}$$

Но

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} a_k r_\nu^{n_k} < \sum_{k=1}^{\nu-1} a_k$$

и, поскольку $r_\nu = r_\nu(n_\nu)$ стремится к единице при $n_\nu \to \infty$, то можно считать, что n_ν выбрано настолько большим, что выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{\nu-1} a_k < \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-r_\nu}. \tag{7}$$

Так как, с другой стороны, ряд (4) при $r = r_\nu$ сходится (равномерно относительно θ), то можно считать, что

$n_{\nu+1}$ выбрано настолько далеко от n_ν, что для остаточного члена имеет место оценка

$$\sum_{k=\nu+1}^{\infty} a_k r_\nu^{n_k} < \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-r_\nu}. \tag{8}$$

Неравенства (6)—(8) показывают, что функция $f(z)$, действительно, обладает свойством (3). Итак, если числа n_k ряда (4) выбраны так, что выполняются условия (5), (7), (8), а это сделать возможно, то функция $f(z)$, определяемая этим рядом, обладает свойствами (2), (3). Лемма доказана.

Теорема 1. *Существует функция $w(z)$, бианалитическая и ограниченная в единичном круге и не имеющая почти всюду на единичной окружности угловых граничных значений.*

Доказательство. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, построенная выше. Тогда функция $w(re^{i\theta}) = (r^2-1)f(z)$, очевидно, бианалитична и в силу (2) ограничена в $|z|<1$. Пусть $w(z)$ имеет угловые граничные значения $w(t)$ в точках $t \in E$ окружности $|z|=1$. Как следует из (3) $|w(t)|>1$, и поэтому функция $f(z)$ в каждой точке t имеет угловым граничным значением ∞. Но, в силу граничной теоремы единственности Лузина и Привалова [1], множество E точек t, в которых аналитическая функция $f(z)$ обращается (в смысле угловых граничных значений) в бесконечность, не может иметь положительной меры. Теорема доказана.

Возникает вопрос, какие дополнительные условия следует наложить на полианалитическую функцию, чтобы для нее имела место теорема Фату. Прежде всего отметим, что верна следующая простая

Теорема 2. *Функция $w(z)$, n-аналитическая в единичном круге k и ограниченная в k вместе со своими ареолярными производными*

$$\frac{\partial^\nu w}{\partial \bar{z}^\nu}$$

до порядка n—1 включительно, почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения.

Доказательство. Так как функция $w(z)$ имеет вид (1), то

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = f_1(z) + 2\bar{z}f_2(z) + \cdots + (n-1)\bar{z}^{n-2}f_{n-1}(z),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = 2f_2(z) + \cdots + (n-2)(n-1)\bar{z}^{n-2}f_{n-1}(z),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^{n-1} w}{\partial \bar{z}^{n-1}} = (n-1)!\, f_{n-1}(z).$$

Отсюда очевидно следует, что в круге k ограничены аналитические компоненты $f_l(z)$ функции $w(z)$. А поскольку для каждой из них верна теорема Фату, то из (1) ясно, что $w(z)$ почти всюду имеет угловые граничные значения.

В случае бианалитических функций можно привести также аналог теоремы Фату с несколько другими условиями.

Теорема 3. *Функция $w(z)$, бианалитическая в единичном круге и ограниченная в нем вместе со своей радиальной производной $\frac{\partial w}{\partial r}$, имеет почти всюду на единичной окружности угловые граничные значения.*

Для доказательства этого утверждения нам будут полезны две леммы о бигармонических функциях (**бигармонической** называется действительная или мнимая части бианалитической функции).

Лемма 2. *Если бигармоническая в единичном круге k функция ограничена в k вместе со своей радиальной производной, то она представима в k интегралом*

$$u(re^{i\theta}) = (r^2-1)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(r, t-\theta)\, d\beta(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi(r, t-\theta)\, d\alpha(t), \tag{9}$$

где $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — функции ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$, а

$$\mathrm{P}(r, \varphi) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi + r^2},$$

$$\Pi(r, \varphi) = \frac{(1-r^2)^2[1-r\cos\varphi]}{[1-2r\cos\varphi+r^2]^2}.$$

Доказательство. Рассмотрим два семейства функций

$$\alpha_r(\theta) = \int_0^{\theta} u(r, t)\, dt \quad \text{и} \quad \beta_r(\theta) = \int_0^{\theta} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}\, dt,$$

где $r<1$ и $0<\theta\leqslant 2\pi$. Так как

$$|\alpha_r(\theta)| \leqslant \int_0^{2\pi} |u(r, t)|\, dt \leqslant M$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_r(\theta_k) - \alpha_r(\theta_{k+1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} u(r, t)\, dt \right| \leqslant 2\pi\cdot M,$$

$$0=\theta_1<\theta_2<\cdots<\theta_{n+1}=2\pi, \quad r<1,$$

то семейство функций $\{\alpha_r(\theta)\}$ является семейством: 1) равномерно ограниченным и 2) равномерно ограниченной вариации в $[0, 2\pi]$ относительно r. Семейство функций $\{\beta_r(\theta)\}$ будет очевидно также обладать свойствами 1) и 2). По первой теореме Хелли ([2], стр. 184) из семейства $\{\alpha_r(\theta)\}$ можно выбрать последовательность $\{\alpha_{r_n'}(\theta)\}$, сходящуюся в каждой точке $[0, 2\pi]$ к некоторой функции $\alpha(\theta)$ ограниченной вариации. Далее по той же теореме из последовательности $\{\beta_{r_n'}(\theta)\}$ можно также выбрать последовательность $\{\beta_{r_n}\theta)\}$, которая в каждой точке $[0, 2\pi]$ сходится к некоторой функции ограниченной вариации $\beta(\theta)$. Заметим, что получившаяся при этом последовательность $\{\alpha_{r_n}(\theta)\}$ также, очевидно, сходится к $\alpha(\theta)$ на $[0, 2\pi]$.

Из свойства 2) рассматриваемых последовательностей $\{\alpha_{r_n}(\theta)\}$ и $\{\beta_{r_n}(\theta)\}$ следует, что к каждой из них можно применить вторую теорему Хелли ([2], стр. 194). Поэтому имеем равенство

$$(r^2-1)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}(r, t-\theta)\, d\beta(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi(r, t-\theta)\, d\alpha(t) =$$

$$= (r^2 - 1)\frac{r_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\,(r, t-\theta)\,d\beta_{r_n}(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi\,(r, t-\theta)\,d\alpha_{r_n}(t) + o\,(1)$$

или

$$(r^2-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\,(r, t-\theta)\,d\beta\,(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi\,(r, t-\theta)\,d\alpha\,(t) =$$

$$= (r^2-1)\frac{r_n}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\,(r, t-\theta)\cdot\frac{\partial u\,(r_n, t)}{\partial r}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Pi\,(r, t-\theta)\cdot u\,(r_n, t)\,dt + o\,(1). \qquad (10)$$

Пусть $u\,(z)$ — функция, бигармоническая в круге $|z| \leqslant r_0$. Если $u\,(r_0 e^{i\theta}) = g\,(\theta)$ и $\frac{1}{2}\frac{\partial u\,(r_0 e^{i\theta})}{\partial r} = h\,(\theta)$, то значение функции $u\,(z)$ в произвольной точке $z = re^{i\theta}$, $r < r_0$, определяется [3] через $g\,(\theta)$ и $h\,(\theta)$ по формуле

$$u\,(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}(r^2 - r_0^2)^2\left[\int_0^{2\pi}\frac{-h\,(t)\,dt}{r^2 - 2rr_0\cos\,(t-\theta) + r_0^2} + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2\pi}\frac{g\,(t)\,[1 - rr_0\cos\,(t-\theta)]\,dt}{[r^2 - 2rr_0\cos\,(t-\theta) + r_0^2]^2}\right].$$

Поэтому равенство (10) можно переписать в виде

$$(r^2-1)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\,(r, t-\theta)\,d\beta\,(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Pi\,(r, t-\theta)\,d\alpha\,(t) = u\,(r_n\cdot z) + o\,(1). \qquad (11)$$

Переходя теперь в (11) к пределу при $r \to 1$, мы и получаем нужное соотношение.

Лемма 3. *Бигармоническая функция $u\,(z)$, представимая интегралом (9), почти всюду на единичной окружности имеет угловые граничные значения, равные $\alpha'\,(t)$.*

Доказательство. Как показано нами в [4] функция $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Pi\,(r, t-\theta)\,d\alpha\,(t)$ почти всюду на $|z| = 1$ имеет угловые граничные значения, равные $\alpha'\,(t)$, а функция $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\,(r, t-\theta)\,d\beta\,(t)$ имеет почти всюду угловые граничные значения, равные $\beta'(t)$, в силу классической теоремы Фату [1]. Отсюда и следует справедливость леммы 3.

Доказательство теоремы 3. Условия теоремы выполняются для бигармонических функций $u(z) = \operatorname{Re} w(z)$ и $v(z) = \operatorname{Im} w(z)$. Поэтому каждая из функций $u(z)$ и $v(z)$, по только что доказанным леммам 2 и 3, имеет почти всюду на $|z| = 1$ угловые граничные значения. Значит, таким же свойством обладает и $w(z) = u(z) + iv(z)$.

Дополнением к этим результатам может служить

Теорема 4. *Если ограниченная бианалитическая в круге k $\{|z| < 1\}$ функция*

$$w(z) = f(z) + (1 - r^2)\varphi(z) \tag{12}$$

имеет на некотором множестве E угловые граничные значения, то 1) почти всюду на E имеет угловые граничные значения компонента $f(z)$, 2) угловые граничные значения функции $w(z)$ почти всюду на E совпадают с угловыми граничными значениями аналитической функции $f(z)$.

Доказательство. Пусть

$$w(z) = u(z) + iv(z),$$

тогда

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) w = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right). \tag{13}$$

Пусть $x = re^{i\theta}$ — любая точка круга k. Опишем вокруг нее круг радиуса $R = \dfrac{1-r^2}{2}$. Этот круг целиком принадлежит k. Но для p-гармонической в некоторой области D функции $\psi(z)$ и круга $T\{|z - z_0| = R\}$, принадлежащего D, М. Николеску [5] установил неравенство

$$R^{\nu_1+\nu_2}\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2}\psi(z)}{\partial x^{\nu_1}\partial y^{\nu_2}} \leqslant CM, \tag{14}$$

где M — верхняя грань $\psi(z)$ в круге T, а $C = C(\nu_1, \nu_2, p)$ — некоторая константа.

В нашем случае действительная $u(z)$ и мнимая $v(z)$ части ограниченной функции не превосходят по модулю некоторого числа. Поэтому из (14) при $R = \dfrac{1-r^2}{2}$ и $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$; $\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 1$ соответственно получаем

$$(1 - r^2)\left|\frac{\partial\psi(z)}{\partial x}\right| < N, \quad (1 - r^2)\left|\frac{\partial\psi(z)}{\partial y}\right| < N,$$

где $\psi(z) = u(z)$, $v(z)$. Отсюда, в силу (13), находим

$$(1 - r^2)\left|\frac{\partial w(z)}{\partial \bar z}\right| < M \tag{15}$$

для любой точки $z = re^{i\theta}$ круга k. Но с другой стороны

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial \bar z}\left[f(z) + \varphi(z) - z\bar z\varphi(z)\right] = -z\varphi(z).$$

Поэтому из (15) вытекает, что функция

$$\Phi(z) = (1 - r^2)\,\varphi(z)$$

ограничена в k, а следовательно, в k ограничена и аналитическая функция $f(z)$. Отсюда следует, что, во-первых, $f(z)$ почти всюду на E имеет угловые граничные значения, а во-вторых, $\Phi(z)$ также обладает тем же свойством. Но у $\Phi(z)$, как показано при доказательстве теоремы 1, угловые граничные значения почти всюду равны нулю, а это и означает, что функции $w(z)$ и $f(z)$ почти всюду на E имеют одинаковые значения.

Смоленский педагогический институт
им. К. Маркса

Поступило 31.XII.1966

Վ. Ա. ՊԵՏՐՈՎ

ՖԱԹՈՒԻ ԹԵՈՐԵՄԻ ԱՆԱԼՈԳՆԵՐԸ ԲԱԶՄԱՆԱԼԻՏԻԿ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

$$W(z) = f_0(z) + \bar{z} f_1(z) + \cdots + \bar{z}^{n-1} f_{n-1}(z)$$

ֆունկցիան կոչվում է n-անալիտիկ միավոր շրջանում, եթե $f_i(z)$ $(i = 0, 1, \cdots, n-1)$ *ֆունկցիաները անալիտիկ են այնտեղ։*

Հոդվածում կառուցվում է երկանալիտիկ ֆունկցիայի օրինակ, որի համար Ֆաթուի թեորեմը տեղի չունի և բերվում են այդ թեորեմի անալոգները բազմանալիտիկ ֆունկցիաների համար։

V. A. PETROV

FATOU TYPE THEOREMS FOR POLYANALYTIC FUNCTIONS

Summary

A function

$$w(z) = f_0(z) + \bar{z} f_1(z) + \cdots + \bar{z}_{n-1} f_{n-1}(z)$$

is said to be n-analytic in the unit disk if all $f_i(z)$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ are analytic there.

In the present note we construct a bi-analytic function for which the Fatou theorem does not hold and prove several Fatou type theorems for polyanalytic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. И. Привалов.* Граничные свойства аналитических функций, М.—Л., 1950.
2. *И. П. Натансон.* Основы теории функций вещественной переменной, Л., 1941.
3. *А. Н. Тихонов* и *А. А. Самарский.* Уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1953.
4. *В. А. Петров.* Бигармонический интеграл Пуассона, Литовский математический сборник, 1967.
5. *M. Nicolesko.* Les fonction polyharmoniques, Paris, 1936.