

С. Г. ОВСЕПЯН

# ОБ ЭРГОДИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ АВТОМОРФИЗМОВ И О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ. II

В первой части этой работы [1] были получены некоторые условия эргодичности непрерывных автоморфизмов замкнутых кривых.

В настоящей работе исследуется вопрос о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны в классе измеримых функций путем применения полученных в [1] результатов к специальным автоморфизмам замкнутых кривых, тесно связанным с этой задачей.

Описывается также структура множества так называемых обобщенных собственных значений указанной задачи.

2.1. В допустимой области  $D$  с границей  $\Gamma$  рассмотрим следующую задачу Дирихле:

$$(1 + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1 - \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma} = \sigma(s), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — действительный параметр с модулем меньше единицы. Область  $D$  называется  $\lambda$ -допустимой, если характеристики уравнения (1) пересекают ее границу не более, чем в двух точках, и называется допустимой, если она  $\lambda$ -допустима при любом  $\lambda \in (-1, 1)$ .

Задача (1), (2) для допустимой области  $D$  подробно исследована в работах Р. А. Александрияна, которому в частности принадлежат различные определения обобщенного решения этой задачи и доказательство их эквивалентности в классе суммируемых функций [2, 3]. В связи с этим, представляется естественным следующее более широкое понятие обобщенного решения этой задачи в классе измеримых функций.

Пусть  $y - \mu x = \text{const}$  (соответственно  $y + \mu x = \text{const}$ ) — первое (соответственно второе) семейство характеристик уравнения (1), где

$$\text{положено } \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} = \mu.$$

Пусть  $\sigma(s)$  — измеримая функция на  $\Gamma$ . Измеримая функция  $U(x, y)$  называется обобщенным решением задачи (1), (2), если она на границе  $\Gamma$  почти везде равна  $\sigma(s)$  и представима в виде суммы двух измеримых функций

$$U(x, y) = f(x, y) + g(x, y),$$

где  $f(x, y)$  постоянна почти на всех характеристиках первого семейства, а  $g(x, y)$  постоянна почти на всех характеристиках второго семейства.

Пусть  $S_\lambda^+$  (соответственно  $S_\lambda^-$ ) — автоморфизм, который каждой точке  $\theta \in \Gamma$  сопоставляет точку пересечения проходящей через нее характеристики первого (соответственно второго) семейства с границей  $\Gamma$ . Точка  $\theta \in \Gamma$  называется периодической точкой автоморфизма  $S_\lambda = S_\lambda^- \cdot S_\lambda^+$  границы  $\Gamma$ , если существует такое целое число  $r$ , что  $S_\lambda^r \theta = \theta$ . Р. А. Александрияном доказано [2], что если автоморфизм  $S_\lambda$  имеет хотя бы одну периодическую точку, которая порождает нетривиальный  $\lambda$ -цикл, то однородная задача (1), (2) в классе кусочно-непрерывных функций имеет нетривиальное решение  $U_\lambda(x, y)$ , которое называется обобщенной собственной функцией этой задачи, соответствующей обобщенному собственному значению  $\lambda$ . Им было доказано также, что если граница  $\Gamma$  гладкая и  $S_\lambda$  не имеет периодических точек, то решение задачи (1), (2) единственно в классе кусочно-непрерывных функций [4].

В работе [5] при аналогичных условиях доказана единственность решения задачи (1), (2) в первом классе Бэра для невыпуклых и многосвязных областей.

Отметим также, что для прямоугольной области  $D$  с иррациональным отношением сторон единственность решения задачи (1), (2) при  $\lambda = 0$  в классе функций, которые непрерывно дифференцируемы и имеют в  $D$  суммируемые по Лебегу вторые производные, была доказана в 1939 году в работе [6].

2.2. Еще в пятидесятых годах Р. А. Александрияном была высказана гипотеза о том, что если автоморфизм  $S_\lambda$  не имеет периодических точек, а граница области имеет непрерывную кривизну, то обобщенное решение задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций.

В настоящей работе доказывается справедливость этой гипотезы для почти всех упомянутых автоморфизмов  $S_\lambda$ . С другой стороны приведенный в работе пример показывает, что для справедливости гипотезы требование некоторой гладкости границы, вообще говоря, необходимо.

Заметим, что  $S_\lambda$  является сохраняющим ориентацию автоморфизмом. Кроме того, очевидно, что гладкость автоморфизмов  $S_\lambda^+$ ,  $S_\lambda^-$ , а следовательно и  $S_\lambda$ , зависит от гладкости границы  $\Gamma$ .

Имеет место следующее утверждение, которое фактически содержится в работе [3].

**Лемма 1.** Пусть граница  $\Gamma$   $\lambda$ -допустимой области  $D$  гладкая. Тогда для единственности решения задачи (1), (2) в классе измеримых функций необходимо и достаточно, чтобы любое измеримое множество  $E \subset \Gamma$ , инвариантное относительно обоих автоморфизмов  $S_\lambda^+$  и  $S_\lambda^-$ , имело либо меру нуль, либо полную меру.

**Доказательство. Достаточность.** Допустим обратное. Пусть любое измеримое множество, которое инвариантно относительно обоих автоморфизмов  $S_1^+$  и  $S_1^-$ , имеет либо меру нуль, либо полную меру, а однородная задача (1), (2) имеет нетривиальное решение  $U(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$  в классе измеримых функций. Обозначим через  $f^*(s)$  и  $g^*(s)$  функции на  $\Gamma$ , которые совпадают соответственно с граничными значениями функций  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$ . Из сделанного предположения вытекает, что  $f^*(s)$  и  $g^*(s)$  отличны от постоянной, следовательно существуют два таких множества  $F_1$  и  $F_2$  положительной меры, что значения  $f^*(s)$  на множестве  $F_1$  отличны от ее значений на множестве  $F_2$  в том смысле, что

$$f^*(F_1) \cap f^*(F_2) = \emptyset. \quad (3)$$

С другой стороны, легко видеть, что  $f^*(s)$  (соответственно  $g^*(s)$ ) инвариантна относительно автоморфизмов  $S_1^+$  и  $S_1^-$ , т. е. для почти всех  $\theta \in \Gamma$

$$f^*(\theta) = f^*(S_1^n \theta) = f^*(S_1^n S_1^+ \theta) \quad (n = \dots -2, -1, 0, 1, 2, \dots). \quad (4)$$

В самом деле, пусть  $\Delta_1$  — множество тех характеристик первого семейства, на которых функция  $f(x, y)$  не постоянна, и  $\delta_1$  — множество точек пересечения этих характеристик с границей  $\Gamma$ . Аналогичным образом, заменяя первое семейство характеристик вторым и  $f(x, y)$  через  $g(x, y)$ , определяем множество  $\delta_2$ . Пусть  $\delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3$ , где  $\delta_3$  — множество всех граничных точек, в которых  $U(x, y)$  не равно нулю. Из определения обобщенного решения и из гладкости границы вытекает, что  $m\delta = 0$  и, поскольку автоморфизм  $S_1$ , в силу гладкости границы  $\Gamma$ , обладает свойством  $N$ , то мера множества  $\bar{\delta} = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_1^n(\delta + S_1^+ \delta)$  так-

же равна нулю. Легко убедиться, что  $\bar{\delta}$  — инвариантно относительно  $S_1^+$  и  $S_1^-$ , следовательно его дополнение  $C\bar{\delta}$  также инвариантно относительно  $S_1^+$  и  $S_1^-$ , имеет полную меру и на этом множестве  $U(x, y) = 0$ , т. е.  $g^*(s) = -f^*(s)$ . Пусть  $\theta \in C\bar{\delta}$  и  $f^*(\theta) = f^*(S_1^+ \theta) = a$ , тогда

$$g^*(\theta) = g^*(S_1^+ \theta) = g^*(S_1^- \theta) = g^*(S_1^- S_1^+ \theta) = -a,$$

следовательно

$$f^*(S_1^- \theta) = f^*(S_1^- S_1^+ \theta) = f^*(S_1^+ S_1^- \theta) = f^*(S_1^+ S_1^- S_1^+ \theta) = a.$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $f(x, y)$  и  $g(x, y)$  постоянны на характеристиках соответственно первого и второго семейства, проходящих через точки множества  $G\bar{\delta}$ . Продолжая таким образом и учитывая, что  $(S_1^+)^2$  и  $(S_1^-)^2$  являются тождественными отображениями, получаем равенство (4). Из (3) и (4) легко заключить, что множества

$$E_i = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_1^n(F_i + S_1^+ F_i), \quad (i = 1, 2),$$

которые инвариантны относи-

тельно  $S_+^*$  и  $S_-^*$ , имеют положительную меру и удовлетворяют условию  $m(E_1 \cap E_2) = 0$ . Таким образом, вопреки предположению, нашлись два множества положительной, но не полной меры, которые инвариантны относительно обоих автоморфизмов  $S_+^*$  и  $S_-^*$ . Полученное противоречие показывает, что однородная задача (1), (2) имеет только нулевое решение в классе измеримых функций.

**Необходимость.** Допустим обратное. Пусть в классе измеримых функций однородная задача (1), (2) имеет только тривиальное решение, и существует такое множество  $E \subset \Gamma$  положительной меры и отличное от полной меры, которое инвариантно относительно обоих автоморфизмов  $S_+^*$  и  $S_-^*$ . Полагая функцию  $f^*(s)$  равной единице на  $E$  и нулю на  $CE$ , а  $g^*(s) = -f^*(s)$  и продолжая эти функции во внутренней области  $D$ , полагая их постоянными на соответствующих характеристиках, мы получим, как легко убедиться, нетривиальное решение однородной задачи (1), (2), что противоречит предположению, и лемма доказана.

**Следствие.** Для единственности решения задачи (1), (2) в классе измеримых функций достаточно, чтобы автоморфизм  $S_\lambda$  был эргодическим.

Действительно, любое инвариантное относительно  $S_+^*$  и  $S_-^*$  измеримое множество  $E$ , очевидно, является также и инвариантным относительно  $S_\lambda$ , и из эргодичности  $S_\lambda$  вытекает, что  $E$  имеет либо меру нуль, либо полную меру.

2.3. Теперь уже, опираясь на установленное в [1] достаточное условие эргодичности (теорема 2), критерий единственности (лемма 1), а также на тот факт, что из гладкости границы  $\Gamma$  следует соответствующая гладкость функции  $g_\lambda(s)$  (см. [1]), отвечающей автоморфизму  $S_\lambda$ , легко убеждаемся в справедливости следующей теоремы единственности.

**Теорема 1.** Пусть кривизна границы  $\Gamma$   $\lambda$ -допустимой области  $D$  удовлетворяет условию Липшица по отношению к длине дуги, а число вращения  $\xi_\lambda$  автоморфизма  $S_\lambda$  иррационально и удовлетворяет условию (2) работы [1]. Тогда решение задачи (1), (2) для области  $D$  единственно в классе измеримых функций.

2.4. Пусть  $g_\lambda(s)$  — функция, порожденная автоморфизмом  $S_\lambda$ , которая, как уже было отмечено в [1], является непрерывной и строго возрастающей функцией  $s$ .

**Лемма 2.** Для допустимой области  $D$  с гладкой границей  $\Gamma$   $g_\lambda(s)$  является равномерно относительно  $s$  непрерывной и строго возрастающей функцией параметра  $\lambda \in (-1, 1)$ .

**Доказательство.** Покажем сначала, что для любого  $\lambda_0 \in (-1, 1)$  и для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\delta(\lambda_0, \varepsilon) > 0$  такое, что для всех  $\theta \in \Gamma$  неравенство  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$  влечет

$$\rho(S_{\lambda_0}^+ \theta, S_\lambda^+ \theta) < \varepsilon,$$

где под  $\rho(\theta_1, \theta_2)$  понимается длина меньшей из двух дуг, образованных точками  $\theta_1, \theta_2$ .

В самом деле, в прямоугольной системе координат  $x, y$  ось  $y$ -ов направим параллельно характеристикам первого семейства при значении параметра  $\lambda_0$ . Очевидно, границу  $\Gamma$  допустимой области  $D$  можно разбить на конечное число дуг, каждая из которых является графиком некоторой непрерывной и монотонной функции в этой системе координат.

Пусть  $(p, q)$  — одна из этих дуг, а  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  — уравнение этой дуги (рис. 1). В силу равномерной непрерывности  $f(x)$  на

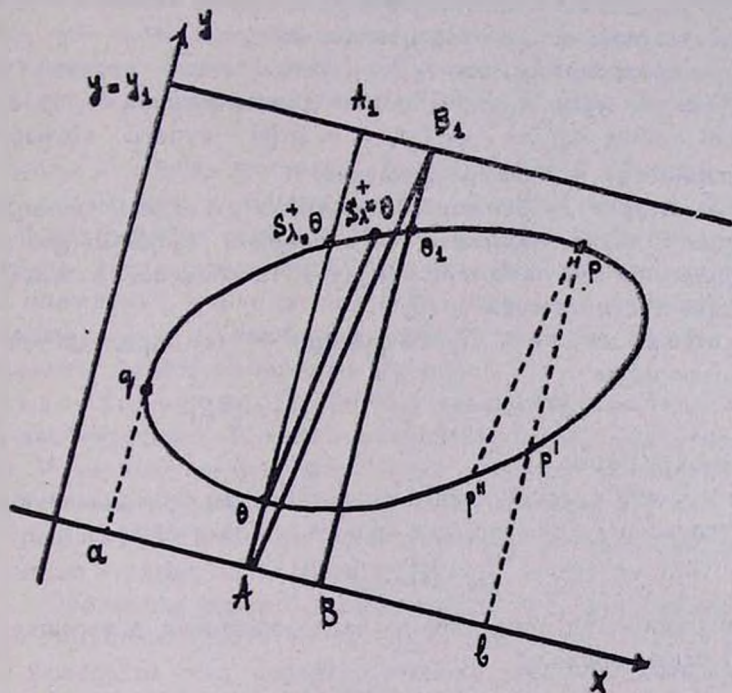


Рис. 1.

$[a, b]$ , по заданному  $\varepsilon > 0$  можно выбрать  $\delta_1 > 0$  так, чтобы равномерно по  $x \in [a, b]$  из  $|\Delta x| \leq \delta_1$  вытекало неравенство

$$|f(x + \Delta x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть  $\theta$  — произвольная точка на дуге  $(q, p')$  такая, что ее абсцисса  $x$  и  $x + \delta_1$  принадлежат отрезку  $[a, b]$ . Проведем через точки  $A(x, 0)$  и  $B(x + \delta_1, 0)$  прямые, параллельные оси  $y$ , до их пересечения с прямой  $y = y_1$  (см. рис. 1).

Обозначим через  $\lambda^*$  то значение параметра, при котором характеристики первого семейства параллельны отрезку  $[A, B_1]$ .

Полагая  $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ , для всех  $\theta \in (q, p'')$  будем иметь

$$\rho(S_{\lambda_0}^+ \theta, S_{\lambda}^+ \theta) \leq \rho(S_{\lambda_0}^+ \theta, \theta_1) \leq \left( \delta_1 + \bigvee_x^{x+\delta_1} f(x) \right) \leq \varepsilon,$$

если только  $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta^* = |\lambda^* - \lambda_0|$ , после чего, принимая во внимание независимость  $\lambda^*$  от выбора точки  $\theta$  на участке  $(q, p'')$ , легко заключаем, что  $S_{\lambda}^+ \theta$  непрерывно по  $\lambda$  равномерно относительно всех  $\theta \in \Gamma$ .

То же самое верно относительно автоморфизма  $S_{\lambda}^-$  и, поскольку  $S_{\lambda}$  есть их суперпозиция, то легко убедиться, что  $S_{\lambda}$  тоже непрерывно зависит от  $\lambda$ , равномерно относительно точек  $\theta \in \Gamma$ . Это в свою очередь означает, что  $g_{\lambda}(s)$  — непрерывная функция параметра  $\lambda$ , причем непрерывность равномерна относительно  $s$ .

Теперь предположим, что  $\lambda_1 > \lambda_2$ , тогда легко видеть, что при любом  $\theta \in \Gamma$  длина дуги  $(\theta, S_{\lambda_1} \theta)$  больше длины дуги  $(\theta, S_{\lambda_2} \theta)$ , следовательно, при любом  $sg_{\lambda_1}(s) > g_{\lambda_2}(s)$ , т. е.  $g_{\lambda}(s)$  — строго возрастающая функция параметра  $\lambda$ , и лемма доказана.

**Лемма 3.** Для допустимой области  $D$  с гладкой границей числа вращения  $\xi_{\lambda}$  автоморфизмов  $S_{\lambda}$  образуют непрерывную и монотонную функцию от параметра  $\lambda \in (-1, 1)$ , область значений которой совпадает с интервалом  $(0, 1)$ .

**Доказательство.** Пусть функция  $g_{\lambda}^{(n)}(s)$  определяется рекуррентно по формуле

$$g_{\lambda}^{(n)}(s) = g_{\lambda}(g_{\lambda}^{(n-1)}(s)), \quad n \geq 2,$$

где положено  $g_{\lambda}^{(1)}(s) = g_{\lambda}(s)$ .

Из того, что  $g_{\lambda}(s)$  — строго возрастающая функция от  $s$  и от  $\lambda$ , следует, что если  $\lambda_1 > \lambda_2$ , то для любого  $s$  и для любого  $n > 0$

$$g_{\lambda_1}^{(n)}(s) > g_{\lambda_2}^{(n)}(s). \quad (5)$$

С другой стороны, по определению число вращения в терминах функций  $g_{\lambda}^{(n)}(s)$  равно пределу

$$\xi_{\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_{\lambda}^{(n)}(s) - s}{n \cdot l},$$

где  $l$  — длина границы  $\Gamma$ , поэтому из неравенства (5) немедленно заключаем, что  $\xi_{\lambda_1} \geq \xi_{\lambda_2}$ , т. е.  $\xi_{\lambda}$  — неубывающая функция от  $\lambda$ .

Как показал В. И. Арнольд [7],  $\xi_{\lambda}$  непрерывно зависит от  $S_{\lambda}$  в том смысле, что из близости функций  $g_{\lambda_0}(s)$  и  $g_{\lambda}(s)$ , равномерной по  $s$ , следует близость чисел  $\xi_{\lambda_0}$  и  $\xi_{\lambda}$ . Сопоставляя это с леммой 2, заключаем, что  $\xi_{\lambda}$  — непрерывная функция от  $\lambda$ .

С другой стороны, легко видеть, что когда  $\lambda$  изнутри интервала  $(-1, 1)$  стремится к  $-1$  (соответственно к  $1$ ), числа вращения  $\xi_{\lambda}$  автоморфизмов  $S_{\lambda}$  стремятся к нулю (соответственно к единице). Отсюда и из непрерывности  $\xi_{\lambda}$  от  $\lambda$  следует, что числа вращения  $\xi_{\lambda}$  автоморфизмов  $S_{\lambda}$  заполняют весь интервал  $(0, 1)$ , и лемма доказана.

Из теоремы 1, учитывая замечание, сделанное в конце работы [1], следует, что для допустимой области  $D$  с гладкой границей решение

задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций, для почти всех  $\xi$ , из интервала  $(0,1)$ .

2.5. Пусть  $M$  — множество всех обобщенных собственных значений  $\lambda$ , так что для всех  $\lambda \in CM$  решение задачи (1), (2) единственно в классе кусочно-непрерывных функций. Как уже было сказано, Р. А. Александрином доказано, что  $\lambda$  принадлежит множеству  $M$  тогда и только тогда, когда соответствующий автоморфизм  $S_\lambda$  имеет периодическую точку  $\theta$ , которая порождает нетривиальный  $\lambda$ -цикл. Отсюда и из определения числа вращения легко следует, что число вращения автоморфизма  $S_\lambda$  рационально для всех  $\lambda \in M$ . Таким образом, данное  $\lambda$  может принадлежать дополнению множества  $M$  либо за счет того, что число вращения автоморфизма  $S_\lambda$  иррационально, либо за счет того, что хотя это число рационально, однако циклы, порожденные всеми периодическими точками автоморфизма  $S_\lambda$ , оказываются тривиальными.

**Теорема 2.** Пусть кривизна  $\Gamma$  допустимой области  $D$ , как функция длины дуги, удовлетворяет условию Липшица. Тогда множество  $M$  расположено всюду плотно в интервале  $(-1,1)$  и состоит из счетного числа компонент, каждая из которых либо точка, либо интервал\*, а множество  $CM$  имеет положительную меру, и для почти всех  $\lambda$  из этого множества решение задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций.

**Доказательство.** Пусть  $M_1$  — множество всех  $\lambda \in (-1,1)$ , для которых автоморфизмы  $S_\lambda$  имеют рациональное число вращения. Покажем, что  $M_1$  состоит из счетного числа связных компонент, каждая из которых является либо отрезком, либо точкой. Пусть  $\xi$  — рациональное число из  $(0,1)$ . Тогда, согласно лемме 3, существует хотя бы одно значение  $\lambda$  такое, что  $\xi$  служит числом вращения для автоморфизма  $S_\lambda$ . Обозначим через  $\Lambda_\xi$  множество всех  $\lambda$ , для которых автоморфизмы  $S_\lambda$  имеют одно и то же число вращения, равное  $\xi$ . Покажем, что каждое из этих множеств состоит либо из одной точки, либо образует отрезок.

Пусть  $\lambda_0 \in \Lambda_\xi$ , т. е. число вращения автоморфизма  $S_{\lambda_0}$  равно рациональному числу  $\xi = \frac{m}{n}$ . Как показал Пуанкаре, в этом случае

отображение  $S_{\lambda_0}^n$  имеет неподвижную точку:  $S_{\lambda_0}^n \theta = \theta$ , которая совершает ровно  $m$  оборотов при этом отображении. Другими словами, в этом случае периодические точки автоморфизма  $S_{\lambda_0}$  образуют непустое множество  $A(\lambda_0, \Gamma)$  на  $\Gamma$ .

Пусть  $A(\lambda_0, \Gamma)$  совпадает с  $\Gamma$ , т. е. все точки  $\Gamma$  являются периодическими для автоморфизма  $S_{\lambda_0}$ . Покажем, что в этом случае  $\Lambda_\xi$  состоит из одной точки  $\lambda_0$ . В самом деле, из определения числа вращения следует, что в этом случае каждая точка  $\theta \in \Gamma$  при отображе-

\* Интервал может быть открытым, полуоткрытым и замкнутым.

нии  $S_{\lambda_0}^n$  совершает ровно  $m$  оборотов на  $\Gamma$ . В терминах функции  $g_{\lambda_0}(s)$  это означает, что при любом  $s$

$$g_{\lambda_0}^{(n)}(s) - s = m \cdot l.$$

Поскольку  $g_{\lambda}(s)$  — строго возрастающая функция от  $s$  и от  $\lambda$ , то при  $\lambda \geq \lambda_0$  и при любом  $s$

$$(g_{\lambda}^{(n)}(s) - s) \geq m \cdot l,$$

это означает, что ни одна точка  $\theta \in \Gamma$  не может совершать ровно  $m$  оборотов на  $\Gamma$  при отображении  $S_{\lambda}^n$ , т. е. число вращения автоморфизма  $S_{\lambda}$  для  $\lambda \neq \lambda_0$  отлично от  $\xi$ .

Рассмотрим случай, когда множество  $A(\lambda_0, \Gamma)$  не совпадает с  $\Gamma$ , т. е. не все точки  $\theta \in \Gamma$  являются периодическими для автоморфизма  $S_{\lambda_0}$ . Известно, что периодические точки автоморфизма  $S_{\lambda_0}$  образуют замкнутое множество на  $\Gamma$ , следовательно его дополнение состоит из не более, чем счетного числа интервалов. Рассмотрим один из этих интервалов  $(\alpha, \beta)$ . Пусть  $\theta$  — некоторая точка из этого интервала, тогда точка  $S_{\lambda_0}^n \theta$  принадлежит интервалу  $(\alpha, \beta)$ , но не совпадает с точкой  $\theta$ . В силу того, что  $S_{\lambda}^n$  зависит от  $\lambda$  непрерывно, путем непрерывного изменения  $\lambda$  убеждаемся, что существует значение  $\lambda_1 \neq \lambda_0$  такое, что  $S_{\lambda_1}^n \theta = \theta$ , причем точка  $\theta$  совершает ровно  $m$  оборотов на  $\Gamma$  при этом отображении, т. е.  $\frac{m}{n}$  служит числом вращения и для автоморфизма  $S_{\lambda_1}$ .

В силу монотонности функции  $\xi_{\lambda}$  от  $\lambda$  (лемма 3) следует, что при любом  $\lambda$  между  $\lambda_0$  и  $\lambda_1$   $\frac{m}{n}$  служит числом вращения для  $S_{\lambda}$ . Учитывая также непрерывность числа вращения  $\xi_{\lambda}$  от  $\lambda$ , заключаем, что множество значений параметра  $\lambda$ , для каждого из которых соответствующий автоморфизм  $S_{\lambda}$  имеет число вращения, равное  $\frac{m}{n}$ , образует отрезок.

Отсюда легко заключить, что  $\Lambda_i$  является одноточечной компонентой тогда и только тогда, когда все точки  $\Gamma$   $\lambda$ -периодические при некотором значении  $\lambda$ .

Вместе с тем, как уже было отмечено [4], при иррациональном числе вращения автоморфизма  $S_{\lambda}$  значение  $\lambda$  не может принадлежать множеству  $M$ , поэтому  $M \subset M_1$ .

Покажем, что множество  $M$  получается из  $M_1$  удалением из каждого принадлежащего ему отрезка не более, чем двух точек. Этим первая часть теоремы будет доказана. Всюду плотность множества  $M$  на  $(-1, 1)$  доказана в работе [4].

Граничная точка  $\lambda$ -допустимой области  $D$  называется  $\lambda$ -вершиной, если хотя бы одна из двух характеристик уравнения (1), проходящих через нее, целиком лежит вне  $D$ .

Очевидно, каждая такая область с гладкой границей имеет четыре  $\lambda$ -вершины.

Множество точек  $\bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} S_n \theta$  называется  $\lambda$ -циклом, порожденным точкой  $\theta$ .

$\lambda$ -цикл называется тривиальным, если он содержит  $\lambda$ -вершину, и называется замкнутым, если состоит из конечного числа точек.

Легко убедиться, что тривиальный и замкнутый  $\lambda$ -цикл содержит две  $\lambda$ -вершины, поэтому более двух тривиальных и замкнутых  $\lambda$ -циклов быть не может.

Учитывая это, легко убедиться, что все компоненты множества  $M_1$ , которые состоят из одной точки, принадлежат также и множеству  $M$ . В самом деле, пусть  $\lambda_0$  — одна из таких компонент, тогда все точки  $\Gamma$  являются  $\lambda_0$ -периодическими и поскольку лишь конечное число точек может порождать тривиальные  $\lambda_0$ -циклы, то все остальные точки обязаны порождать нетривиальные  $\lambda_0$ -циклы, стало быть  $[2] \lambda_0 \in M$ .

Пусть  $[\lambda_1, \lambda_2]$  один из составляющих множество  $M_1$  отрезков. Покажем, что все точки этого отрезка, кроме, может быть двух, принадлежат множеству  $M$ .

Пусть  $a_1, a_2, a_3, a_4$  — точки, в которых касательная параллельна одной из координатных осей (рис. 2).

Допустим, что при некотором  $\lambda^* \in [\lambda_1, \lambda_2]$   $\lambda^*$ -вершина  $\theta^*$  из дуги  $(a_1, a_2)$  порождает тривиальный и замкнутый  $\lambda^*$ -цикл. Пусть  $\lambda$  — неко-

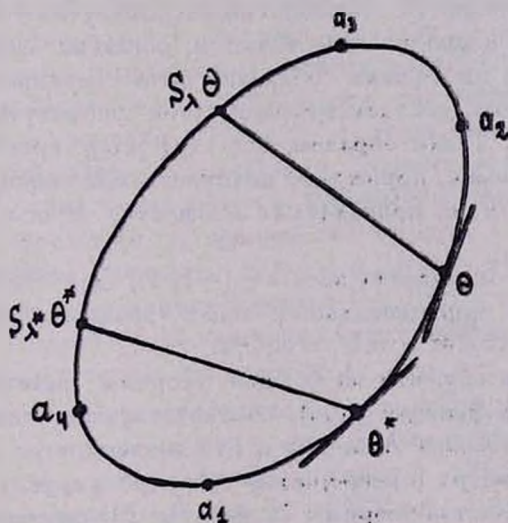


Рис. 2.

торое значение из  $[\lambda_1, \lambda_2]$ , отличное от  $\lambda^*$ , а  $\theta$  —  $\lambda$ -вершина на дуге  $(a_1, a_2)$ . Покажем, что  $\theta$  не может порождать тривиальный и замкнутый  $\lambda$ -цикл.

Предположим, что  $\lambda < \lambda^*$  (случай  $\lambda > \lambda^*$  рассматривается аналогично), тогда  $\theta^*$  будет расположена по дуге  $(a_1, a_2)$  ближе к  $a_1$ , чем  $\theta$ .

Пусть  $s$  и  $s^*$  — значения параметра, соответствующие точкам  $\theta$  и

$\theta^*$ , выбранные так, чтобы разность  $s - s^*$  равнялась длине дуги  $(\theta^*, \theta)$ . Тогда, поскольку  $S_\lambda \theta = S_\lambda^{-1} \theta$  и  $S_{\lambda^*} \theta^* = S_{\lambda^*}^{-1} \theta^*$ , легко видеть, что

$$g_\lambda(s) < g_{\lambda^*}(s^*).$$

Отсюда, учитывая, что  $g_\lambda(s)$  — строго возрастающая функция  $s$  и  $\lambda$ , получаем

$$g_\lambda^{(n)}(s) < g_{\lambda^*}^{(n)}(s^*)$$

при любом положительном  $k$ .

Пусть  $\xi = \frac{m}{n}$  — число вращения автоморфизмов  $S_\lambda$  при  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ ,

тогда из определения числа вращения следует, что все  $\lambda$ -периодические точки при любом  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  обязаны совершать ровно  $m$  оборотов на  $\Gamma$  при отображении  $S_\lambda^n$ . Поэтому, полагая  $k = n$ , будем иметь

$$(g_\lambda^{(n)}(s) - s) < g_{\lambda^*}^{(n)}(s^*) - s^* = m \cdot l,$$

где  $l$  — длина границы  $\Gamma$ . Это неравенство показывает, что точка  $\theta$  не может совершать полных  $m$  оборотов при отображении  $S_\lambda^n$ , следовательно, она не может быть  $\lambda$ -периодической точкой.

Теперь уже легко убедиться, что для не более чем двух значений  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$  замкнутые  $\lambda$ -циклы могут быть тривиальными.

Вместе с тем, все  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , в силу рациональности числа вращения автоморфизмов  $S_\lambda$ , согласно вышеупомянутому результату Пуанкаре, допускают периодические точки и, согласно сказанному выше, соответствующие им  $\lambda$ -циклы обязаны быть нетривиальными, кроме может быть циклов, соответствующих двум упомянутым исключительным значениям  $\lambda$ . Таким образом, все  $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ , кроме, может быть, двух исключительных, порождают нетривиальные обобщенные собственные функции [2], т. е. принадлежат множеству  $M$ , и первая часть теоремы доказана.

Пусть  $M_2$  — множество всех  $\lambda \in (-1, 1)$ , для которых автоморфизмы  $S_\lambda$  имеют иррациональные числа вращения. Из доказанного следует, что  $M_2 \subset CM$  и  $mM_2 = mCM$ .

Легко убедиться, что из условий теоремы вытекает, что вторые производные по  $s$  функций  $g_\lambda(s)$ , соответствующих автоморфизмам  $S_\lambda$ , удовлетворяют условию Липшица и что зависимость семейства этих функций от параметра  $\lambda$  непрерывно дифференцируема. В этих условиях из доказательства теоремы В работы [8] вытекает, что множество  $M_2$  имеет положительную меру и что множество тех  $\lambda \in M_2$ , для которых функции  $\Phi_\lambda^{-1}$ , обратные отображающим функциям Данжуа  $\Phi_\lambda$ , соответствующим автоморфизмам  $S_\lambda$ , могут быть негладкими, имеет меру нуль. После этого доказательство второй части теоремы вытекает из теоремы 1 работы [1] и из следствия леммы 1.

Таким образом, для допустимой области с гладкой границей решение задачи (1), (2) единственно в классе измеримых функций для почти всех  $\lambda$  из  $M_2$ , т. е. гипотеза верна для почти всех  $\lambda \in M_2$ . Вер-

на ли она в том объеме, в каком была высказана, т. е. для всех  $\lambda \in M_2$ , пока еще неизвестно.

2.6. В этом пункте мы приводим пример, который показывает, что для справедливости упомянутой гипотезы некоторая гладкость границы, вообще говоря, необходима и, кроме того, что эту гладкость нельзя заменить какими-либо ограничениями на число вращения соответствующего автоморфизма. Этот же пример служит подтверждением того, что иррациональность числа вращения не обеспечивает эргодичности даже для частного класса рассматриваемых выше автоморфизмов, если не требовать соответствующей гладкости границы.

В самом деле, для любого иррационального числа  $\xi$  между нулем и единицей и для любого  $\lambda$  из интервала  $(-1, 1)$  мы построим  $\lambda$ -допустимую область  $D$  с границей  $\Gamma$  такую, что цикл каждой точки  $\theta \in \Gamma$ , порожденной автоморфизмом  $S_\lambda$ , всюду плотен на  $\Gamma$ , число вращения автоморфизма  $S_\lambda$  равно  $\xi$  и  $S_\lambda$  не является эргодическим. Более того, окажется, что для этой области решение задачи (1), (2), будучи единственным в классе кусочно-непрерывных функций, не будет единственным в классе измеримых функций.

По данным  $\xi$  и  $\lambda$  построим прямоугольник  $R$  со сторонами  $ad = \frac{\xi}{\lambda}$  и  $ab = 1 - \xi$  (рис. 3).

Пусть образ точки  $b$  при отображении  $S_\lambda^-$  лежит на стороне  $cd$  (случай, когда он лежит на стороне  $ad$ , рассматривается аналогично). Возьмем прямоугольную систему координат  $x, y$  с началом в точке  $b$  и с осью  $y$ -ов, параллельной характеристикам первого семейства. Положительные направления осей выберем так, чтобы точка  $c$  имела положительные координаты. Пусть  $\varphi$  — острый угол, образованный положительным направлением оси  $x$ -ов и характеристикой второго семейства, проходящей через точку  $b$ . Обозначим через  $x_1$  абсциссу точки  $c$ , а длину отрезка  $[b, x_1]$  примем за единицу. Рассмотрим на этом единичном отрезке функцию  $f_1(x) = K[\Theta(x) + x]$ , где  $K > \operatorname{tg} \varphi$ , а  $\Theta(x)$  — известная сингулярная функция [9]. Легко убедиться, что характеристики второго семейства пересекают график этой функции не более, чем в одной точке. На отрезке  $[x_1, x_2]$ , где  $x_2$  — абсцисса точки  $S_\lambda^- b$ , определим функцию  $f_2(x)$  следующим образом: проведем через точку  $x \in [x_1, x_2]$  характеристику первого семейства до пересечения со стороной  $cd$  в точке  $z$ ; обозначим через  $\beta$  точку пересечения стороны  $bc$  с характеристикой второго семейства, проходящей через  $z$ , а через  $\gamma$  — пересечение графика функции  $y = f_1(x)$  с характеристикой первого семейства, проходящей через точку  $\beta$ . Пусть  $\delta$  — точка пересечения характеристик первого и второго семейства, проходящих соответственно через  $x$  и  $\gamma$ . В точке  $x$  определим функцию  $f_2(x)$ , равную длине отрезка  $[x, \delta]$ . Очевидно,  $f_2(x)$  — непрерывная и строго монотонная функция.

Рассмотрим область  $D$ , граница  $\Gamma$  которой совпадает с границей  $\Gamma^*$  прямоугольника  $R$  на участке  $bad.S_\lambda^- b$  и с графиками функций



$mf_1(G_0) = \sqrt{1 + K^2}$ , а длина графика функции  $f_1(x)$  больше, чем  $\sqrt{1 + 4K^2}$ . Следовательно, мера множества  $f_1(P_0)$  на  $\Gamma$ , которое совпадает с множеством  $S_1^+ P_0$ , больше нуля. Кроме того, легко видеть, что множество  $M(P_0)$  инвариантно относительно автоморфизмов  $S_1^+$  и  $S_1^-$  границы  $\Gamma$ , следовательно и относительно автоморфизма  $S_1$  границы  $\Gamma$ , т. е.  $S_1$  не является эргодическим.

Известно [10], что число вращения автоморфизма  $S_1$  границы  $\Gamma^*$  прямоугольника  $R$  с указанными сторонами равно  $\frac{1}{2}$ . Кроме того, очевидно, что  $\Gamma$  получается из  $\Gamma^*$  непрерывным и сохраняющим ориентацию отображением, при котором автоморфизм  $S_1$  границы  $\Gamma^*$  переходит в автоморфизм  $S_1$  границы  $\Gamma$ , и поскольку число вращения инвариантно относительно таких преобразований, то число вращения автоморфизма  $S_1$  границы  $\Gamma$  также равно  $\frac{1}{2}$ .

Пусть  $\theta$  — некоторая точка, принадлежащая общей части границ  $\Gamma^*$  и  $\Gamma$ , тогда оба цикла этой точки, порожденные автоморфизмами  $S_1$  на  $\Gamma^*$  и  $\Gamma$ , совпадают на общей части границ. Принимая во внимание, что цикл любой точки границы  $\Gamma^*$  всюду плотен на  $\Gamma^*$ , нетрудно убедиться, что цикл любой точки границы  $\Gamma$  также всюду плотен на  $\Gamma$ .

Поскольку граница  $\Gamma$  негладкая, то мы не можем опираться на лемму 1, и для доказательства неединственности решения задачи (1), (2) в классе измеримых функций заметим, что мера пересечения отрезка  $oe$  с характеристиками второго семейства, проходящими через точки множества  $f_1(P_0) = S_1^+ P_0$ , равна  $K > 0$ , а мера пересечения  $oe$  с характеристиками того же семейства, проходящими через точки  $f_1(G_0) = S_1^+ G_0$ , равна  $(K - \operatorname{tg} \varphi) > 0$ . Кроме того, поскольку  $f_1(G_0)$  принадлежит гладкой части границы  $\Gamma$ , а множество  $M(P_0)$  на общей части границ  $\Gamma^*$  и  $\Gamma$  имеет меру нуль, легко убедиться, что мера пересечения множества  $f_1(G_0)$  с множеством  $M(P_0)$  равна нулю. Теперь уже легко заключить, что пересечения области  $D$  как с множеством характеристик второго семейства, переходящих через точки инвариантного относительно  $S_1^+$  и  $S_1^-$  множества  $M(P_0)$ , так и с множеством характеристик того же семейства, проходящих через точки дополнительного множества  $CM(P_0)$ , (которое также инвариантно относительно  $S_1^+$  и  $S_1^-$ ), имеют положительную плоскую меру.

Положим  $f(s)$  равной единице на множестве  $M(P_0)$  и нулю на  $CM(P_0)$ , и продолжим эти значения во внутрь области  $D$ , полагая их постоянными на характеристиках первого семейства. Обозначим полученную таким образом функцию через  $f(x, y)$ . Аналогичным образом, исходя из  $g(s) = -f(s)$  и заменяя первое семейство характеристик вторым, определим функцию  $g(x, y)$ . Принимая во внимание сказанное выше, легко убеждаемся, что в области  $D$  функция  $U(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$  является нетривиальным решением однородной задачи (1), (2) в классе измеримых функций.

Таким образом, решение задачи (1), (2) в области  $D$ , которое единственно в классе кусочно-непрерывных функций [4] (цикл каждой точки  $l'$ , порожденной автоморфизмом  $S_i$ , всюду плотен на  $l'$ ), не является единственным в классе измеримых функций.

В заключение выражаю глубокую благодарность Р. А. Александ-  
риану за постановку задачи и ценные замечания.

Институт математики и механики  
АН АрмССР

Поступило 24.III.1967

#### Ա. Գ. ՀՈՎՍԵՓՅԱՆ

ԱՆՇՆԴԻՆԱՏ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄՆԵՐԻ ԷՐԳՈՂԻԿՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԼԱՐԻ ՏԱՏԱՆՄԱՆ  
ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ԴԻՐԻԽԼԵԻ ԽՆԴՐԻ ԼՈԹՄԱՆ ՄԻԱԿՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ: II

#### Ա մ փ ո փ ո լ մ

Աշխատանքում քննարկվում է ուռուցիկ տիրույթներում լարի տատան-  
ման հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի լուծման միակութիւն հարցը  
չափելի ֆունկցիաների դասում:

Ապացուցվում է, որ եթե տիրույթի եզրագծի կորույթունը բավարարում  
է Լիպշիցի պայմանին, ապա  $\lambda$  պարամետրի համարյա բոլոր այն արժեքների  
համար, որոնց դեպքում (1), (2) խնդրին համապատասխանող  $S_i$  ավտոմոր-  
ֆիզմների պատման թվերը իռացիոնալ են, (1), (2) խնդրի լուծումը միակն  
է չափելի ֆունկցիաների դասում:

Ցույց է տրվում նաև, որ (1), (2) համասեռ խնդրի ալսպես կոչված  
ընդհանրացած սեփական արժեքների բազմությունը կազմված է հաշվելի  
թվով կապակցված կոմպոնենտներից, որոնցից ամեն մեկն իրենից ներկա-  
յացնում է կամ մեկ կետ, կամ ամբողջ ինտերվալ:

S. G. HOVSEPIAN

#### ON THE ERGODICITY OF CONTINUOUS AUTOMORPHISMS AND THE UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF DIRICHLET PROBLEM FOR THE VIBRATING STRING EQUATION. II

#### S u m m a r y

In the class of measurable functions the uniqueness of solution of  
Dirichlet problem for vibrating string equation in convex domains is dis-  
cussed.

It is proved in the paper, that if the boundary's curvature satis-  
fies Lipsitz condition, then for almost every value of those  $\lambda$ , for which  
the rotation numbers of corresponding to the problem (1) (2)  $S_i$  auto-  
morphisms are irrational, the solution of the problem (1), (2) is unique  
in the class of measurable functions.

It is also shown, that the set of so called generalised eigenvalues  
for the homogenous problem (1), (2) constitutes of countable number of  
connected components, each being a point or an interval.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. С. Г. Овсепян. Об эргодичности непрерывных автоморфизмов и о единственности решения задачи Дирихле для уравнения струны. I, Известия АН АрмССР. Математика, 2, № 2, 1967, 128—136.
2. Р. А. Александрян. Кандидатская диссертация, МГУ, 1949.
3. Р. А. Александрян. Докторская диссертация, МГУ, 1962.
4. Р. А. Александрян. Спектральные свойства оператора, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. А. Соболева, Труды Моск. матем. о-ва, 9, 1960, 455—505.
5. С. Г. Овсепян. О порождающем множестве граничных точек в задаче Дирихле для уравнения колебания струны в многосвязных областях, ДАН АрмССР, XXXIX, 1964, 193—200.
6. D. G. Bourgin, R. Duffin. The Dirichlet problem for the vibrating string equation, Bull. Am. Math. Soc., 45, 1939, 851—859.
7. В. И. Арнольд. Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя, Известия АН СССР, сер. матем., 25, № 1, 1961, 21—86.
8. A. Finzl. Sur le problème de la génération d'une transformation donnée d'une courbe fermée par une transformation infinitésimale, Ann. Ecole Norm. Sup., 67 (3), 1950, 243—305.
9. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., 1957.
10. F. John. The Dirichlet problem for a hyperbolic equation, Amer. Journ. Math., 63, № 1, 1941, 141—154.